

Årgång 74, 1991

Första häftet

Matematiska uppgifter

3620. a) Om varje bokstav står för en viss siffra, vad är då

$$FEM \cdot FEM = TJUFEM?$$

(Siffersumman i $TJUFEM$ är faktiskt 25.)

- b) I nedanstående additioner står varje bokstav för en viss siffra. Vilka är talen?

$$\begin{array}{r} TRE \\ +TRE \\ \hline SEX \end{array} ; \quad \begin{array}{r} TRE \\ +SEX \\ \hline NIE \end{array}$$

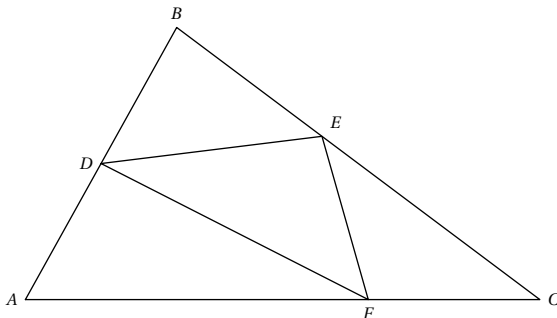
(Ursäkta talspråksstavningarna!)

3621. Lös ekvationen

$$x + \frac{1}{x + \frac{1}{1+y+z}} = \frac{22}{9}$$

i naturliga tal x, y, z .

3622. I triangeln ABC delar punkten D sidan AB mitt itu, punkten E sidan BC i förhållandet $2:3$ och punkten F sidan AC i förhållandet $2:1$. Vilken area har triangeln DEF om triangeln ABC har arean 1?



3623. Förenkla uttrycket

$$\sqrt{(3+x)(1+x)} + \sqrt{(3+x)(1-x)} + \sqrt{(3-x)(1+x)} + \sqrt{(3-x)(1-x)},$$

samt ange det exakta värdet för $x = \sqrt{\frac{5}{6}}$ på så enkel form som möjligt.

- 3624.** Låt a , b och c vara positiva heltal med $a < b < c$. Visa att $2(bc - a^2) \geq 3a + 2b + c$. När gäller likhet?
- 3625.** Tio reella tal har egenskapen att om man tar ut tre tal på alla möjliga sätt och summerar blir fem av summorna negativa och resten positiva. Visa att summan av de tio talen är positiv.
- 3626.** I en rätvinklig triangel är höjden mot hypotenusan 60 cm. Triangelns omkrets är 390 cm. Beräkna triangelns sidor.
- 3627.** Lille Frodo har i slöjden tillverkat ett sk solitärspel bestående av ett kvadratisk bräde med 5×5 rutor samt 24 brickor. När spelet börjar finns det en bricka i varje ruta utom den mittersta. Det är i varje drag tillåtet att flytta en bricka genom hopp över en angränsande brickförsedd ruta till nästa ruta, förutsatt att den senare är tom. Den överhoppade brickan tas bort. Spelet går ut på att om möjligt avlägsna alla brickor utom en. Frodo försöker ett stort antal gånger utan att lyckas och undrar om uppgiften är omöjlig. Storasyter Arven griper då in. Hon tar en penna och skriver en siffra i varje ruta. I första raden skriver hon 1, 2, 3, 1, 2 och fortsätter i nästa rad med 3, 1, 2, 3, 1 osv tills brädet är fullt. Just då kommer Arven på att hon måste rusa till bussen. Frodo tittar uppgivet på siffrorna. Vad menade Arven egentligen? Kan du hjälpa honom? Är det möjligt att genomföra spelet så att bara en bricka återstår?
- 3628.**
- De första talen i en växande oändlig heltalsföljd är 2, 4, 6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48. Vad bör nästa tal i följd vara?
 - Låt x vara ett stort positivt tal. Bestäm en enkel formel (en funktion av x), som approximativt anger antalet tal i följd som är mindre än x .
- 3629.** En stockholmare med mycket dåligt minne vill besöka Uppsala, Nyköping och Mariefred. Varje söndag väljer han slumpmässigt en av de tre städerna och reser dit. Detta upprepas flera gånger. Efter hur många söndagar i medeltal har han besökt alla tre städerna?

