

Årgång 85, 2002

Första häftet

4060. Dorotea, Fredrika, Nora och Ulrika har tillsammans 117 glaskulor. Uppgifterna om hur många kulor var och en äger är ytterst knapphändig. Man vet dock att Dorotea har flest kulor och Ulrika det minsta antalet. Fredrika har fler kulor än Nora. Vidare vet man att någon av flickorna har 30% fler kulor än en av de övriga, men vilka dessa båda är vet man inte. Man vet också att någon av flickorna har 40% fler kulor än en av de övriga, samt att någon har 50% fler kulor än en av de övriga. Hur många kulor har var och en?

4061. Om x_1, x_2, \dots, x_7 är tal som uppfyller

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1, \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12, \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123, \end{cases}$$

vilket värde har då

$$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7?$$

4062. Här kommer en uppgift från 1868 given i *Tidskrift för Matematik och Fysik* och som påminner om uppgift 4050 i föregående nummer:

Upprita en kvadrat, vars sidor, förlängda om så behövs, går genom var sin av fyra givna punkter. (Problemet bör fullständigt diskuteras.)

Skicka gärna in lösningsförslag!

4063. Bestäm (helst utan användning av derivator) det minsta reella värdet polynomet

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 8$$

kan anta, samt ange för vilket x -värde (eller vilka x -värden) som detta sker.

4064. En mattaffär har skänkt en matta till klubbbrummet hos en idrottsförening. Mattan ligger på rulle och är en meter bred. Rummet är rektangulärt med dimensionen 3×4 meter. Mattaffärens ägare ställer följande villkor: mattan skärs till så att mattan kan läggas ut i rummet utan att vikas. Vidare måste mattan vara rektangulär. Klubbens medlemmar funderar över hur mattan ska läggas för

att få en med maximal längd. Om man lägger mattan längs en av långsidorna får man förstås plats med en matta av längden 4 m. Men kassören menar att om man lägger den på snedden borde det gå att få plats med en längre matta. Stämmer detta? Vad blir maximilängden?

- 4065.** Eva och Per har valt ut varsitt tresiffrigt tal, som kunde vara antingen en kvadrat eller ett triangeltal. När de berättade vilka de två sista siffrorna var kunde jag se att Eva valt antingen ett bestämt triangeltal eller en bestämd kvadrat, men för Pers del kunde det vara ett av två triangeltal eller två kvadrater. När jag då fick veta att siffersumman av Evas tal var precis lika stor som siffersumman av Pers tal visste jag vilka tal de valt. Vilka var talen?
- 4066.** Följande problem är välkänt. Betrakta skolklasser med 23 elever. I hur stor andel av dessa klasser är det minst två elever som delar födelsedag? Det överraskande svaret är att nämnda händelse inträffar i ungefär hälften av klasserna. Visa detta! Låt oss spinna vidare på födelsedagsproblemet. Betrakta skolor med 1 000 elever. Varje dag som någon elev fyller år hissar man flaggan. Vad är det genomsnittliga antalet dagar som det *inte* kommer att hissas någon födelsedagsflagga? Vi antar för enkelhets skull att födelsefrekvensen är densamma årets alla dagar.
- 4067.** Visa att ett godtyckligt tal t skrivet i ett talsystem med basen b , där $b > 2$, är delbart med $b - 1$ om och endast om siffersumman i talet t är jämnt delbar med $b - 1$.
- 4068.** En kvadrat är uppdelad i ett godtyckligt antal rektanglar, vars sidor är parallella med kvadratens sidor. Vi bestämmer kvoten mellan den kortare och den längre sidan i varje rektangel. Visa att summan av alla delrektanglarnas kvoter alltid är minst 1. För vilken rektangeluppdelning har vi likhet?
- 4069.** Låt oss återvända till klubbbrummet i uppgift 4064. Kassörens tvååriga dotter Petra målar på måfå fem punkter på golvet. Visa att det säkert finns två punkter som befinner sig på ett avstånd som inte överstiger 2,5 m. Petra målar så en sjätte punkt på golvet. Visa att det nu måste finnas två punkter på ett avstånd som inte överstiger $\sqrt{5}$ m.

