

Årgång 18, 1935

Första häftet

- 725.** En kub är given. Man betraktar de 24 plan, som vart och ett innehåller en kantlinje i kuben och mittpunkterna till två andra. Hur stor del av kubens volym utgör det sammanhängande område kring kubens centrum, som dessa plan avgränsa? (X.)
- 726.** En kula med diametern ka , där a är ett positivt tal och k ett egentligt bråk, utför en sinussvängning, så att medelpunkten oscillerar mellan punkterna $(a; 0)$ och $(-a; 0)$. En likadan kula svänger längs y -axeln med samma periodtal och samma amplitud. Hur stor måste fasförskjutningen minst vara, om kulorna skola gå fria från varandra? (X.)
- 727.** Om en rörlig tangent skär tre fixa tangenter a, b, c , till en parabel i resp. A, B, C , så är förhållandet $AB : AC$ konstant. Visa med hjälp av denna sats (eller på annat sätt), att styrlinjen till den parabel, som tangerar sidorna i en i en cirkel inskriven fyrhörning går genom diagonalernas skärningspunkt. (X.)

Enklare matematiska uppgifter

- 728.** Lös ekvationssystemet

$$\left. \begin{aligned} x(y+z-x) &= 18 \\ y(x+z-y) &= 16 \\ z(x+y-z) &= 10 \end{aligned} \right\}.$$

(Svar: x, y och z äro resp. $\pm 3; \pm 4; \pm 5$)

- 729.** I en geometrisk serie är $s_1 = 1$ och $s_6 = 3$. Beräkna s_9 .
(Svar: 7)
- 730.** Tungan på en svängande vågbalans vänder vid delstrecken 28, 4, 25 på skalan i tre på varandra följande svängningar. Vid vilka delstreck kan den beräknas stanna, om de successiva svängningarna, mätta i antal skaldelar mellan vändpunkterna, antagas utgöra termerna i en geometrisk serie? Skalans nollpunkt befinner sig vid dess ena ändpunkt.
(Svar: 15, 2)
- 731.** I en parallelogram $ABCD$ bilda AB, AC, AD och BD i nu nämnd ordning geometrisk serie. Bestäm kvoten och parallelogrammens vinklar.
(Svar: $\sqrt{2}; 41,41^\circ$ o.s.v.)

- 732.** I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = BC = CD = 1$ och $\angle ABC = \beta$, $\angle BCD = \gamma$. Visa, att fyrhörningens yta är $2 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$.
- 733.** Visa, att ytan av cirkelringen mellan de in- och omskrivna cirklarna till en regelbunden n -hörning med sidan a är beroende av a , men ej av n .
(Svar: Ytan är $\frac{\pi a^2}{4}$)
- 734.** I en fyrhörning äro tre sidor lika stora. Vardera diagonalen är lika med den fjärde sidan, som är 5 cm. Beräkna fyrhörningens vinklar och yta.
(Svar: 72° ; 72° ; 108° ; 108° ; $11,89 \text{ cm}^2$)
- 735.** I $\triangle ABC$ delas vinkeln A i tre lika delar av höjden och medianen från A . Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: 30° , 60° och 90°)
- 736.** Om i en triangel $\sin 2A \cdot \sin 2B = \sin^2 C$, så är triangeln likbent.
- 737.** I varje triangel ABC har $\sin A \cdot \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} \right) + \sin B \cdot \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} \right)$ ett konstant värde. Beräkna detta.
(Svar: 2)
- 738.** Sidorna i en triangel äro $x-1$, x och $x+1$ längdenheter. Den största vinkeln är dubbelt så stor som den minsta. Beräkna x .
(Svar: $x = 5$)
- 739.** Basytan i en regelbunden pyramid är en liksidig triangel med sidan 1 dm. Höjden mot en sidoyta är 0,75 dm. Beräkna pyramidens volym.
(Svar: $\frac{\sqrt{3}}{24} \text{ dm}^3$)
- 740.** I en regelbunden pyramid med kvadratisk basyta är kantvinkeln vid en sidokant 120° . Hur stor är kantvinkeln vid en baskant.
(Svar: 45°)
- 741.** Basytan i en pyramid är en rektangel med sidorna 9 cm och 4 cm. Genom en av rektangelns längre sidor kan läggas ett plan, vars skärningslinjer med sidoytorna, tillsammans med nyssnämnda rektangelsida bilda en halv regelbunden 6-hörning. Sidokanterna i pyramiden äro lika långa. Beräkna deras längd.
(Svar: 7 cm)
- 742.** En sfär, som har centrum i ett hörn och går genom fyra hörn på en regelbunden oktaeder, utskär på oktaederns yta en girland av fyra kongruenta cirkelbågar. Sök bågarnas gradtal.
(Svar: 120°)