Andra häftet

Matematiska uppgifter

- 3630.** Lille Timon har fått två timglas av olika storlek i födelsedagspresent. I det större tar det sju minuter för sanden att rinna igenom och i det mindre går det på fyra minuter. Vi antar att rinnhastigheten är konstant oavsett riktning. När Timon ska äta frukost vill han att

ägget ska koka exakt nio minuter. Hur ska han ordna det med hjälp av timglasen?

- 3631.** För talföljden t_1, t_2, \dots, t_n gäller att $t_k \cdot (2k - 3) = t_{k-1} \cdot (2k - 1)$, $k = 2, 3, \dots, n$, och $t_n = n$. Bestäm talföljden om summan av talen är $52\frac{12}{19}$.
- 3632.** På den lilla bankens kassaskåp hade kassören skrivit följande fyra tal på en lapp: 5432, 4122, 3435, 5425. För att öppna skåpet krävdes nämligen tillgång till en fysisiffrig kod, och som stöd för minnet hade han därför bildat fyra tal genom att byta ut två siffror i koden (i varje tal stod alltså exakt två siffror i rätt position).
- Hur såg den korrekta koden ut?
 - Veckan därpå ändrades koden. Kassören lät dock lappen sitta kvar eftersom tre av talen fortfarande hade två siffror i rätt position medan det fjärde hade en siffra rätt. Vilken var nu den aktuella koden?
- 3633.** Lös olikheten $\left| x - \frac{1}{x} \right| < 2$ i reella tal x .
- 3634.** Viktoria har en balansvåg i enkelt utförande (en balanserad jämntjock stång med vågskålar i ändarna). Häromdagen föll vågen i golvet varvid en stor bit av den ena vågskålen gick av. Naturligtvis ändrades också inställningen. Viktoria undrar nu om vågen fortfarande går att använda. Om hon placerar en 25 g-vikt i den vänstra vågskålen måste hon lägga en 40 g-vikt i den högra för att få jämvikt. Om 25 g-vikten i stället läggs i högerskålen räcker det med 12,5 g för att uppnå balans. När hon sedan lägger sitt silverarmband jämte en 10 g-vikt i den vänstra skålen behövs det exakt 100 g i den högra skålen för jämvikt. Hur mycket väger silverarmbandet?
- 3635.** Uppdela nedanstående polynom i faktorer så att varje faktor är ett polynom med heltalskoefficienter.
- $1 + a^4 + a^5$,
 - $1 + a^7 + a^8$,
 - $1 + a^5 + a^6 + a^7$.
- 3636.** Triangeln ABC är inskriven i en cirkel. Från hörnet A dras såväl cirkelns diameter som normalen till sidan BC (eller dess förlängning). Visa att bisektrisen till vinkeln BAC också är bisektris till vinkeln som bildas i A mellan diametern och normalen.
- 3637.** Ett positivt heltal m säges vara ett triangeltal om $m = 1 + 2 + \dots + n$ för något heltal n .
- Visa att $8m + 1$ är en heltalskvadrat för varje triangeltal m .
 - Antag att en heltalskvadrat har formen $8k + 1$, k heltal. Måste k vara ett triangeltal?

- 3638.** Tre personer står vid var sitt hörn av en triangel. Var och en går, oberoende av de andra, till ett av de två andra hörnen, valt på måfå. Denna vandring upprepas flera gånger. Bestäm sannolikheten att efter n vandringar varje person står vid sitt utgångsläge. Bestäm också gränsvärdet för denna sannolikhet då n går mot oändligheten.
- 3639.** På en ö finns det tre gifta par. Varje par består av en jägare och en jordbrukare. Jaktdepartementet har delat ön i tre jaktområden med samma area A . Oberoende av detta har jordbruksdepartementet delat ön i tre jordbruksområden likaså med samma area A . Familjedepartementet insisterar på att jakt- och jordbruksområdena ska ligga nära varandra för varje par. Markdistributionsdepartementet tar fasta på detta krav och lyckas se till att de båda områdena som varje familj förfogar över faktiskt överlappar varandra. Visa att det finns ett tal $d > 0$ sådant att varje familj kan garanteras en överlappning mellan områdena med arean $\geq d \cdot A$. Bestäm största möjliga värdet på d .

