Årgång 36, 1953

Första häftet

1848. Triangeln ABC är inskriven i cirkeln O, vars tangenter i B och C råkas i D. Sök sambandet mellan triangelns sidor, då punkterna A och D ligga lika långt från linjen BC. Vilka värden kan vinkeln A antaga? *(X.)*

1849. Symmedianerna i triangeln ABC skära sidorna BC, CA, AB i A_1, B_1, C_1. Att konstruera triangeln ABC så, att cirkeln $A_1B_1C_1$ tangerar sidan BC. (Symmedianen är orten för punkter, vilkas avstånd till två givna triangelsidor äro proportionella mot resp. sidor.) *(X.)*

1850. Bestäm en jämn femsiffrig heltalskvadrat, som är lika med dubbla produkten av de två tal, som bildas av kvadratens två första och tre sista siffror med bibehållen ordningsföljd. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

1851. En kvadrat inskrives i en cirkelsektor, så att två hörn falla på bågen, som härigenom delas i förhållandet $1:2:1$. Beräkna sektorns medelpunktsvinkel.
(Svar: $60°$.)

1852. Från en triangels hörn dragas linjer, som i samma led dela var och en av motstående sidor i förhållandet $m:n$. Dessa linjer begränsa en triangel. Bestäm förhållandet mellan dess yta och hela triangelns yta.
(Svar: $(m-n)^2:(m^2+mn+n^2)$.)

1853. En likbent triangel roterar ena gången kring basen, andra gången kring en av de lika sidorna. Totala ytorna av de därvid uppkomna rotationskropparna, tagna i nämnd ordning, förhålla sig som $9:5$. Hur förhålla sig kropparnas volymer till varandra?
(Svar: $3:2$.)

1854. I en regelbunden tresidig pyramid inskrives en annan dylik med spetsen i tyngdpunkten till den förstnämndas basyta och övriga hörn på de från spetsen utgående höjderna i sidoytorna. Den inskrivna pyramidens baskant och höjd samt den givnas baskant och höjd bilda i nämnd ordning en geometrisk serie. Bestäm kvoten.
(Svar: $\sqrt{3}$.)

1855. I en regelbunden tresidig pyramid är H höjdernas skärningspunkt, I och O de in- och omskrivna klotens medelpunkter. Bestäm vinkeln mellan basytan och sidoytorna, om I ligger mellan O och H

samt $HI : IO = 2 : 5$.
(Svar: 75,52°.)

1856. Från en fix punkt på en hyperbels asymptot drages en rörlig rät linje, som skär hyperbeln i A och B. Visa, att orten för mittpunkten på AB är en rät linje.

1857. Genom en punkt A på parabeln $y^2 = 4ax$ drages en tangent och parallellt med denna en linje l_1 genom fokus. En linje l_2 går genom A och $(-a; 0)$. Sök orten för skärningspunkten mellan l_1 och l_2, då l_1 vrider sig kring brännpunkten.
(Svar: $(x+a)^2 - y^2 = 4a^2$.)

1858. Vilken excentricitet har kurvan $x^2 + By^2 + 1 = 0$, om $2x + y = 3$ är en av dess normaler?
(Svar: $\sqrt{3}$ eller $\sqrt{15} : \sqrt{13}$.)

1859. Genom en punkt P drages linjer parallella med $17x - 9y + C_1 = 0$ och $19x - 3y + C_2 = 0$, tills de skära $49x + 7y + C_3 = 0$ i A resp. B. Beräkna $PA : PB$.
(Svar: $1 : 2$.)

1860. En linje l genom ena skärningspunkten A mellan cirklarna $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ och $x^2 + y^2 + 4x - 4 = 0$ skär cirklarna ytterligare i P och Q. Sök ekvationen för den cirkel mittpunkten av PQ genomlöper, då l vrider sig kring A.
(Svar: $x^2 + y^2 + x - 4 = 0$.)