- 743.** En rät vinkel stöder med spetsen mot ett vågrätt bord. Benen bilda vinklarna u och v med bordsytan och $\sin u + \sin v = 1$. Hur stor vinkel bildar den rätta vinkelns bissektris med lodlinjen?
(Svar: 45°)
- 744.** En parallelepiped begränsas av 6 kongruenta romber med sidan a och vinklarna 60° och 120° . Beräkna volymen.
(Svar: $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$)
- 745.** I vilken likbent triangel är vinkeln mellan en av de lika sidorna och medianen till den andra så stor som möjligt?
(Svar: I den liksidiga)
- 746.** Bestäm vinkeln α så, att maximivärdet av funktionen

$$\frac{x^2 \cos \alpha + x \sin \alpha + \cos \alpha}{x^2 \sin \alpha - x \cos \alpha + \sin \alpha}$$

blir $\frac{1}{2}$.

(Svar: $\alpha = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$)

- 747.** Linjen $7x + y + 5 = 0$ är ena bissektrisen till vinklarna mellan linjen $4x - 3y + 10 = 0$ och en obekant linje, vars ekvation sökes.
(Svar: $3x + 4y - 5 = 0$)

Andra häftet

- 748.** På höjden mot sidan BC i den liksidiga triangeln ABC väljes punkten P inom triangeln så, att $\angle BPC = 180^\circ$. Sök exakta värdet på det förhållande, i vilket mittpunktsnormalen till AP delar omkretsen av den kring ABC omskrivna cirkeln. (X.)
- 749.** Vilken blir koefficienten för den term som innehåller x^n , när divisionen $(1+x)^{2n+1} : (1-x)$ utföres efter stigande digniteter? (n ett positivt helt tal) (X.)
- 750.** En rot till ekvationen $x^4 - 22x^2 - 48x = 23$ är r . Vilka värden har $r^3 - 3r^2 - 15r - 3$? (X.)

Enklare matematiska uppgifter

- 751.** Om x_1 är en rot till ekvationen $\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} = 3$, beräkna värdet av $(x_1 - 2)(x_1 - 3)$.
(Svar: 1 eller $-\frac{1}{3}$)

- 752.** För vilka värden på a är produkten av två rötter till ekvationen $x^4 + (a - 2)x^3 + (a - 1)x + a + 1 = 0$ lika med produkten av de båda andra rötterna?
(Svar: 3 och $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$)
- 753.** Visa, att i varje triangel ABC förhållandet $(r_b + r_c) : a$ är en trigonometrisk funktion av en av triangelns vinklar.
(Svar: $\cot \frac{A}{2}$)
- 754.** Lös ekvationen $\frac{1}{\sin 4x} + \frac{1}{\sin 2x} = \tan 4x - \tan x$.
(Svar: $\pm 18^\circ + n \cdot 180^\circ; \pm 54^\circ + n \cdot 180^\circ; \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$)
- 755.** Om sidorna i en triangel uppfylla villkoret $(b^2 - c^2)^2 = a^2(b^2 + c^2)$, så är skillnaden mellan två vinklar 90° .
- 756.** Kring en cirkel med diametern d är omskrivet ett likbent parallelltrapets. Avståndet mellan cirkelns kontaktpunkter med de icke-parallella sidorna är a . Visa, att trapetsets yta är $= \frac{d^2}{a}$.
- 757.** I en cirkel med ytan A är en regelbunden $2n$ -hörning med ytan B inskriven. Man sätter märke på ett hörn P och rullar sedan $2n$ -hörningen längs en rät linje l så, att hörn efter hörn tjänstgör som vridningscentrum. P börjar på l och rullningen fortsättes, tills P återkommit till l . Visa, att den yta, som inneslutes mellan P 's bana från begynnelse- till slutläget och linjen l är $2A + B$. Vad erhålles, om man låter n växa obegränsat?
(Svar: $3A$ (cykloid))
- 758.** Omkretsen av en regelbunden niohörning är O . Omkretsarna av de 9-hörningar, som de längsta, resp. kortaste diagonalerna i den ursprungliga 9-hörningen avgränsa äro O_1 och O_2 . Visa, att $O = O_1 + O_2$.
- 759.** Två cirklar tangera varandra utantill i A . En gemensam yttre tangent har kontaktpunkterna B och C . Figuren roterat kring central-linjen, varvid bågarne AB och AC alstra var sin kalott och BC manteln av en stympad kon. Visa, att denna mantelyta är = summan av kalottytorna.
- 760.** I en romb $ABCD$ med ledgångar i hörnen är sidan 8 längdenheter. Diagonalen AC ligger på y -axeln. Sidorna BC och DC gå genom punkterna $(2; 0)$ och $(-2; 0)$ resp. Hur långt från origo kan hörnet A avlägsna sig?
(Svar: $6\sqrt{3}$)
- 761.** Till kurvan $y = (x^2 - 1)(x - a)$ drages tangenten i punkten $(a; 0)$. Denna skär y -axeln i P . Bestäm a så, att P 's avstånd till origo blir