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

- 3640.** Bestäm antalet tresiffriga heltal med följande egenskaper: Inga nollor ingår och en av siffrorna utgör summan av de båda andra. Hur förändras svaret om vi tillåter nollor?
- 3641.** Edvarda brukar tanka sin bil hos herr Mack, som är speciell såtillvida att han tillåter tiokronorsavrundning (om beloppet är 164,99 kr t ex får man betala 160 kr, medan 165,00 kr avrundas till 170 kr). Hur mycket bensin som fyllts på får kunden veta först vid betalningen. Bensinmängden avrundas till närmaste heltal i liter räknat.
- Under den senaste månaden har Edvarda betalat 210 kr för 32 l, 150 kr för 24 l och 240 kr för 38 l. Vid dagens besök har hon fyllt på 43 l. Hur mycket ska hon betala? Vi förutsätter att bensinpriset har varit oförändrat under den aktuella perioden.
- 3642.** Anne och Elisabet brukar löpträna på en sluten löparbana. De startar en dag från samma punkt men springer i olika riktningar och möts då efter varje hel minut. När Anne sprungit 10 varv har Elisabet 50 sekunders löpning kvar innan hon fullbordat sitt 7:e varv. Nästa dag startar de åter från samma punkt, men nu springer

då åt samma håll. När kommer Anne att varva Elisabet för första gången?

- 3643.** Kalle studerar följande matchresultat och seritabell i tidningen:
AIF-BIF 3-2

	V	O	F	M	P
AIF	2	1	0	9-3	7
BIF	1	1	1	8-5	4
CIF	1	1	1	2-5	4
DIF	0	1	2	2-8	1

Han försöker räkna ut hur de övriga matcherna har gått. Detta misslyckas han med tills han i tidningen ser att ingen match har slutat mållös. Hur slutade de fem andra matcherna? (V=vunna, O=oavgjorda, F=förlorade, M=målskillnad, P=poäng.)

- 3644.** Lös ekvationen $e^x - x = 9a$, där $a = 222212222 \cdot 10^{-8}$. Resultatet leder till ett enkelt, om än inte exakt, samband mellan de båda storheterna.

- 3645.** Artur, Erik, Gustav, Harry och Josef har deltagit i en stor matematiktävling. Var och en känner till den egna placeringen. För övrigt är de okunniga om varandras resultat med ett undantag. Artur har lyckats lista ut att Gustav placerade sig två platser före Josef. Artur konstaterar: "Om vi förutsätter att Erik inte vann, kan jag utan ytterligare information ange placeringen för var och en av oss."

Vi kan avslöja att Arturs förmodan angående Erik var helt korrekt. Hur såg prislistan ut?

- 3646.** Lotten, Clara, Gusten och Norman står redo att ta ekan från Kymmendö till bryggdansen på Ornö. Tyvärr finns det inte plats i ekan för fler än två i taget. Om Norman rör ensam klarar han överfarten på 6 minuter, Gusten behöver 7, Clara 9 och Lotten 10 minuter. Tiderna är desamma vid resa i motsatt riktning. När två personer sitter i ekan är det den långsammare som bestämmer takten. Exempelvis tar det 9 minuter för Gusten och Clara att ro över till Ornö. Efter hur lång tid kan man i bästa fall räkna med att de fyra befinner sig på Ornö om ur- och istigningstider är försumbara?

- 3647.** Förenkla summan

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2 \cdot (n+2)} + \frac{1}{3 \cdot (n+3)} + \dots$$

för $n = 1, 2, \dots$. För vilka värden på n är $S_n > \frac{1}{2}$?

- 3648.** En likbent triangel ABC med $AB = AC$ är inskriven i en cirkel. Diametern genom A skär sidan BC i D . Trianglarna ACD och ABD har areorna 10 och 16 cm^2 resp. Beräkna cirkelns radie.
- 3649.** Vid en middag för sex gifta par placeras personerna slumpmässigt vid tre bord för fyra, dock så att det blir två damer vid varje bord. Beräkna sannolikheten att inget gift par hamnar vid samma bord.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

- 3650.** Nilla tänker göra en kalender av fem träkuber som placerade i rad på bordet ska ange dagens datum. På två av kuberna ska man kunna avläsa datumsiffrorna och på de tre övriga inledningsbokstäverna i månadsnamnet, t ex

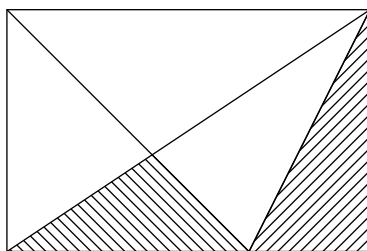
2	4
---	---

d	e	c
---	---	---

. Hur ska Nilla fördela siffror och bokstäver över kubernas sidor så att alla datumkombinationer blir möjliga?

