

Årgång 5, 1921–22

Första häftet

Matematiska uppgifter

97. Lös ekvationerna

$$\sqrt{x+7} \pm \sqrt{x+5} \pm \sqrt{x+3} \pm \sqrt{x+2} = 0$$

98. Visa att det finns ett tal a , sådant att för alla $m < a$ uttrycket

$$mx^2 + (m-1)x + m - 1$$

är < 0 , vilket reellt tal x än må vara.

99. I en cirkel med radien r inpassas en korda av given längd. Genom dess ändpunkter dragas linjer parallella med två givna mot varandra vinkelräta linjer i planet. Sök orten för deras skärningspunkter, då kordan ändrar läge.

100. Sök de andragradsfunktioner $f(x)$, som äro så beskaffade, att $f(x^2 - 1)$ är divisibel med $f(x)$.

101. Om AA_1 , BB_1 och CC_1 äro tre begränsade linjer i rymden, som skära varandra i punkten S , så förhålla sig volymerna av tetraederna $SABC$ och $SA_1B_1C_1$ som $SA \cdot SB \cdot SC : SA_1 \cdot SB_1 \cdot SC_1$.

102. I en tetraeder äro motstående kanter a och a_1 , b och b_1 , c och c_1 mot varandra vinkelräta. Visa att

- varje höjd i tetraedern träffar basen i skärningspunkten för dennas höjder;
- produkterna aa_1 , bb_1 och cc_1 äro omvänt proportionella mot de kortaste avstånden mellan a och a_1 , b och b_1 samt c och c_1 ;
- $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2$.

Prisuppgift för 1921–22

för lärjungar vid allm. läroverk, tekniska skolor o.d.

Om man i ett solbelyst rum låter skuggan av ett rörligt föremål (t.ex. sitt eget huvud) närma sig tillräckligt intill skuggan av ett annat (t.e.x en fönsterpost, ett bord), uppstår en utväxt på skuggan av det ena eller andra föremålet. Redogör för lagarna för detta fenomen och förklara detsamma.

Tävlingen står öppen för alla lärjungar vid allmänna läroverk, seminarier tekniska skolor och med dessa jämställda enskilda läroverk. Tävlingskrift, innehållande såväl egna iakttagelser som förklaringar, bör vara

till redaktionen insänd före d. 1 mars 1922. Två lärjungar kunna gemensamt insända tävlingsskrift. Den tävlandes namn, läroanstalt och klass bör meddelas. Prenumeration å tidskriften fordras ej för deltagande i tävlan.

Om lämpliga tävlingsskrifter inkomma, så utdelas trenne pris som utgöres av värdefulla arbeten i matematik, fysik eller kemi. (Red.)

Andra häftet

Matematiska uppgifter

- 103.** I en inskrivbar fyrhörning äro sidorna i ordning a, b, c, d . Visa att radien R i den cirkel, i vilken en fyrhörning med sidorna a, b, c, d i godtycklig ordningsföljd kan inskrivas är

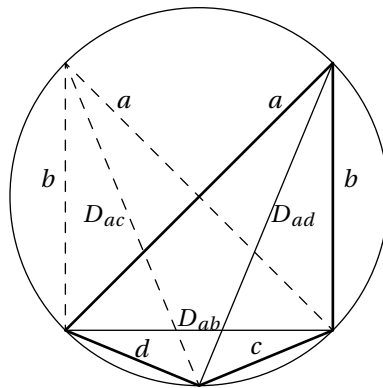
$$R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}} = \frac{D_{ab}D_{ac}D_{ad}}{4Y}$$

där Y föreställer fyrhörningens yta, p halva summan av sidorna och D_{ab}, D_{ac}, D_{ad}

de diagonalkordor, som sammanbinda ändpunkterna av genom index angivna intill varandra stående kordor, eller med andra ord samtliga de diagonalkordor, som kunna erhållas genom att man varierar sidornas inbördes ordningsföljd.