Andra häftet

- 4070.** En kortlek innehåller tusen kort numrerade från 1 till 1000. Låt oss plocka bort vartannat kort så att enbart kort med udda tal

finns kvar. Vi plockar därefter bort vart tredje kort ur denna hög. Nu återstår kort med numren 1, 3, 7, 9, 13, 15, 19, 21, osv. Ur den högen tar vi bort vart fjärde kort: vi plockar bort nr 19, 21, osv.

Därefter börjar vi om från början med en ny runda, där vi samlar bort vartannat, vart tredje och vart fjärde kort av de kort som återstår i den aktuella delrundan. Varje runda består således av tre delrundor.

På detta sätt fortsätter vi runda efter runda tills bara kort nr 1 och ytterligare ett kort återstår.

Efter hur många rundor och delrundor inträffar detta? Vilket kort är det som till sist återstår (utöver nr 1)? Finns det något mönster efter vilket korten i de skilda delrundorna sällas bort?

- 4071.** Bestäm de tre första siffrorna och totala antalet siffror i talet $9^{(9^9)}$. Utför samma uppgift för talet $(9^9)^9$. Hur tolkar man normalt 9^{9^9} om man inte anger några parenteser?
- 4072.** På var och en av sidorna i en enhetskvadrat väljs en punkt. De fyra punkterna utgör hörn i firsiding med sidorna a , b , c , d . Visa olikheterna

$$2\sqrt{2} \leq a + b + c + d \leq 4$$

och

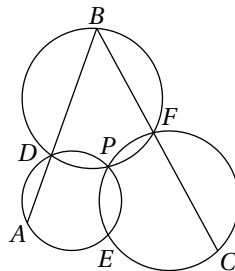
$$2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 4.$$

- 4073.** I årsrapporten från jämlikhetskommittén vid ett närliggande universitet konstaterar man att medelåldern för samtliga anställda vid årsskiftet var 42,9 år och för de manliga anställda 43,5 år. Den genomsnittliga anställningstiden för samtliga anställda var vid tillfället 14,2 år, för manliga anställda 15,1 år och för kvinnliga anställda 11,2 år. Ingenting stod nämnt om genomsnittsåldern för de kvinnliga anställda. Beräkna denna!
- 4074.** För $n = 4$ och $n = 6$ gäller att de tre talen $n - 1$, $n + 1$ och $n^2 + 1$ alla är primtal. Finns det några heltal större än 6, för vilka detta gäller?
- 4075.** I en rätvinklig triangel har arean och omkretsen samma måttetal m . Vilket är det minsta möjliga värdet på m ? För vilka pythagoreiska trianglar har arean och omkretsen samma måttetal?
- 4076.** Om man korsar frukterna *BANAN* och *ANANAS* erhåller man den märkliga frukten *BANANANANAS*. Vi ska här enbart studera själva bokstavsföljden. Låt oss placera ut de elva bokstäverna i en slumpmässig ordning.

- a) Vad är sannolikheten att det inte någonstans i bokstavsraden uppträder två stycken A i följd?
 b) Vad är sannolikheten att det inte någonstans förekommer två stycken N i följd?
 b) (Betydligt svårare) Vad är sannolikheten att det varken förekommer två stycken A eller två stycken N i följd?

Börja gärna med att undersöka bokstavsföljderna $BANAN$ och $ANANAS$ var för sig för att hitta mönster i lösandet.

- 4077.** Tre cirklar skär varandra i samma punkt P . Övriga skärningspunkter mellan cirklarna är D , E och F som figuren visar. Punkterna A , B och C ligger på var sin cirkel så att D ligger på sträckan AB och F på sträckan BC . Visa att E ligger på sträckan AC .



