Årgång 9, 1925–26

Första häftet

193. Visa, att om $(xy+xz+yz)^3 = xyz(x+y+z)^3$, så äro x, y, z (i godtycklig ordning) i geometrisk progression.

194. I en regelbunden oktaeder lägges ett plan genom en av kanterna, så att det avskär en pyramid $= \frac{1}{4}$ av oktaederns volym. I vilka förhållanden delas de båda kanter, som planet skär?

195. Att upprita en triangel, då α, $b+c$ samt den linje m, som förenar fotpunkterna av h_b och h_c, äro givna.

196. Om $\tan x \cdot \tan y + \lambda^2 = 0$, har

$$\sqrt{(\cos x + \cos y)^2 + \lambda^2(\sin x + \sin y)^2} + \sqrt{(\cos x - \cos y)^2 + \lambda^2(\sin x - \sin y)^2}$$

ett konstant värde. Vilket? *(X.)*

197. $ABCD$ är en i en given ellips inskriven parallellogram, vars sidor äro parallella med ellipsens lika långa konjugatdiametrar. Sök orten för hörnen i den parallellogram, som bildas av ellipsnormalerna i punkterna A, B, C och D. *(X.)*

198. Att upprita en triangel, då man känner omkretsen, förhållandet mellan två sidor och bissektrisen till den mellanliggande vinkeln. *(Iter.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

199. Lös systemet

$$\begin{cases} x^3 - x = y^3 - y \\ 3x^2 + 3y^2 = 5 \end{cases}$$

200. Lös ekvationen $\cos 3x \cdot \cos x = \cos 2x$.
(Svar: $x = n \cdot 60°$)

201. Från medelpunkten av en reguljär tetraeder dragas linjer till mittpunkterna av två närliggande kanter. Sök vinkeln mellan dessa linjer.
(Svar: 90°)

202. Kring en sfär omskrivas en rät cylinder och en rät kon. Sfärens, cylinderns och konens volymer bilda aritmetisk serie. Sök konens

höjd och visa, att kropparnas begränsningsytor även bilda aritmetisk serie. Sfärens radie = r.
(Svar: $4r$)

203. I triangeln ABC är $AB = 2\sqrt{3}$, vinkeln $A = 15°$ och omskrivna cirkelns radie 2 dm. Beräkna exakta värdet av triangelns yta.
(Svar: $\sqrt{3}$ dm^2 och $(3-\sqrt{3})$ dm^2)

204. Upprita kurvan $y = \dfrac{x^3}{x^2+4x+5}$.

205. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = BC = a$ och $CD = DA = b$. Visa att maximivärdet av den inskrivna cirkelns radie är $\dfrac{ab}{a+b}$.

206. Ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ skär parabeln $y^2 = 22x$ under räta vinklar. Sök a, excentriciteten samt skärningspunktens koordinater.
(Svar: $a = \sqrt{12}$; $c = 1 : \sqrt{2}$; $(x, y) = (1, \pm\sqrt{22})$)

207. Räta linjen $OA = a$ och $OB = b$ på var sin sida om y-axeln vrida sig kring O (origo) så att y-axeln alltid skär $\wedge AOB$ mitt itu. Sök orten för den punkt X, som fullbordar parallellogrammen $AOBX$.
(Svar: Ellipsen $\dfrac{x^2}{(a-b)^2} + \dfrac{y^2}{(a+b)^2} = 1$)

208. A och B äro punkter på resp. x- och y-axlarna, A_1 och B_1 deras projektioner på en rörlig linje genom origo. Sök orten för mittpunkten av A_1B_1. *(S. B–n.)*
(Svar: Cirkeln $2x^2 + 2y^2 - ax - by = 0$)

Andra häftet

209. För vilka heltalsvärden på a är

$$\frac{a^4 - a^3 - 8a^2 + 5a - 9}{a^2 + 2a - 3}$$

ett helt tal? *(X.)*

210. Från en rörlig punkt P på en fix parabelnormal fällas de bägge andra normalerna PA och PB. Visa, att kordan AB är oföränderlig till sin riktning. *(X.)*

211. Diskutera fullständigt problemet: Sök orten för mittpunkterna av alla genom en fast punkt gående kordor till ett givet kägelsnitt. *(Iter.)*

212. En triangel ABC och dess inskrivna cirkel äro givna. Till cirkeln drages en fjärde tangent, som skär AB och AC i resp. D och E. Vidare drages $BH \| DC$ och $CK \| EB$. BH skär AC i H, CK skär AB i K. Sök enveloppen till linjen HK.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

213. Lös systemet

$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax+2by &= 0 \\ xy+bx-ay-2ab &= 0 \end{cases}$$

214. Lös ekvationen $2\log x + \log(2x-3) = \log(3x-2)$.

215. Lös ekvationen $\sin 2x + 2\sin^2 x = a$ och angiv möjlighetsvillkoret.

216. Hörnpunkterna av en kvadrat med sidan a tagas till medelpunkter för cirklar med radien a. Beräkna ytan av den krokliniga fyrhörning, som bildas inuti kvadraten.

217. En flygmaskin stiger i höjd genom att beskriva en jämn spiral. Lodlinjen genom maskinen beskriver härvid en cylindermantel. Då lodlinjen har sitt minsta avstånd, 300 m, till en åskådare, iakttager denna maskinen under en höjdvinkel av 46°. Då maskinen hunnit det motsatta läget, d.v.s. gått halva spiralen är dess höjdvinkel 17° och då hela spiralens omkrets fullbordats 67°. Sök spiralens stigning och diameter.

218. På ett plan stå tre kongruenta, liksidiga koner, vilkas bottenperiferier tangera varandra två och två. Beräkna radien i den sfär, som tangerar de tre konerna samt planet genom topparna.

219. I en regelbunden oktaeder inskrives en kub, som har sina hörn på oktaederns kanter. Sök förhållandet mellan kubens och oktaederns volymer.

220. En rät linje rör sig så, att dess avskärningar a och b på x- och y-axlarna resp. alltjämt uppfylla villkoret $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{k^2}$, där k är en konstant. Bestäm geometriska orten för normalens från origo fotpunkt på linjen.

Tredje häftet

221. x_1 och x_2 äro rötterna till ekvationen $ax^2+(a^2+1)x+a^2+1=0$. a väljes så, att ekvationen $ax^2+(a^2+1)x+(a+1)^2=0$ får dubbelrot. Beräkna $(x_1^2-x_2^2)^2$. *(X.)*

222. Man betraktar alla trianglar på samma bas BC, vilkas tredje vinkelspets A är så belägen, att höjden från A, medianen från B och bissektrisen från C skära varandra i en och samma punkt. Sök orten för denna punkt. *(Iter.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

223. I en likbent triangel bilda höjden, basen och inskrivna cirkelns radie en geometrisk serie. Beräkna vinklarna.
(Svar: Basvinklarna äro 78,46°)

224. Bestäm på en glob breddgraderna för två på 10 graders avstånd från varandra belägna parallellcirklar så, att den mellanliggande zonen utgör 5% av hela klotytan.
(Svar: 50° och 60°)

225. Upprita kurvan $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^3}$.

226. Visa, att $\dfrac{n(n^2+3)(n^2+5)(n^2+6)}{7}$ alltid är ett helt tal, om n är det.

227. Från en punkt på en hyperbel dragas tangenter till konjugathyperbeln. Visa att tangentkordan tangerar den förstnämnda hyperbeln.

228. Upprita en triangel, då man känner en sida, motstående vinkel samt medianen mot en av de övriga sidorna.

Fjärde häftet

Inget fjärde häfte.