Andra häftet

1861. Fyra punkter A, B, C, D äro givna på en cirkel. Bestäm punkten P i cirkelns plan så, att avstånden AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 från de givna punkterna till tyngdpunkterna för punktgrupperna P, B, C, D; P, C, D, A; P, D, A, B; P, A, B, C respektive bli sinsemellan lika. *(V. Thébault.)*

1862. Om man sätter

$$(-x-y-z)^n + (-x+y+z)^n + (x-y+z)^n + (x+y-z)^n = nP_n,$$

vilket samband råder mellan P_2, P_3 och P_5? *(X.)*

1863. Undersök hur många lösningar $0 \leq x < 2\pi$ det finns till ekvationen $a \sin x + b \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$ för olika värden på a och b.
Gör samma undersökning för ekvationen

$$a\sin^n x + b\cos^n x = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin^n 2x, \quad n = 2, 3, 4, \ldots.$$

(M. Tidemann.)

Enklare matematiska uppgifter

1864. Om i en aritmetisk serie $t_7^2 - 2t_5^2 + t_3^2 = 1$, vilket värde har $t_{70}^2 - 2t_{50}^2 + t_{30}^2$?
(Svar: 100.)

1865. Den stora Keopspyramiden, som numera är något stympad i toppen, är (i princip) uppbyggd av ett antal kvadratiska, på varandra liggande horisontella stenskikt, alla med samma tjocklek 1,25 m och av vilka det understa har sidan 230 m, det däröver sidan 228 m osv. med en minskning av 2 m för varje nytt skikt till det sista, vars sida är 10 m. Beräkna pyramidens höjd samt den sammanlagda yta, som är synlig från sidorna och toppen.
(Svar: Höjden 138,75 m, ytan 119 500 m^2.)

1866. Beräkna volymen av nyssnämnda pyramid.
(Svar: 2 567 800 m^3.)

1867. I en regelbunden tresidig pyramid är H höjden mot basytan, h höjden mot en sidoyta och n kortaste avståndet mellan två motstående kanter. Visa, att $1 : n^2 - 1 : h^2 = 1 : 3H^2$.

1868. Tangenten i punkten A på kurvan $y = x^3 + px^2 + qx + r$ är parallell med x-axeln och skär kurvan i B. Om tangenten i B är vinkelrät mot tangenten i kurvans centrum, vilka äro då de spetsiga vinklarna i den av dessa tre tangenter bildade triangeln?
(Svar: 30° och 60°.)

1869. Tre givna linjer bilda en triangel med ytan T. Den omskrivna cirkelns radie är R. Man väljer en punkt P på en av linjerna och fäller normalerna PU och PV mot de bägge återstående. Sök minimum för fotpunkternas avstånd UV.
(Svar: $T : R$.)

1870. Två räta linjer med de variabla vinkelkoefficienterna k och $2k$ vrida sig kring punkterna $A\,(0; 1)$ resp. $B\,(1; 0)$. Linjerna skära varandra i punkten C. Uttryck ytan (y) av triangeln ABC som funktion av k och undersök, hur denna varierar.
(Svar: $y = |k + 1{,}5 + 1 : 2k|$)

k	$-\infty$	$\rightarrow$	-1	$\rightarrow$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\rightarrow$	$-\frac{1}{2}$	$\rightarrow$	0	$\rightarrow$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\rightarrow$	∞
y	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1{,}5-\sqrt{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	∞	$\searrow$	$1{,}5+\sqrt{2}$	$\nearrow$	∞

1871. Ur en sfär med radien r utskäres en oktant av tre mot varandra vinkelräta plan genom medelpunkten O. De radier som äro kantlinjer i oktanten, kallas OA, OB och OC. I denna inskrives en tresidig pyramid $DEFG$, så att D och E äro mittpunkter på OA och OB. Hörnet F ligger på OC och G på den buktiga ytan så, att OG är vinkelrät mot planet DEF. Uttryck pyramidens volym (= y) som funktion av den vinkel x som planet DEF bildar med AOB och studera funktionen.
(Svar: $y = R^3\sqrt{2}\left(\sqrt{8} - \sin x\right) : 96\cos x$; $y_{\min} = R^3\sqrt{14} : 96$ för $x = 20{,}70°$. Gränsmaximima $R^3 : 24$ och $R^3 : 12$ för $x = 0$ resp. $70{,}53°$.)