så stort som möjligt.

(Svar: $a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$)

762. I rektangeln $ABCD$ är $AB = 8$ cm och $BC = 3$ cm. Bestäm en punkt E på CD , så att kvoten $AE : BE$ blir så stor som möjligt.

(Svar: E ligger på förlängningen av CD ; $CE = 1$ cm. Maximiförhållandet är 3)

763. Parabeln $4y = 9 - 4x^2$ skär positiva x -axeln i P . Bestäm maximilängden av en korda genom P .

(Svar: $2\sqrt{2}$)

764. Hur långt avlägsnar sig kurvan $y(x^2 + 1) = x^3$ från sin asymptot?

(Svar: $\frac{\sqrt{2}}{4}$)

765. I triangeln ABC , där AB är av konstant längd, är $AC = n \cdot BC$. Bestäm maximivärdet av sinus för vinkeln A ; n är ett positivt tal > 1 .

(Svar: $\frac{1}{n}$)

Tredje häftet

766. Linjerna l , m och n bilda en triangel med hörnen på kurvan $y(x + 1) = x$. Sidorna råka x -axeln i L , M och N samt y -axeln i L_1 , M_1 och N_1 . Visa, att $LM : MN = L_1M_1 : M_1N_1$. (X.)

767. Beräkna summan av serien

$$\left(\frac{\sin^2 2\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 4\alpha}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2 8\alpha}{8}\right)^2 + \dots$$

(X.)

768. I pyramiden $PABC$ är $PA = a$, $PB = b$ och $PC = c$. Sidovinklarna i P äro alla 60° . Beräkna avståndet från P till tyngdpunkten för triangeln ABC (X.)

Enklare matematiska uppgifter

769. Lös ekvationen $\sin^6 x + \cos^6 x = \cos 2x$.

(Svar: $n \cdot 180^\circ$; $\pm 35,26^\circ + n \cdot 180^\circ$)

770. Lös ekvationen $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = 0,25$.

(Svar: $\pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$; $22,5^\circ + n \cdot 45^\circ$)

771. I en triangel ABC skär bissektrisen till vinkeln A sidan BC i D och medianen från A skär BC i E . $AD = DE = 4$ cm och $AE = 6$ cm. Bestäm triangelns sidor.

(Svar: $6\sqrt{12}$, $12\sqrt{12}$ och 24 cm)

