Årgång 13, 1929–30

Första häftet

337. Visa, att

$$(n-1)\sin nx = 2\sum_{p=1}^{p=n-1} \sin px \cdot \cos(n-p)x.$$

(C. A. Mebius.)

338. På hur många olika sätt kunna två fientliga drottningar uppställas på ett schackbräde utan att stå i slag för varandra? *(Iter.)*

339. Att i en given cirkelsektor inskriva en rektangel, som vid rotation kring sektorns symmetrilinje alstrar en cylinder med största möjliga totala yta. *(X.)*

340. F är brännpunkten till en parabel, S axelns skärningspunkt med styrlinjen. Sök excentriciteten för den ellips med foci i F och S, som skär parabeln under så liten (spetsig) vinkel som möjligt. *(X.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

341. Ekvationen

$$\frac{2x-1}{16-2x^3} - \frac{3}{x^2+2x+4} = \frac{a}{x-2}$$

har en rot $x_1 = -1$. Bestäm a och den andra roten.
(Svar: $a = 3,5$; $x_2 = -2\frac{1}{7}$)

342. Lös ekvationen

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x.$$

(Svar: $45° + n \cdot 180°$; $180° + n \cdot 360°$)

343. Diskutera kurvan

$$y = \frac{\sin^2 x}{\sin x - \frac{1}{4}}.$$

344. I likheten $x - y + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 6 + 3\sqrt{2}$ äro x och y rationella tal. Bestäm deras värden.

(Svar:

x	8	18
y	2	16

)

345. En rät linje skär två mot varandra vinkelräta plan A och B i punkterna P och Q resp. Avstånden från P och Q till planens skärningslinje förhålla sig som $1 : \sqrt{2}$. Linjens projektioner på A och B förhålla sig som $\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Beräkna de vinklar, som linjen bildar med planen.
(Svar: 45° och 60°)

346. Att upprita en rätvinklig triangel, då man känner inskrivna cirkelns radie och avståndet mellan de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter.

Andra häftet

347. Lös ekvationen $x^5 + 5px^3 + 5p^2x + r = 0$. *(C. A. Mebius.)*

348. P och P_1 äro ändpunkterna av en parameter i en ellips. Om den cirkel, som tangerar ellipsen i P och P_1, går genom centrum, så innehålla normalerna i P och P_1 var sin av topparna på lillaxeln. *(X.)*

349. Konstruera de tangenter till cirkeln $x^2 + y^2 - 2ry = 0$, för vilka det mellan axlarna liggande stycket är så kort som möjligt. *(X.)*

350. Sök orten för skärningspunkterna mellan tangenterna från två fasta punkter till en cirkel, vars medelpunkt rör sig utefter punkternas föreningslinje och vars diameter är lika med avståndet mellan de båda nämnda fasta punkterna. *(Iter.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

351. Lös ekvationen

$$1 + \sqrt{x - 2 - \sqrt{3x}} = \sqrt{x + 13}.$$

(Svar: $x = 3468$)

352. Lös systemet

$$\frac{4}{5} - \frac{y}{\sqrt{5} - 1} = \sqrt{5}$$
$$\frac{\sqrt{5} + 1}{x} - \frac{y}{2} = 2.$$

(Svar: $x = y = \sqrt{5} - 1$)

353. I en likbent triangel med toppvinkeln $2x$ förenas de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter med en av basens ändpunkter. Vinkeln mellan sammabindningslinjerna kallas y. Undersök grafiskt y som funktion av x.

