Årgång 12, 1928

Första häftet

297. Ett helt tal består av $6n$ siffror. I var och en av de på varandra följande grupperna av 6 siffror angiva de 3 första siffrorna samma tresiffriga tal som de 3 sista. Ett sådant tal är jämnt delbart med 7, 11 och 13. *(C. A. Mebius.)*

298. Om skillnaden mellan en triangels basvinklar är $|\beta-\gamma| = 90°$, så är $\cos\alpha = \frac{v_a^2}{bc}$, där v_a är bisektris till vinkeln α. *(Iter.)*

299. Att konstruera en triangel, då man känner en vinkel, motstående sida samt rektangeln av de två övriga sidorna. *(Cevas.)*

300. Två cirklar med radien r ligga i samma plan och avståndet mellan deras medelpunkter är även r. En sfär med diametern r rör sig så, att den ständigt vilar mot båda cirklarna. Sök orten för sfärens medelpunkt. *(X.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

301. Lös ekvationen $16(\cos 2x - \cos 6x) = \cot^2 x - \tan^2 x$.
(Svar: $x_1 = 45° + n\cdot 90°$; $x_2 = \pm 15° + n\cdot 90°$)

302. Basradierna till en parallellt stympad kon äro $1\frac{1}{4}$ cm och $6\frac{1}{4}$ cm. Höjden är $6\frac{2}{3}$ cm. Ett halvklot med centrum i den större basytans medelpunkt tangerar manteln. Sök den volym, som ligger mellan halvklotet och den mindre basytan.
(Svar: 32,17 cm^3)

303. Ekvationen för sidan AB i en triangel ABC är $5x-12y-4=0$ och för sidan AC $x+2y+8=0$. Höjden från A är $6\frac{2}{3}$ enheter, höjden från C är $5\frac{1}{13}$ enheter. Sök ekvationen för sidan BC.
(Svar: $y-1=\frac{4}{3}(x+10)$; $y-1=\frac{24}{7}(x+10)$; $y+5=\frac{4}{3}(x-2)$; $y+5=\frac{24}{7}(x-2)$)

304. Diskutera och upprita kurvan $y = \frac{(x-1)^2}{x^3+2x^2}$.

305. $ABCD$ är ett parallelltrapets, i vilket den ena av de parallella sidorna $AB=a$ och den andra $CD=2a$. Genom D drages en linje, som skär AB i P och CB:s förlängning åt B till i Q. Beräkna längden av AP, om summan av trianglarna ADP och PBQ skall bli ett minimum.
(Svar: $AP = a(\sqrt{2}-1)$)

306. Att i en given cirkel inskriva ett parallelltrapets, då man känner diagonalernas skärningspunkt och längden av de icke parallella sidorna.

Andra häftet

307. Lös ekvationen $x^5 + 45b^4x - 54b^5 = 0$. *(C. A. Mebius.)*

308. Att i en given ellips inskriva en triangel med största möjliga yta, då en vinkelspets befinner sig i en given punkt på ellipsen. *(C. A. Mebius.)*

309. Att upprita en triangel, då man känner två sidor och den från deras gemensamma vinkelspets utgående bissektrisens lutningsvinkel mot basen. *(Iter.)*

310. AB, BC och CA äro tre givna linjer. Man betraktar alla cirklar, som tangera BC så, att en av dess diametrar har ena ändpunkten på AB och den andra på AC. Sök orten för cirkelns medelpunkt. *(X.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

311. I en fyrhörning äro tre på varandra följande sidor a, b och c. Vinkeln mellan a och b är β och mellan b och c är den γ. Visa, att fyrhörningens yta är

$$\frac{ab\sin\beta}{2} + \frac{bc\sin\gamma}{2} - \frac{ac\sin(\beta+\gamma)}{2}.$$

312. En cirkel är given. S_n är längden av sidan hos en i cirkeln inskriven regelbunden n-hörning. Visa, att $S_5^2 = S_6^2 + S_{10}^2$.

313. En rätvinklig triangel, vars kateter äro 6 och 8 dm, vrider sig 30° kring medianen mot hypotenusan. Bestäm volymen av den så uppkomna kroppen.
(Svar: $6,4\pi$ dm^3)

314. Två regelbundna pyramider ha gemensam basyta, men vända spetsarna åt olika håll. Sidoytorna i den ena pyramiden göra med basytan en vinkel$=\alpha$; i den andra pyramiden är motsvarande vinkel $=\beta$. Visa, att radien i den sfär, som inskrives i dubbelpyramiden är

$$h\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

där h är avståndet från basytans medelpunkt till baskanten.