1872. De normaler till kurvan $y = x^2 + a$, som bilda 45° med positiva resp. negativa x-axeln, skära varandra i punkten A samt x-axeln i B och C. Bestäm a, så att ytan av triangeln ABC blir en ytenhet.
(Svar: $\frac{1}{4}$ eller $-1\frac{3}{4}$.)

1873. Linjerna $x - 2y = 0$ och $x - 2y + 4 = 0$ skäras i första kvadranten av en rät linje, som med dessa och axlarna bildar två trianglar och ett parallelltrapets, alla lika stora. Sök linjens ekvation.
(Svar: $x + y - 2\sqrt{2} - 4 = 0$.)

1874. En rät linje genom punkten $(-2; 0)$ skär kurvan $y = x^2$, så att den uppkomna kordan är lika lång som den mellan koordinataxlarna belägna delen av den räta linjen. Sök dennas riktningsvinkel.
(Svar: 25,27° eller 96,73°.)

1875. Skillnaden mellan två hela tal är a; det ena är ett primtal p. Subtraheras detta från det andra talets kvadrat, erhålles ett kvadrattal. Angiv talen som funktioner av p samt sambandet mellan a och p.
(Svar: p och $\frac{1}{2}(p+1)$; $p = 2a + 1$.)

Tredje häftet

1876. Sidoytorna BCD, CDA, DAB, ABC i en tetraeder T ha tyngdpunkterna A_1, B_1, C_1 D_1 resp. Tetraederns tyngdpunkt är G. På analogt sätt äro A_2, B_2, C_2, D_2 tyngdpunkter för sidoytorna i tetraedern $A_1B_1C_1D_1 \ldots$; A_n, B_n, C_n, D_n tyngdpunkterna för sidoytorna i tetraedern $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$. Om P är en godtycklig punkt, skall likheten $PA_n^2 + PB_n^2 + PC_n^2 + PD_n^2 = 4PG^2 + S : 4\cdot 9^n$ bevisas, där S är summan av kanternas kvadrater i tetraedern T. *(V. Thébault.)*

1877. Sidorna BC, AC, AB i en triangel ABC äro baser i tre likbenta likformiga trianglar med spetsarna A_1, B_1, C_1. De två sista äro båda vända utåt (inåt), den första inåt (utåt). Visa, att punkterna A, A_1, B_1, C_1 i allmänhet äro hörn i en parallellogram. *(X.)*

1878. Beräkna $\binom{n}{0} + \binom{n}{3} + \binom{n}{6} + \binom{n}{9} + \cdots$ och $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \cdots$. *(I. Gunsjö.)*

Enklare matematiska uppgifter

1879. Lös ekvationssystemet $x^2 + y^2 = 5$; $x^3 + y^3 = 9$.
(Svar: x-rötter 1; 2; 2,111; −0,738 och y-rötter 2; 1; −0,738; 2,111.)

1880. Lös ekvationen $\sin x \tan^n x + \cos x \cot^n x = \sin x + \cos x$.
(Svar: $45° + m \cdot 90°$.)

1881. Trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$ äro rätvinkliga vid C och C_1. Beräkna sidorna om $A_1B_1 - A_1C_1 = AB - AC = 1$ cm; $B_1C_1 - BC = 10$ cm; $A_1C_1 - AC = 100$ cm.
(Svar: 5, 12 och 13 cm och 15, 112 och 113 cm.)

1882. Talen $a + b$, ab, $1 : a + 1 : b$ och $1 : ab$ bilda i denna ordning en (egentlig) aritmetisk serie. Bestäm seriens summa.
(Svar: $2 + \sqrt{32}$ eller $2 - \sqrt{32}$.)