- 772.** I den vid A rätvinkliga triangeln ABC raka bisektriserna till vinklarna B och C kateterna i resp. P och Q . Visa, att $\cot \angle BPQ = 2 + \tan \frac{B}{2}$.
- 773.** Ett rektangulärt papper, vars längd är 18 cm och bredd 12 cm vikes: ena gången så, att ett av papperets hörn faller på den ena kortsidans mittpunkt; andra gången så, att ett av papperets hörn faller på den ena långsidans mittpunkt. Beräkna längderna av de linjer, utefter vilka vikning skett.
(Svar: $4\sqrt{10}$ och $15\frac{5}{8}$ resp.)
- 774.** I triangeln ABC är $AB = AC$. På BC uppritas en med ABC likformig triangel BCD ; AD delar fyrhörningens $ABCD$ yta i förhållandet $1 : 2$. Sök vinkeln A .
(Svar: 90° eller $41,41^\circ$)
- 775.** I triangeln ABC är $\tan B \cdot \tan C = 2 \sin^2 A$. Visa, att $a^4 = b^4 + c^4$.
- 776.** I samma cirkel äro inskrivna en regelbunden 6-hörning, en regelbunden n -hörning och en regelbunden $2n$ -hörning. För vilka värden på n gäller, att $s_n^2 = s_6^2 + s_{2n}^2$?
(Svar: $n = 5$)
- 777.** Basytan i en pyramid med lika långa sidokanter är en rektangel. Kroppens kantvinklar ha storleken α , β och γ . Visa, att $\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = 0$, om α är den största kantvinkeln.
- 778.** Radien i ett klot A är 8 cm. Klotets volym delas i förhållandet $1 : 2$ av en klotyta B , som går genom A :s centrum. Beräkna radien i klotet B .
(Svar: 9 cm)
- 779.** En triangelns tyngdpunkt ligger i punkten $(1; 1)$. Ett hörn ligger på x -axeln, ett på y -axeln och det tredje på linjen $x + y = 11$. Ytan är 13,5 enheter. Angiv koordinaterna för det sistnämnda hörnet.
(Svar: $(4; 7)$; $(7; 4)$; $(10; 1)$; $(1; 10)$)
- 780.** Beräkna vinkeln mellan de två linjer som ekvationen $(x^2 + y^2) \sin \alpha + 2xy = 0$ representerar ($-90^\circ < \alpha < 90^\circ$).
(Svar: $90 \pm \alpha$)
- 781.** Till parabeln $y^2 = 2px$ dragas två tangenter. Visa, att ordinatan för deras skärningspunkt är medeltalet till kontaktpunkternas ordinata.
- 782.** Kurvan $y = a + bx - x^2$ skär x -axeln under 60° och y -axeln under 45° . Bestäm a och b .
(Svar: $a = \frac{1}{2}$; $b = 1$)

- 783.** En med x -axeln parallell linje skär kurvan $y = 5x^2 - x^4$ i ordning i A, B, C och D . Bestäm linjens ekvation, om $BC = \frac{AD}{3}$.
(Svar: $y = 2\frac{1}{4}$)
- 784.** På kurvan $y = x^3 + mx + p$ ligga tre punkter i rät linje. Bevisa, att summan av deras abskissor alltid är $= 0$.

Fjärde häftet

- 785.** Lös ekvationssystemet

$$\left. \begin{aligned} xy &= z^2 + z \\ xz &= y^2 + y \\ yz &= x^2 + x \end{aligned} \right\}$$

(C. H.)

- 786.** Vilken blir koefficienten för den term, som innehåller x^{n-1} , när divisionen $(1 - 2x)^n : (1 - x)^2$ utföres efter stigande digniteter? (n ett positivt helt tal).
(X.)
- 787.** Visa, att om r_1, r_2, r_3 och r_4 äro radier i fyra cirklar, av vilka var och en tangerar de tre övriga, så är under förutsättning att radien räknas negativ för en cirkel, som tangeras innantill av de tre övriga

$$\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4}\right) + \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_4}\right)^2 = 0.$$

(Stig Comét.)

Enklare matematiska uppgifter

- 788.** Lös ekvationssystemet

$$x + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = y + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3.$$

(Svar: Antingen äro alla tre $= 1$ eller två av de obekanta $= \frac{1}{3}$, den tredje $= -3$. Alla de obekanta kan även vara $= 2$)

- 789.** Om $b + c^2 = ac + 1$, så är produkten av två rötter $= 1$ i ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.
- 790.** På en sträcka uppritas åt samma håll, dels en kvadrat, dels en likbent triangel. Bestäm denna triangelns toppvinkel, då var och en av de trianglar, som sidorna utskära ur kvadraten, har samma yta som topptriangeln.
(Svar: $32,66^\circ$)

