Årgång 7, 1922–23

Första häftet

145. Om a och b äro rätvinkliga koordinater, var skall punkten $(a; b)$ ligga för att ekvationen

$$4x^2 + 4(a+b)x + a^2 + b^2 = 0$$

skola hava båda rötterna liggande mellan $+1$ och -1?

146. På en halvcirkel med diametern AB tages en punkt C, och CD fälles vinkelrätt mot AB. Figuren roterar kring AB. Visa, att det alltid finnes en och endast en punkt C, sådan att summan av de ytor som genereras av bågen AC och linjen CD har till summan av de ytor som genereras av bågen BC och linjen CD ett givet förhållande.

147. Bevisa att summan

$$s_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \cdots + (n-1)n$$

är jämnt delbar med n, om n är ett relativt primtal till 3. *(G. L–g.)*

148. A_1, B_1, C_1 äro mittpunkter till sidorna BC, CA och AB i $\triangle ABC$. Från en punkt P dragas PA, PB och PC, och genom A_1, B_1, C_1 linjer resp. parallella med dessa. Visa att även dessa råkas i samma punkt. *(X.)*

149. I en vid A rätvinklig triangel ABC är $a = 4\,\mathrm{cm}$, och produkten av bissektriserna till β och γ $m^2 = 8\,\mathrm{cm}^2$. Sök dessa vinklar.

150. En triangels sidor äro delade i resp. p, q, r delar, och delningspunkterna äro sammanbundna med motstående vinkelspets. I hur många stycken blir triangeln delad, förutsatt att aldrig tre linjer skära varandra i samma punkt?

Andra häftet

151. Om c är ett helt tal > 1, så kan $4c^3 - 1$ icke vara tre gånger kvadraten på ett helt tal. *(Mebius.)*

152. Bestäm i kurvan $y = 3ax^2 - x^3 + a^2$ värdet på a så, att ytan av den triangel som begränsas av koordinataxlarna och kurvans tangent i dess inflexionspunkt blir så stor som möjligt. *(H. Stenmark.)*

153. Visa att i kurvan $y = 3a^2x^2 - ax^3$ avståndet från maximipunkten till tangenten i inflexionspunkten är lika med avståndet från minimipunkten till samma linje. *(H. Stenmark.)*

154. Att upprita en triangel, då man känner de vidskrivna cirklarnas radier. *(Iter.)*

155. I en likbent triangel är toppvinkelns bissektris hälften så stor som basvinkelns. Sök vinklarna.

156. På en cirkulär cylinder utskäres en kurva genom en sfär, vars medelpunkt ligger på cylinderns yta. Sök ekvationen för denna kurva, då cylindern utvecklas i ett plan.

Tredje häftet

157. Uttryck avståndet mellan medelpunkterna till en triangels omskrivna och inskrivna cirklar såsom funktion av dessa cirklars radier. *(Iter.)*

158. Att upprita en triangel, då man känner två höjder och den inskrvna cirkelns radie. *(Iter.)*

159. Om en aritmetisk serie har det hela talet a till första term och primtalet d till differens, så finnes bland dess termer, om deras antal tages tillräckligt stort, alla termer i serien a, a^d, a^{d^2}, a^{d^3}, $\dots a^{d^p}$. *(Mebius.)*

160. I ett rätvinkligt koordinatsystem är given en cirkel, som tangerar y-axeln i origo O. På x-axeln tages en punkt A, och på y-axeln en punkt B. Genom AB:s skärningspunkt med cirkeln dragas tangenter, som skära y-axeln i P och Q resp. Visa att

a) $OP \cdot OQ$ är konstant då AB vrider sig kring A, och

b) $\dfrac{1}{OP} + \dfrac{1}{OQ}$ är konstant då AB vrider sig kring B.

161. Avgör hur många reella lösningar mellan 0 och 2π fås av ekvationen $\cos 2x = 2a \cos x$ för olika värden på a.

162. Att upprita en rätvinklig triangel, då de inskrivna cirklarnas radier i de trianglar, vari triangeln delas av medianen från den räta vinkelns spets, äro givna.

Fjärde häftet

163. Diskutera och uppritа kurvorna
a) $y = \pm\sqrt{\sin x} \pm \sqrt{1 - \sin x}$,
b) $y = \pm\sqrt{\sin x} \pm \sqrt{1 + \sin x}$,

(M–r.)

164. På huru många nollor slutar talet $(5^n)!$? *(G. L–g.)*

165. I triangeln ABC är $\beta = 2\alpha$. O är den omskrivna cirkelns medelpunkt. Sök förhållandet mellan avståndet från B till CO och sträckan AO. *(X.)*

166. Att med passare, men utan linjal, dela en given cirkelperiferi i fyra lika delar. *(X.)*

167. Ekvationen

$$x^4 - (43 + 2i)x^3 + (512 + 83i)x^2 - (1213 + 902i)x + 391 + 1173i = 0$$

har två reella rötter. Lös ekvationen.

168. En kanon utskjuter en kula med begynnelsehastigheten v. I två olika riktningar, som med horisonten bilda vinklarna α och β, träffas en viss punkt A. Beräkna härav punkten A:s höjd över marken samt dess horisontella avstånd från kanonen. Luftmotståndet försummas.