1883. I en triangel är med vanliga beteckningar $a^2+b^2 = 5c^2$ och $T = \frac{3}{8}a^2$. Beräkna vinklarna.
(Svar: 40,60°; 108,44°; 30,96°.)

1884. I en cirkel med radien r drages en korda på avståndet $\frac{1}{3}r$ från medelpunkten. I det större av de uppkomna segmenten inskrives en likbent triangel med kordan som bas. I triangeln inskrives en cirkel; i denna drages en korda på samma sätt, varpå i det större segmentet en ny likbent triangel inskrives och i denna cirkel osv i oändlighet. Bestäm summan av cirklarnas ytor, den första inräknad.
(Svar: $9\pi r^2\left(8\sqrt{3} + 7\right) : 143$.)

1885. I en tresidig pyramid är varje baskant a och varje sidokant b. Bestäm avståndet mellan motstående kanter.
(Svar: $a\sqrt{3b^2 - a^2} : 2b$.)

1886. Genom punkten $A(2; 4)$ på kurvan $y = x^2$ drages en korda, som skär kurvan i B. Punkterna A och B sammanbindas med origo O. Angiv, hur ytan av triangeln ABO varierar, då vinkelkoefficienten för kordan AB ändras. Åskådliggör variationerna i ett diagram.
(Svar: Ytan = $|k^2 - 6k + 8|$.)

1887. A och B äro två punkter på kurvan $y = x^2$. Abskissan för A är $2a$ enheter större än abskissan för B. Kurvans tangenter i A och B råkas i C. Visa, att ytan av triangeln ABC är $2a^3$.

1888. Till kurvan $y = x^n - ax^{n-1}$, där n är ett helt tal > 2, drages normalen till kurvan i dess utanför origo belägna skärningspunkt med x-axeln. Beräkna ytan av den triangel, som bildas av normalen och koordinataxlarna. För vilket n-värde är ytan oberoende av den positiva parametern a?
(Svar: Ytan är $\frac{1}{2} \cdot a^{n-3}$; för $n = 3$.)

1889. I parabeln $y^2 = 2x$ drages två kordor, som med varandra bilda 45°. Undersök, hur avståndet mellan de mot dessa kordor svarande diametrarna varierar, då den ena kordans vinkelkoefficient ändras.
(Svar: Avståndet $= |(k^2+1):(k^2-k)|$.)

1900. Cirklarna $x^2+y^2-4x+2y-11=0$ och $x^2+y^2-8x-6y+a=0$ äro givna. Bestäm a så, att cirklarnas medelpunkter och skärningspunkter med varandra ligga på en cirkel. Angiv dennas ekvation.
(Svar: $a=21$; $x^2+y^2-6x-2y+5=0$.)

1901. Beräkna
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x\sin x-2\cos x+2}{2x^2-2x\sin 2x-\cos 2x+1}.$$
(Svar: $\frac{1}{8}$. – Om $f(x)=ax^n+$ högre termer, så är $\lim_{x\to 0} 2f(x):f(2x) = 2^{1-n}$.)

Fjärde häftet

1902. Den vid sidan BC i triangeln ABC vidskrivna cirkeln tangerar denna sida i A_1 och förlängningarna av de övriga sidorna i B_1 och C_1. Man vet, att linjerna AA_1, BB_1, CC_1 råkas i samma punkt, som antages ligga på den omskrivna cirkeln. Visa, att $\cos A = \cos B + \cos C$ och att $R = r_a =$ längden av resp. cirklars gemensamma korda.
(V. Thébault.)