354. En liksidig triangels hörn ligga på tre parallella räta linjer. Den mellersta linjen befinner sig på avstånden a och b från de yttre linjerna. Angiv triangelns höjd som en funktion av a och b.
(Svar: $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$)

355. En cirkel skär cirkeln $x^2 + y^2 - 2x + 5y - 5 = 0$ i ändpunkterna av en diameter, går genom punkten (6; 1) och har sin medelpunkt på linjen $9x+4y = 33$. Angiv ekvationen för den nämnda diametern.
(Svar: $12x - 10y = 37$)

356. Beräkna kantvinklarna i en pyramid, vars höjd = a och vars basyta är en likbent och rätvinklig triangel med hypotenusan $2a$. Höjden träffar basytan i hypotenusans mittpunkt.
(Svar: 109,48°, 90°, 54,74°)

357. Lös ekvationen $x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.
(Svar: $x_{1,2,3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $x_{4,5,6} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$)

358. Lös systemet
$$\begin{cases} x + y - z = 7 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 33 \\ x^3 + y^3 - z^3 = 151. \end{cases}$$
(Svar:

x	5	3
y	3	5
z	1	1

)

359. I en månghörning är det tal, som anger vinklarnas summa, en enhet större än diagonalernas antal. Beräkna sidoantalet.
(Svar: 361)

360. Lös ekvationen $5\cot 5x = \cot x$.
(Svar: $\pm 52{,}24° + n \cdot 180°$, $90° + n \cdot 180°$)

361. Lös ekvationen $\sin 2x \cdot \cos x + \sin x = 1$.
(Svar: $90° + n \cdot 360°$, $21{,}47° + n \cdot 360°$, $158{,}53° + n \cdot 360°$)

362. Lös ekvationen $\sin x + \sin\left(45° + \frac{x}{2}\right) = 2$.
(Svar: $90° + n \cdot 720°$)

363. I en rätvinklig triangel ABC tangerar en cirkel båda kateterna och skär hypotenusan BC i delarna BD, DE och EC, så att $BD : DE : EC = 8 : 24 : 1$. Beräkna triangelns minsta vinkel.
(Svar: 31,3°)

364. I en rätvinklig triangel är skillnaden mellan kateterna 5 cm och höjden mot hypotenusan 12 cm. Beräkna hypotenusan.
(Svar: 25 cm)

365. Från en punkt P på en cirkels periferi drages en linje PM vinkelrät mot en diameter AB. Var skall P ligga, för att triangeln APM ska bli så stor som möjligt?
(Svar: $\wedge PAM = 30°$)

366. OA och OB äro de en cirkelkvadrant begränsande radierna. I A är en tangent dragen. En rät linje tangerar bågen AB i P och skär OB:s

förlängning i C och tangenten genom A i D. Bestäm förhållandet mellan PC och PD, då fyrhörningen $OADC$:s a) yta b) omkrets är den minsta möjliga.
(Svar: a) $PC = PD$, b) $PD = 2PC$)

367. $ABCD$ är en rektangel, vars sidor AB och BC äro resp. 3 och 1 cm. Genom C är en rät linje dragen, som skär diagonalen BD i P och sidan AB i Q. Beräkna BQ, om summan av trianglarnas BPQ och CPD ytor är ett minimum.
(Svar: $3(\sqrt{2}-1)$ cm)

368. Två kubiska kärl rymma tillsammans 468 cm^3. Hur stora är kanterna, då man vet, att dessa äro hela tal?
(Svar: 5 och 7 cm)

369. Ett fyrsiffrigt tal är en jämn kvadrat. Om första siffran ökas med 2, den andra med 3, den tredje med 4, men den fjärde blir oförändrad, fås ett fyrsiffrigt tal, som också är en jämn kvadrat. Vilka äro talen?
(Svar: 3136 och 5476 eller 1024 och 3364)

370. Om man ökar summan av ett helt positivt tal och dettas kvadrat med 61, så fås ett tal, som är en jämn kvadrat. Beräkna talet.
(Svar: 4, 19 eller 60)

371. Vilket fyrsiffrigt, jämnt tal har den egenskapen, att $\frac{5}{7}$ av detsamma är lika med kvadraten på det tal, som bildas av de två sista siffrorna i talets hälft. Vilket är talet?
(Svar: 1260)

