Årgång 3, 1919

Första häftet

49. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna i ändpunkterna av två mot varandra vinkelräta brännpunktsradier i en parabel. *(S. B-n.)*

50. Sök geometriska orten för den punkt, varifrån tre givna sfärer synas under samma synvinkel. *(S. B-n.)*

51. Om p är ett primtal > 3, så är

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (p-1)^2$$

divisibelt med p.

52. Att finna alla en- och tvåsiffriga hela tal, som satisfiera ekvationen $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$, så att i varje fall de tre talen x, y, och z ej hava någon gemensam faktor. *(–dh–.)*

53. I en spetsvinklig triangel är summan av avstånden från vinkelspetsarna till höjdernas skärningspunkt lika med summan av de inskrivna och omskrivna cirklarnas radier. *(N.F. Jenssen.)*

54. På ena gavelväggen till en låda av dimensionerna $10m \times 1m \times 1m$ sitter en fluga på $0,1m$ från bottnen och på lika avstånd från kvadratens båda vertikala sidor. På den motsatta gavelväggen är fästad en sockersmula, $0,1m$ från lådans övre botten och likaledes på samma avstånd från kvadratens vertikala sidor. Hur lång är den kortaste väg som flugan behöver tillryggalägga för att nå sockersmulan?

Andra häftet

55. I en cirkel med medelpunkten O och radien r äro två punkter P och P_1 tagna på samma diameter och på samma sida om O samt så, att $OP \cdot OP_1 = r^2$. Om genom P drages en godtycklig korda APB, så är PP_1 en av bissektriserna till AP_1B. *(X.)*

56. I varje fyrsidig figur är summan av sidornas kvadrater lika med summan av diagonalernas kvadrater, ökad med 4 gånger kvadraten på den linje, som förenar diagonalernas mittpunkter. *(M–r.)*

57. I varje tetraeder är summan av kanternas kvadrater 4 gånger så stor som summan av kvadraterna på de tre linjer som förbinda mittpunkterna av de motstående kanterna. *(N.F. Jenssen.)*

58. Sätt $x_1 = \sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots, x_n = \sqrt{2+x_{n-1}}$ och sök $\lim_{n\to\infty} x_n$.

59. Av de tre sträckorna a, b, c kan bildas en egentlig triangel, om och endast om ekvationen

$$a^2x^2 + \left(a^2 + b^2 - c^2\right)x + b^2 = 0$$

har imaginära rötter.

60. Beräkna n:e derivatan av $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$, då $x^2 < 1$ och $n > 1$. *(X.)*

Tredje häftet

61. Basen i en likbent triangel är harmoniska mediet mellan benet och höjden. Hur stora är vinklarna? *(C.H.)*

62. Om i en rätvinklig triangel med hypotenusan a och kateterna b och c, man har $\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{m}{a}$, bestäm gränserna för m. *(C.H.)*

63. Att upprita en parabel, då axeln och två punkter på kurvan äro givna. *(S. B–n.)*

64. En sned cirkulär kon har basradien r och axeln l vilken med basplanet gör vinkeln α. Bestäm vinkeln mellan generatriserna i det axelsnitt, som står på en diameter, som gör vinkeln v med axelns projektion. *(E. S.)*

65. Från en punkt P på avståndet a från medelpunkten O till en cirkel med radien r drages en sekant PAB. PO eller dess förlängning råkar cirkeln i D. Sök maximum och minimum för $\triangle DAB$. *(M–r.)*

66. Bevisa a) att kortaste avståndet från en punkt inom en cirkel till periferin i genomsnitt är en tredjedel av radien, och b) att kortaste avståndet från en punkt inom en triangel till omkretsen i genomsnitt är en tredjedel av den inskrivna cirkelns radie. *(X.)*

Fjärde häftet

67. För en reguljär 7-hörning gäller att $\dfrac{1}{d_1} + \dfrac{1}{d_2} = \dfrac{1}{s}$, där d_1 och d_2 äro två olika diagonaler, och s är sidan. *(A. N–m.)*

68. P är en godtycklig punkt på en parabel. O vertex. Visa att sinus för den vinkel tangenten i P bildar med PO alltid är mindre än $1/3$. *(S. B–n.)*

69. Rötterna till ekvationen $x^2 + ax + b = 0$ kallas α och β. Angiv den andragradsekvation som har rötterna $\dfrac{1}{\alpha^3} + 1$ och $\dfrac{1}{\beta^3} - 1$. *(M–r.)*

70. ABC är en triangel, CM dess median. Om triangeln CAM vrides kring CM, till dess att A kommer rätt över BC, så blir, om v betecknar vinkeln mellan planen,

$$\cos v = \frac{a^2 + 3b^2 - c^2}{3a^2 + b^2 - c^2} = \frac{4m^2 - a^2 + b^2}{4m^2 + a^2 - b^2}.$$

(C. H.)

71. I en triangel vilken som helst är alltid

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{v_a} + \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{v_b} + \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{v_c}$$

där v_a, v_b, v_c äro bissektriserna. *(C. H.)*

72. Bissektriserna till vinklarna i en fyrhörning bilda alltid en inskrivbar fyrhörning; och om den förstnämnda fyrhörningen är inskrivbar, så äro den andras diagonaler vinkelräta mot varandra.