- 4078.** Efter en översvämning i Vattådalen är många vägar oframkomliga. Mellan de tio största städerna i området finns direktförbindelser i form av motorvägar, men nu gäller för samtliga att endast körbanan i den ena riktningen är öppen för trafik.

Visa att det måste finnas en stad A till vilken man kan komma från övriga nio städer, antingen direkt eller via någon av de andra städerna (man behöver alltså passera högst en annan stad på vägen till A).

- 4079.** Antag att a och b är positiva heltal, b udda. Bilda den aritmetiska talföljden

$$A = \{a, a + b, a + 2b, \dots, a + nb\}$$

där $n \geq 1$.

- a) Låt 2^m vara den högsta potensen av 2 som delar något av talen i A . Visa att exakt ett tal i A är delbart med 2^m .
 b) Visa med hjälp av resultatet i a) att summan av de inverterade talen i A inte är ett heltal.

Tredje häftet

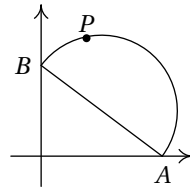
- 4080.** I det lilla öriket *Emedan* i Stilla Havet är *ehuru* den officiella valutan (förkortas *ehu*). Postverket tillämpar ett säreget portosystem med endast två skilda valörer. Det leder till att vissa utlandspornton inte kan åstadkommas exakt. Sålunda kan man kombinera frimärkena

till 10 ehu men inte till 9, man kan bilda 13 ehu men inte 14. Det går också bra med 29 ehu.

Vilka valörer har de båda förekommande frimärkena?

- 4081.** 2002-1-1 var en tisdag, regn ut på hvilken ukedag du ble født.
- 4082.** Ett fyrsiffrigt positivt heltal är sådant att dess tredje siffra är summan av de två första och dess sista siffra är summan av alla de övriga. Kan talet vara ett primtal? Vilka sådana är i så fall möjliga? Besvara samma frågor om förutsättningarna angående den sista siffran ändras. Den ska vara summan av de båda mittersta siffrorna.
- 4083.** Bygg en pyramid med fyra kulor, var och en med radien 1. Pyramiden byggs in i en tetraeder så att varje sida tangerar tre av kulorna i pyramiden. Bestäm volymen av tetraedern.
- 4084.** a) En ask innehåller tre kulor, två röda och en vit. Vi drar två kulor slumpmässigt. Vad är sannolikheten att kulorna har olika färg?
b) En ask innehåller n kulor, $n > 3$, a röda kulor och $b = n - a$ vita kulor. Vi söker heltal n och a , sådana att sannolikheten blir exakt $1/2$ för att de dragna kulorna är av olika färg. Karaktärisera mängden av n -värden för vilka villkoret kan uppfyllas. Karaktärisera därefter mängden av värdepar (n, a) för vilka villkoret är uppfyllt.
- 4085.** Ett kvadratisk rutnät med 5×5 rutor med en ruta borttagen kan ibland parketteras med L-trominoer, dvs kan täckas med brickor bildade av tre rutor som formar ett "L". Det är tillåtet att vrida trominoerna. Vi märker rutorna med \circ och \times som figuren visar.
- | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|
| \circ | \times | \circ | \times | \circ |
| \times | \times | \times | \times | \times |
| \circ | \times | \circ | \times | \circ |
| \times | \times | \times | \times | \times |
| \circ | \times | \circ | \times | \circ |
- a) Visa att om en \circ -ruta undantas så kan man parkettera.
b) Visa att om en \times -ruta undantas så går det inte att parkettera.
- 4086.** I rektangeln $ABCD$ är E en punkt på sidan AD . Den räta linjen CE skär diagonalen BD i P . Man vet att arean av fyrhörningen $ABPE$ är 5 och arean av triangeln DPC är 2.
- a) Beräkna förhållandet mellan $|AE|$ och $|ED|$.
b) Beräkna förhållandet mellan $|BP|$ och $|PD|$.
- 4087.** Låt a och b vara icke-negativa tal sådana att $a^2 + b^2 = 4$.
- a) Visa olikheten $a + b \leq 2\sqrt{2}$.
b) Visa olikheten $\frac{ab}{a+b+2} \leq \sqrt{2} - 1$.