372. Ett tresiffrigt tal skrives i ett visst talsystem som 92 men som 644 i ett system, vars grundtal är 3 gånger så stort som det förras. Talets tiotalssiffra är 3 enheter större än dess enhetssiffra. Vilket är talet?
(Svar: 785)

Tredje häftet

373. Visa, att $299 - 18\sqrt{6} + 44\sqrt{3} - 166\sqrt{2}$ är en jämn kvadrat.
(A. N. Zahl.)

374. Av de fyra skärningspunkterna mellan två parabler med vinkelräta axlar sammanfalla tre i A, den fjärde är B. Visa a) att AB går genom axlarnas skärningspunkt och där delas i förhållandet $1:3$, b) att A är mittpunkten till det stycke av kurvornas gemensamma tangent i A, som ligger mellan axlarna. *(X.)*

375. I tetraedern $D(ABC)$ är $\bigwedge ADB = \bigwedge ADC = 90°$, $\bigwedge BDC = v$ och alla tre kantvinklarna i planet ABC äro lika ($= \alpha$). Sök sambandet mellan α och v. *(X.)*

376. Att upprita en triangel, då man känner en av höjderna och de om- och inskrivna cirklarnas radier. *(Iter.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

377. En fader omtalar sin gosses ålder. Av misstag råkar han emellertid omkasta år och månader, varigenom gossens angivna ålder blir dubbelt så stor som den verkliga och därutöver en dag. Hur gammal var gossen? (En månad = 30 dagar.)

(Svar: 3 år, 7 månader och 29 dagar)

378. En person, som tillfrågades om namnet på hans flicka, svarade: ”Om bokstäverna utbytas mot de tal, som angiva deras ordningsplats i alfabetet, så är ordningstalens summa 59. Det första talet fördubblat, ökat med det andra tredubblat, är 39 större än det tredje tredubblat”. Vad hette flickan?

(Svar: Rut)

379. Lös ekvationen

$$x^n \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{n \log x} = n^n.$$

(Svar: $x_1 = n$, $x_2 = 0,1$)

380. Om ${}^a\log x = p$ och ${}^b\log x = q$, beräkna ${}^{ab}\log x$.

(Svar: $\frac{pq}{p+q}$)

381. I en aritmetisk serie om 5 termer är summan $= 5a$ och termernas produkt $= a^5$. Vilken är serien?

(Svar: Differensen är antingen 0 eller $\pm\frac{a\sqrt{5}}{2}$)

382. Bestäm alla de tresiffriga hela tal med olika stora siffror, där siffrornas briggska logaritmer bilda aritmetisk serie.

(Svar: 124, 139, 248, 469 eller i omvänd ordning)

383. På sidan AB i kvadraten $ABCD$ uppritas en halvcirkel. Om från C eller D drages en tangent till cirkeln, avskäres en egyptisk triangel av kvadraten.

384. I en likbent triangel drages en rät linje från spetsen till en punkt på basen. Om denna linje delas i tre lika delar av den inskrivna cirkelns periferi, huru förhålla sig triangelns sidor?

(Svar: $9:9:10$)

385. Ena vinkelspetsen i en liksidig triangel tages till centrum för en cirkel genom den inskrivna cirkelns medelpunkt. I vilket förhållande

delas höjden av cirklarnas gemensamma korda?
(Svar: 7 : 5)

386. Den längsta linje som från basens ena ändpunkt i en likbent triangel kan dragas till den inskrivna cirkeln är dubbelt så stor som den minsta räta linje, som kan dragas till periferin. Sök förhållandet mellan sidorna.
(Svar: 9 : 9 : 14)

387. Tangenterna från en punkt till en cirkel (radie = r) bilda 90° med varandra. Hur långt från centrum skall en rät linje dragas för att det mellan tangenterna belägna stycket skall delas i tre lika delar av cirkelns periferi?
(Svar: Avståndet $\frac{r\sqrt{2}}{2}$ eller $\frac{7r\sqrt{2}}{10}$)