- 791.** Basen BC i triangeln ABC delas i tre lika delar, och delningspunkterna förenas med A . Visa, att $a^2 = \pm(b^2 - c^2)$, om mellantriangelns inskrivna cirkel är lika stor som en av yttertriangelnars.
- 792.** Visa, att $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \left(\frac{1}{a} - \frac{a}{b} + \frac{b}{c}\right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{a}{b} - \frac{b}{c}\right)$, om a , b och c bilda en aritmetisk serie med differensen 1.
- 793.** Sidan AC i triangeln ABC är diameter i en cirkel, som skär AB i D och BC i E . Visa, att $\triangle BDE = \triangle ABC \cdot \cos^2 B$.
- 794.** OA och OB äro två mot varandra vinkelräta radier i en cirkel. En med OB parallell linje skär OA i E , cirkeln i F och den genom B dragna tangenten i G . Figuren AEF har lika stor yta som figuren BFG . Bestäm vinkeln AOF .
(Svar: $38,25^\circ$)
- 795.** I en triangel drages två medianer. Dessa bilda med baserna vinklar, som äro lika med de triangelvinklar, från vars spets de äro dragna. Bestäm förhållandet mellan sidorna.
(Svar: $1 : \sqrt{2} : 2$ eller $1 : \sqrt{2} : \sqrt{2}$)
- 796.** I triangeln ABC är $\sin B \cdot \sin(45^\circ - C) + \sin C \cdot \sin(45^\circ - B) = 0$. Visa, att triangelns yta är lika med kvadraten på höjden mot sidan BC .
- 797.** Den räta vinkelns bissektriskorda i den kring en rätvinklig triangel omskrivna cirkeln delas av hypotenusan i förhållandet 3 : 5. Bestäm triangelns vinklar.
(Svar: $18,43^\circ$ och $71,57^\circ$)
- 798.** Lös ekvationen $\tan x(1 - \sin x)\left(1 - \tan \frac{x}{2}\right) = 2 \cos x \tan \frac{x}{2}$.
(Svar: $n \cdot 360^\circ$; $216,88^\circ + n \cdot 360^\circ$)
- 799.** I den likbenta triangeln ABC är basen BC konstant. Höjderna BD och CE råkas i O . Bestäm vinkeln A så, att ytan av triangeln BOE blir så stor som möjligt.
(Svar: $51,83^\circ$)
- 800.** När har höjdernas fotpunktstriangel i en likbent triangel med konstant bas sitt största ytvärde?
(Svar: Toppvinkeln = 45°)
- 801.** På AB som bas ritas två likbenta trianglar ABC och ABC_1 , den förra fast, den senare rörlig. Höjderna AD och AD_1 mot BC och BC_1 dragas. När blir triangeln BDD_1 så stor som möjligt?
(Svar: $\angle C_1 = \frac{1}{2} \cdot \angle C$)
- 802.** Under vilka vinklar råkass kurvorna $y = x^3 - 2x + 1$ och $y = x^3 - 2x^2 + 1$?
(Svar: 90° och $63,43^\circ$)

- 803.** En cirkel går genom punkten $(0; b)$ på y -axeln och de rörliga punkterna $(x; 0)$ och $(2x; 0)$ på x -axeln. Sök orten för cirkelns medelpunkt.
(Svar: Parabeln $8x^2 = 9b(2y - b)$)
- 804.** Angiv orten för en punkt, som rör sig så, att summan av dess avstånd till linjerna $bx - ay = 0$ och $bx + ay = ab$ är lika med avståndet från origo till $bx + ay = ab$.
(Svar: Delar av linjerna $x = 0$; $y = 0$; $x = a$; $y = b$)
- 805.** Sök längderna av två mot varandra vinkelräta brännpunktsradier till parabeln $y^2 = 4ax$, vilka förhålla sig till varandra som $1 : 2$.
(Svar: $5a$ och $10a$)
- 806.** En cirkel med medelpunkt på y -axeln tangerar cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ och hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Angiv ordinatan för tangeringspunkterna med hyperbeln.
(Svar: $2a$)
- 807.** En cirkel med medelpunkten på y -axeln tangerar hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ och skär cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ vinkelrätt. Visa, att cirkeln $x^2 + y^2 = 3a^2$ går genom tangeringspunkterna
- 808.** En rektangel $ABCD$ är given. På sidan AB som diameter ritas en cirkel. P är en rörlig punkt på cirkeln. Sök orten för mittpunkten av PD .
(Svar: En med den givna i skalan $1 : 2$ likställd cirkel)