- 4088.** En halvcirkelskiva glider längs axlarna i ett rätvinkligt koordinatsystem som vidstående figur visar. Punkten A ligger på x -axeln och B på y -axeln, medan P är en punkt på halvcirkelbågen. Vilken kurva följer P när A och B glider längs axlarna?



- 4089.** Worrals har i den mörka natten hoppat från sitt skadade plan med fallskärm över ett skogsområde i det inre av Australien. Strax innan hon landade fick hon veta att skogen är sammanhängande och saknar gläntor, att den omges av slättmark samt att dess area är exakt 10 km^2 . Därefter bröts radioförbindelsen och hon fick tyvärr ingen information om skogsområdets form.

Worrals befinner sig alltså någonstans i den mycket täta skogen och vill ta sig därifrån utan att behöva vandra alltför långt. Om hon kommer ut på slätten kan hon lättare upptäckas av undsättningsplan när gryningen kommer. Med sina navigationsinstrument har hon möjlighet att förflytta sig längs en godtyckligt vald kurva. Frågan är bara hur kurvan bör se ut. Worrals funderar en stund, plockar fram miniräknaren och kommer fram till att hon ska inte behöva gå mer än 13 km för att nå slätten.

Vi kan berätta att Worrals lyckades med sin plan och hon kom fram lyckligt och väl. Vilken strategi använde hon sig av?

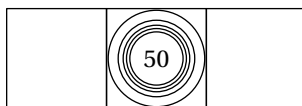
Fjärde häftet

- 4090.** Ask och Embla beställer en pizza på Restaurang Midgård. Servitören delar pizzan i fyra delar med två räta snitt dragna vinkelrätt mot varandra. Inget snitt går dock genom medelpunkten (vi antar att pizzan är exakt cirkelformad). För att skapa någon form av rättvisa bestämmer sig Ask och Embla för att ta varannan bit i medsols riktning. Embla får välja den första biten. Vilken bit bör hon välja för att hennes båda bitar tillsammans ska utgöra en så stor del av pizzan som möjligt?

- 4091.** I figuren breddvid ska vart och ett av entalen $1, 2, \dots, 9$ sättas in i de tomma rutorna så att aritmetiken går ihop. Vilka entalsvärden på x duger? Finns det något x sådant att lösningen blir entydig?

	·		-		= 8
-		+		·	
+	+		-		= 3
+		-		-	
+	+		-		= 6
$\overline{=}$	$\overline{=}$	$\overline{=}$			
8	3	x			

- 4092.** Här kommer en klassiker. På ett rutbräde med tre rutor är fem mynt utplacerade, en femkrona, en enkrona, en femtioöring av äldre modell, en tiokrona samt en nyare femtioöring. Mynten är till att börja med placerade i nämnd ordning ovanpå varandra på mittrutan som figuren visar, med femkronan nederst. Uppgiften består i att flytta samtliga mynt till en av de andra rutorna så att mynten ligger i exakt samma ordning. Mynten flyttas ett i taget, men ett mynt får bara flytta till en ruta som är tom eller till en ruta med mynt och då placeras på ett mynt med större diameter. I varje ruta som innehåller mynt ligger dessa alltid i storleksordning med det minsta myntet längst upp. Hur många drag krävs för flytten? Generalisera resultatet till n mynt på samma bräde.



- 4093.** Primtalen a , b , c uppfyller sambandet

$$\begin{cases} a(b-1) = (a-1)(b+1) = 2(c-1) \\ a+b+c = 63. \end{cases}$$

Vilka är de tre primtalen?