1903. Givna äro linjen l och två punkter P och Q i samma plan, båda utanför l. Genom punkten U på l drages i detta plan linjen u så, att vinklarna (u, UP) och (l, UQ) ha gemensamma bissektriser. Sök enveloppen för u, då U genomlöper l. *(X.)*

1904. Diskutera antalet reella rötter till ekvationen $x^3+1:x^3 = a^3-3a$.
(X.)

Enklare matematiska uppgifter

1905. Ekvationen $x^3+9x-6=0$ har en reell rot mellan 0 och 1. Bestäm den, med tre säkra decimaler genom att först försumma x^3 i jämförelse med $9x$, varvid erhålles ett närmevärde x_1, vilket insättes i x^3-termen i ekvationen, varefter ett nytt närmevärde x_2 erhålles, som insättes i stället för x i x^3-termen osv., (iterationsmetoden).
(Svar: $x = 0,638$.)

1906. Beräkna med tre säkra decimaler den reella roten till ekvationen $f(x)=x^3+9x-6=0$ genom att i den punkt, vars abskissa är $=1$

draga en tangent till kurvan $y = f(x)$. Tangentens intercept x_1 på x-axeln beräknas. I punkten $(x_1; y_1)$ på kurvan drages en ny tangent, vars intercept x_2 på x-axeln beräknas. I punkten $(x_2; y_2)$ på kurvan drages en tredje tangent osv. $x_1, x_2, x_3 \ldots$ är allt noggrannare närmevärden på den sökta roten. (Newtons approximationsmetod).
(Svar: $x = 0,638$.)

1907. Lös ekvationen $1 + \tan x = 2\cos 2x$.
(Svar: $135° + n \cdot 180°$; $22{,}5° + n \cdot 90°$.)

1908. I den likbenta triangeln ABC är BC basen och M basens mittpunkt. Bissektrisen till vinkeln B skär sidan AC i punkten V. Hur stora äro basvinklarna, om linjen MV är vinkelrät mot sidan AC?
(Svar: 38,66°.)

1909. I en rätvinklig triangel går den inskrivna cirkeln genom triangelns tyngdpunkt. Beräkna triangelns spetsiga vinklar.
(Svar: 22,80° och 67,20°.)

1910. I fyrhörningen $ABCD$, där AB är parallell med CD, gäller för sidornas längder, att $AB : BC : CD : DA = 2 : 3 : 5 : 2$. Hur stor del av detta trapets utgör den fyrhörning, som begränsas av bissektriserna till trapetsets vinklar?
(Svar: $\frac{5}{56}$.)

1911. Från mittpunkten M på sidan BC i triangeln ABC fällas normalerna MB_1 och MC_1, mot sidorna AC och BC. Bestäm triangelns vinklar, om den kring triangeln omskrivna cirkelns centrum O ligger på B_1C_1 och $B_1O : OC_1 = 4 : 1$.
(Svar: $A = 69{,}46°$; $B = 29{,}59°$; $C = 80{,}95°$.)

1912. Beräkna

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt[3]{3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 16}}{\sqrt[4]{x^5 - 9x^4 + 32x^3 - 56x^2 + 48x - 16}}$$

(Svar: +2 från höger, −2 från vänster)

1913. Undersök funktionen $y = x^2 + \sqrt{28 - 7x^2}$ med avseende på existensområden, maxima och minima samt upprita motsvarande kurva.
(Svar: $-2 \le x \le 2$; $y_{\max} = 5{,}75$ för $x = \pm 1{,}5$; $y_{\min} = \sqrt{28}$ för $x = 0$ och gränsmin. 4 för $x = \pm 2$.)

1914. Från en punkt P på en given cirkel med radien r dragas två tangenter till en mindre, med den förra koncentrisk cirkel. Tangeringspunkterna äro A och B; PA och PB skära förlängda den förra cirkeln i C och D. Hur stor är den mindre cirkelns radie, då ytorna av trianglarna PAB och PCD äro så stora som möjligt?
(Svar: $\frac{1}{2}r$.)

1915. Yvå oändliga, konvergenta geometriska serier med samma summa äro så beskaffade att kvoten i vilken som helst av dem är lika stor som första termen i den andra. Genom att dividera varje term i den ena serien med motsvarande term i den andra erhålles en ny oändlig konvergent serie. Sök minimum för summan av den nya serien.

(Svar: 4.)