Visa även att den i cirkeln inskrivna fyrhörningens yta, ävensom

de tre diagonalkordorna enligt ovanstående, förbliva oförändrade till sina värden, om man i stället för a, b, c, d insätter dessa sidors dubbla avstånd från cirkelns medelpunkt. (Hj. Anér.)



- 104.** $ABCD$ är en parallelogram i vilken diagonalen BD och sidorna BC och CD äro utdragna. Drag genom hörnet A en linje som skär BD, BC och CD i P, Q, R , resp., så att $\frac{PQ}{PR}$ har ett givet förhållande.
- 105.** A är en punkt på en cirkel, B en punkt på tangenten i A . Sök den punkt P på cirkeln, där summan av eller skillnaden mellan kvadraterna på PA och PB är maximum eller minimum. ($M-r$.)

- 106.** Om a, b, c, \dots, l, m äro primtal och $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, \mu$ hela tal, så innehåller talet $N = a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots l^\lambda m^\mu$ divisorer till ett antal av $(1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \dots (1 + \lambda)(1 + \mu)$, däri inberäknade talen 1 och N .
- 107.** ABC är en triangel, där O är bissektrisernas skärningspunkt. M är en given punkt, vars spegelbilder i OA, OB och OC kallas M_a, M_b, M_c resp. Visa att AM_a, BM_b och CM_c träffas i en punkt.
- 108.** En cirkel och två punkter P och Q inom eller utom densamma äro givna. Man betraktar alla i cirkeln inskrivna trianglar ABC , sådana att AB går genom P och AC genom Q . När är sidan BC maximum eller minimum?

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

- 109.** Två plan P och O skära varandra under vinkeln ν . En linje a i P gör med planens skärningslinje vinkeln α . Hur stor vinkel gör den med sin projektion på Q ? Och hur stor är denna projektion? $(M-r)$
- 110.** Diskutera fullständigt problemet: Sök orten för medelpunkten till en cirkel, som tangerar två givna cirklar. $(M-r)$
- 111.** Bevisa att uttrycken

$$3^{4n+1} + 10 \cdot 3^{2n} - 13 \text{ och } 3^{2n+3} + 40n - 27$$

är divisibla med 64.

- 112.** Varje punkt på den mellanskrivna sfären till en reguljär tetraeder har den egenskap, att summan av dess potenser med avseende å de sfärer, som uppritas på tetraederns kanter såsom diametrar, är lika med 0.
- 113.** Hur stor behöver excentriciteten hos en ellips vara för att däri skall kunna inskrivas en parallelogram med en spetsig vinkel, vars tangent är μ ? $(M-r)$
- 114.** Att genom en punkt på en cirkel med radien r draga en korda, så att summan av kordan och dess avstånd från medelpunkten blir $= m$. Diskussion!

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

115. Bevisa att $8 \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha = 1$, då $\alpha = 20^\circ$. (O. G-r.)
116. Till en cirkel O äro dragna två tangenter TA och TB , som tangera i A och B . På den mindre bågen AB tages en punkt C sådan att $\widehat{AC} < \frac{1}{2} \widehat{AB}$, och på AT avsättes, stycket AC_1 lika med bågen AC . Kordan CD drages parallell med AB , och likaledes linjen C_1D_1 , som skär TB i D_1 . Visa att C_1D_1 är större än CD . (O. G-r.)
117. Om a är ett udda tal som ej är divisibelt med 3, så kan alltid a^6 skrivas såsom $72m + 1$, där m är ett helt tal.
118. Tre strålar i planet OA , OB och OC äro sådana att vinklarna mellan dem alla äro trubbiga. Sök triangeln ABC sådan att dessa strålar äro dess bissektriser. (M-r.)
119. Två plana figurer, A och B hava lika ytor och förhållandet mellan deras omkretsar är p . Två med dem resp. likformiga figurer A_1 och B_1 hava lika omkretsar, och förhållandet mellan deras ytor är q . Visa att $p^2 q = 1$. (Gustaf Lindborg.)
120. En bägare innehåller n kulor, obekant hur många av dem äro vita. Man drager en av dem, och den befinnes vara vit. Hur stor är sannolikheten för att alla äro vita? (Gustaf Lindborg.)