- 4094.** I en rätvinklig triangel har kateterna heltalslängderna m och n med $m > n$. Låt u vara triangelns minsta vinkel. Visa att det då finns en rätvinklig triangel där en av vinklarna är $2u$ och där alla sidor är hela tal som kan uttryckas som funktioner av m och n .
- 4095.** Vid invigningen av Musikens Hus år 2005 paraderar musikklasserna i ett 250 m långt tåg. Tove har placerat sig längst fram till vänster i tåget för att överlämna en vimpel till kommunfullmäktiges ordförande som står längre fram längs paradvägen. Plötsligt upptäcker Tove att hon har glömt vimpeln hos en klasskamrat som går längst bak i tåget. Tove vänder därför om, går i snabb takt vid sidan av tåget, hämtar vimpeln och fortsätter omedelbart framåt igen. Efter 3 min och 20 sek är hon i jämnhöjd med sin ursprungliga plats. Hon ser nu att nämnda ordförande står i sin talarstol 250 m längre fram och väntar otåligt, varför hon fortsätter i oförändrad takt, överlämnar vimpeln och återvänder till sin plats. Det har nu gått ytterligare 2 min och 30 sek sedan Tove passerade sin plats i tåget. Vi antar att såväl tåget som Tove rör sig med konstanta hastigheter och att den tid det tar att överräcka vimpeln är försumbar. Bestäm Toves och tågets resp hastigheter.
- 4096.** På en äng leker ett antal barn med vattenpistoler. Det exakta antalet är obekant, men man vet att det är ett udda antal. I ett givet

ögonblick riktar varje barn sin pistol mot sin närmaste granne och skickar iväg en stråle vatten. Visa att det garanterat finns åtminstone ett barn som inte får någon dusch.

- 4097.** I en cirkel drar vi diametern AB med längden 1. Punkten C delar den ena av de båda halvcirkelbågarna med ändpunkter i A och B mitt itu, medan D är en punkt på den andra halvcirkelbågen. Kordan CD skär diametern AB i punkten P på avståndet a från A . Beräkna förhållandet mellan $|CP|$ och $|DP|$.
- 4098.** I en aritmetisk serie a_1, a_2, \dots , där alla termerna är hela tal, är $a_1 = 1$. Man vet att talet 4 är en av termerna, däremot inte talet 2.
- Visa att villkoren entydigt bestämmer serien och ange denna.
 - Visa att varje heltalskvadrat som inte är delbar med 3 är en term i serien.
 - Visa att såväl 2002 som 2002^2 är termer i serien. Ange deras ordningsnummer.
- 4099.** Antag att vi utför upprepade serier av tärningskast. I varje serie kastar vi tärningen tills vi för första gången får en sexa. Hur många kast omfattar dessa serier i genomsnitt? Vad är det genomsnittliga antalet prickar i en sådan serie? Vi är också intresserade av att bestämma det genomsnittliga antalet prickar per kast. Låt N beteckna antalet kast inklusive kastet som ger sexa och låt S beteckna antalet prickar. Om vi exempelvis har fått serierna 4, 4, 5, 1, 4, 3, 3, 6 och 5, 1, 6, så antar N värdet 8 i den första serien och värdet 3 i den andra, medan S antar värdet 30 i den första serien och värdet 12 i den andra.
- Vilka värden antar N och S i genomsnitt? Vad blir kvoten mellan genomsnittet av S och N ? Kan denna kvot sägas uttrycka det genomsnittliga antalet prickar per kast?
 - I exemplet ovan får vi kvoten $30/8 = 3,75$ i den första serien och $12/3 = 4$ i den andra. Vad blir det genomsnittliga värdet av dessa kvoter, dvs vad blir S/N i genomsnitt? Kan detta genomsnitt sägas uttrycka det genomsnittliga antalet prickar per kast?