388. I vilken av alla rätvinkliga trianglar med given hypotenusa är skillnaden mellan en katet och dess projektion på hypotenusan ett maximum?
(Svar: Vinklarna äro 30°, 60° och 90°)

389. För vilket värde på a blir linjen $y = x + 3,5$ asymptot till kurvan $y = \dfrac{x^2 + 2ax - a^2}{a - 1,5a}$?
(Svar: $a = 1$)

390. I en triangel ABC är vinkeln $C = 60°$. Visa, att

$$\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$$

391. En series n:te term är $4n^4 + 1$. Visa, att om man tager ut tre konsekutiva termer vilka som helst, så är produkten av den första och sista termen jämnt delbar med den mellersta.

392. På sträckan $AB = c$, som bas ritar man en likbent triangel ABC, vars vinklar väljas så, att en cirkel med sin medelpunkt på AB och gående genom A, tangerar BC i C. Beräkna triangelns vinklar och cirkelns radie.
(Svar: 30°, 20°, 120°. Radien = $\frac{c}{3}$)

393. På diametern AB $(= 2r)$ i en cirkel har man tagit en punkt D och på periferin en punkt C så, att den likbenta triangeln ACD får så stor yta som möjligt och beräkna denna maximiytas storlek.
(Svar: $\frac{4r^2\sqrt{3}}{9}$)

394. A är en punkt på bågen till det parabelsegment, som avskäres av parabelns parameter BD $(= 2p)$. Linjen AC skär BD under rät vinkel. Vilket är det största värde, som ytan av triangeln ABC kan antaga?
(Svar: $\frac{8p}{27}$)

Fjärde häftet

395. En gammal kortkonst lyder: Tag en blandad kortlek, lägg ned första kortet och bilda en hög genom att, utgående från det första kortets valör (ess= 1; kung= 13), räkna till 13. (Är t.ex. det första kortet en knekt, räknar man 11, 12,13, så att högen kommer att innehålla 3 kort.) Med de återstående korten bildas på samma sätt nya högar, till återstoden ej räcker till en fullständig hög. Är nu högarnas antal n och antalet återstående kort p, så blir summan av valörerna på de understa korten i högarna

$$S = 13(n-4) + n + p.$$

Bevisa detta. *(Bx.)*

396. Cirkeln (K) ligger helt inom cirkeln (L). Tangenten i en godtycklig punkt C på (K) skär (L) i A och B. Finnes någon punkt i planet, varifrån CA och CB alltid synas under lika vinklar? *(X.)*

397. A är toppen av en i en cirkel inskriven likbent triangel ABC. Parallellt med AB drages en linje, som skär AC i E och den mindre av de bågar, vari periferin delas av AC i F. Sök maximum av EF. *(C. H.)*

398. Att upprita en triangel, då man känner basen, höjden mot basen samt skillnaden mellan basvinklarna. *(A. H. P.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

399. Upplös i faktorer uttrycket $xyz + (x+y)(y+z)(z+x)$.
(Svar: $(x+y+z)(xy+xz+yz)$)

400. Bevisa, att om i en triangel vinkeln A är dubbelt så stor som vinkeln B, så är $a^2 - b^2 = bc$.

401. Bevisa, att om $\cos\alpha = \frac{1}{8}$ och $\cos\beta = \frac{9}{16}$ och α och β är spetsiga vinklar, så är $3\alpha + 2\beta = 360°$.

402. De fyra ellipssegment, som ligga utanför den rektangel, vars hörn äro parametrarnas ändpunkter, äro lika stora. Bestäm ellipsens excentricitet.
(Svar: $1/\sqrt{2}$)

403. Två konjugathyperblar äro givna. Parameterkordorna ses från medelpunkten under vinklarna $2\alpha_1$ och $2\alpha_2$. Excentriciteterna äro resp. e_1 och e_2. Bevisa, att

$$e_1 + e_2 = \tan(\alpha_1 + \alpha_2)$$

404. A sade till B: Jag är nu 6 ggr så gammal som du var, då du var 6 ggr så gammal som jag då var. Hur gamla voro A och B?