Observera att t ex 7:e dagen i en månad noteras 07, att vi använder små bokstäver samt att vissa dubblingar är nödvändiga: exempelvis kan "u" också användas som "n".

- 3651.** En pojke ställer upp en 10-pyramid på vanligt sätt (triangulär botten med $1 + 2 + 3$). Han funderar: Om jag hade 1000 kulor, hur stor är den största pyramid som jag då kunde ställa upp? Hjälps honom att besvara frågan.



- 3652.** Rektangeln i figuren är indelad i trianglar. De streckade trianglarna har vardera arean 1.

Beräkna rektangelns area.

- 3653.** Lös ekvationen $\sin^8 x + \frac{5}{16} = \cos^8 x$ för $0 \leq x \leq 360^\circ$.

- 3654.** Matematiklärarna Abel och Sonja har under dagen suttit och rättat prov. De hade lika många skrivningar när de startade kl 9.00, och de rättade med samma hastighet, en skrivning var femte minut. Trots detta blev de inte färdiga samtidigt, ty varje gång som Abel rättat två skrivningar smusslade han över ett orättat prov till kollegan. När det var 25 minuter kvar till lunch konstaterade Abel förnöjt att Sonja hade dubbelt så många orättade skrivningar som han själv och vid lunchtid hade Sonja 2,5 gånger så många. När började lunchen och hur många skrivningar återstod då att rätta?
- 3655.** Heltalen a , b och c är givna. Låt S beteckna summan och P produkten av de tre talen. Följande villkor gäller:

$$a \leq P \leq b,$$

$$S^2 < P < 100 \cdot S.$$

Bestäm a , b och c .

- 3656.** Två cirklar, C_1 och C_2 , med samma radie skär varandra i punkterna E och F . Punkterna A , B och D utgör hörn i en triangel, där A och B ligger på C_1 , medan D ligger på C_2 . Punkten E ligger på sidan BD och punkten F på sidan AD . Vidare gäller att $|BE| = 1$, $|ED| = \sqrt{3}$ samt att vinkeln BDA är 45° .
Beräkna cirkelarnas radie och avståndet mellan medelpunkterna.
- 3657.** Ett släckarlag ska ensamt släcka N brinnande oljekällor. Det tar T_k dygn att släcka källa nummer k . Denna tid betraktas som känd för varje källa. För källa k går O_k liter olja per dygn upp i rök så länge den brinner. I vilken ordning bör källorna släckas för att mängden förlorad olja ska bli så liten som möjligt?

Numeriskt exempel: $N = 5$

k	1	2	3	4	5
T_k	3	5	8	10	12
O_k	4	5	12	8	10

(O_k är angivet i 10000-tal liter).

- 3658.** Låt n personer numrerade från 1 till n stå ordnade i en cirkel. Från person 1 räknat eliminerar vi var tredje person tills bara en person återstår. Kalla ordningsnumret för denna person $J(n)$. Låt $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ vara de heltal för vilka $J(n) \leq 2$.
a) Visa rekursionsformlerna

$$n_{k+1} = n_k + \left\lceil \frac{n_k - J(n_k)}{2} \right\rceil + 1$$

([] anger heltalsdelen) och

$$J(n_{k+1}) = J(n_k) - 3n_k + 2n_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

b) Visa att det finns oändligt många n för vilka $J(n) = 1$.

3659. För tredjegrads ekvationen i x

$$1 - x + acx^2 + abcx^3 = 0$$

gäller att de reella konstanterna a , b och c uppfyller villkoren $0 < a, b, c < 1$, och

$$a + b + c = 1.$$

Visa att ekvationen har tre reella rötter x_1 , x_2 och x_3 där $x_1 < x_2 < x_3$. Visa att $1 < x_2 < 2$, $x_3 > 2$, $x_1 \leq -7$.