315. Intill en vertikal vägg ligger en halvcylinder (radie = r) med sin buktiga yta uppåt och sin plana yta nedåt och horisontell. Ett klot lägges så, att det stöder mot väggen och mot cylinderns buktiga yta. Sök klotets radie, om trycket mot väggen skall bli så stort som möjligt. Friktionen försummas.

(Svar: $5r:7$)

316. Konstruera uttrycket

$$\frac{a}{\sqrt{1+\sqrt{2}-\frac{a}{b}\sqrt{3}}}.$$

Tredje häftet

317. Visa att

$$149-48\sqrt{6}-36\sqrt{3}+24\sqrt{2}$$

är en jämn kvadrat.

318. En cirkel genom brännpunkterna F_1 och F_2 till en hyperbel skär kurvan i P och konjugataxeln i Q. F och Q ligga på samma sida om den reella axeln. Från P dragas linjerna PR_1 och PR_2 parallella med QF_1 och QF_2. R_1 och R_2 ligga på reella axeln. Visa, att R_1R_2 har konstant längd, hur cirkeln än väljes. *(X.)*

319. Att upprita en triangel, då man känner summan av två sidor samt höjden och medianen från den gemensamma vinkelspetsen. *(Iter.)*

320. Att upprita en triangel, då man känner läget av två höjders fotpunkter samt vet, att den sidan, mot vilken den tredje höjden svarar, ligger utefter en given obegränsad rät linje. *(C. A. Mebius.)*

Enklare matematiska uppgifter

321. Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5z\\ x^2+y^2&=13z^2\\ x^4+y^4&=97z^2\end{aligned}\right\}$$

(Svar:

x	3	2	−3	−2	0
y	2	3	−2	−3	0
z	1	1	−1	−1	0

)

322. α, β och γ äro en triangels vinklar. Visa, att triangeln är rätvinklig, om $\sin\alpha-\cos\beta=\cos\gamma$.

323. I en cirkel med radien 5 cm har man dragit en korda $AB = 5$ cm och förlängt denna åt B till ett stycke $BC = 9$ cm. Från C drages en sekant CDE, så att bågen BD blir hälften av bågen AE. Beräkna vinkeln ACE.

(Svar: 17,08° eller 42,92°)

324. Diskutera kurvan $y = x^5 - 5x^3 + 10x$.

325. En kub och en rät pyramid stå på samma bas och åt samma håll. Hur stor skall pyramidens höjd vara, för att pyramidens inom kuben belägna del skall utgöra 52% av kubens volym? Kubens kant $= a$.

(Svar: $\frac{5}{3}a$)

326. Att parallellt med basen i en triangel draga en transversal, så att det uppkomna parallelltrapetset blir medelproportional till den ursprungliga triangeln och topptriangeln.

Fjärde häftet

327. Visa, att $n^6 + 3n^4 + 7n^2 - 11$ är delbart med 128, om n är ett helt udda tal.

328. Visa, att ett uddasiffrigt tal, vars första siffra är 1 eller 8 och vars alla följande siffror äro treor icke kan vara ett primtal. *(Iter.)*

329. m och n äro två hela positiva tal, $m > n$. När finnes en rätvinklig triangel och en tillhörande aritmetisk serie sådan, att triangelns kateter och hypotenusa mätas av resp. s_m, s_n och s_{m-n} i serien? ($s_r = \sum_1^r u_r$, om serien är $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$) *(X.)*

330. Att konstruera en triangel, då man känner längden av en sida, läget av de höjders fotpunkter, vilka fällas mot de två andra sidorna samt vet, att den tredje höjdens fotpunkt ligger på en given obegränsad rät linje. *(C. A. Mebius.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

331. Lös ekvationen

$$(\log x)^2 + \log x^2 + \log 2x = \log 20000.$$

(Svar: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-4}$)

332. Visa, att

$$\cos^2 x + \cos^2(60° + x) + \cos^2(60° - x)$$

har ett konstant, av x oberoende värde.

333. I en cirkel med radien r är ett parallelltrapets inskrivet, så att tre av dess sidor ligga på avståndet a från medelpunkten. Visa, att trapetsets höjd är

$$4a\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right).$$

334. I en likbent triangel äro de lika sidorna vardera 2 cm. Beräkna basen, om den inskrivna cirkelns radie skall vara ett maximum. (Svar: $2(\sqrt{5}-1)$ cm)

335. P är en rörlig punkt på en hyperbel, F_1 och F_2 äro dess brännpunkter. Visa, att orten för medelpunkten till den cirkel, som inskrives i triangeln PF_1F_2, är vertextangenten.

336. Ytan av en triangel är A. Ytan av den triangel, vars sidor utgöras av den förstas medianer, är A_1. Visa, att $4A_1 = 3A$.