(Svar:

A	B
36	41
72	82

)

405. Lös systemet

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\sin y} = 2\sqrt{3} \\ x + y = 120° \end{cases}$$

(Svar:

x	96°	24°	168°	−48°	$+n\cdot 360°$
x	24°	96°	−48°	168°	$-n\cdot 360°$

)

406. Ett cylindriskt kalorimeterkärl, som rymmer 400 cm^3, är så dimensionerat, att när det till $\frac{2}{3}$ är fyllt med en vätska, dennas totala begränsningsyta är så liten som möjligt. Beräkna kärlets basradie och höjd.

(Svar: Radien = 3,49 cm; höjden = 10,47 cm)

407. Vilken figur skall man klippa ut ur ett stort pappersark, om man därav vill göra en lampskärm i form av en stympad kon med diametrarna 15 cm och 36 cm och med sidan 21 cm?

(Svar: Hälften av en cirkelring med radierna 36 cm och 15 cm)

408. Jorden antages vara en sfär med medelpunkten O och radien = R. Punkterna A och B på jordytan ha latituderna α och β resp. Skillnaden mellan deras longituder är v.

a) Beräkna vinkeln AOB.
b) Beräkna vinkeln γ mellan triangelytan AOB och ekvatorsplanet.
c) Beräkna längden av en storcirkelbåge genom A och B.
d) Vilket är kortaste avståndet mellan Stockholm ($\beta = 59°21'$ n.br., $\gamma = 18°$ ö.l.) och Peking ($\beta_1 = 40°$ n.br, $\gamma_1 = 116°$ ö.l)? $R = 638$ mil.
e) Beräkna latituden för den nordligaste punkten på denna väg.

(Svar: Sätt $\wedge AOB = x$, så fås a) $\cos x = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\cos v$, b) $\cos\gamma = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta\sin v}{\sin x}$, c) $\dfrac{\pi R x}{180}$ eller $\dfrac{\pi R(360-x)}{180}$, d) 669 mil, e) 63,5° n.br.)

409. En smörhandlare väger upp smör i nominella 1-kilobitar på en balansvåg. Han låter vid varje ny vägning smörbiten och kilogramvikten byta vågskål. Hur mycket har han efter n vägningar vunnit eller förlorat härigenom om a) vågarmarna äro lika långa, men vågskålarna olika tunga, b) om vågskålarna äro lika tunga, men vågarmarna olika långa?

(Svar: a) Vågskålarnas vikter P och Q; $(P > Q)$. Om n är ett jämnt tal, ta vinst och förlust ut varandra. Om n är ett udda tal, blir det en vinst $= P - Q$, om sista vägningen har ägt rum på den tyngre vågskålen, i motsatt fall blir det en lika stor förlust.
b) Vågskålsvikten $= P$. Vågarmarnas längder äro för A-skålen $= a$ och för B-skålen $= b$; $(a > b)$. Om n är ett jämnt tal blir det en förlust

$$= \frac{n(a-b)^2(1+P)}{2ab}.$$

Om n är ett udda tal och sista vägningen skett på B-skålen, blir förlusten

$$= \frac{(a-b)(1+P)}{2ab}\big[(n-1)(a-b)+2a\big].$$

Om sista vägningen skett på A-skålen, blir förlusten

$$= \frac{(a-b)(1+P)}{2ab}\big[(n-1)(a-b)-2b\big].$$

Förlusten blir i detta fall negativ, dvs. vinst inträder, om $n < \dfrac{a+b}{a-b}$.)

410. En fluga kryper omkring på golvet i ett kubiskt rum med 2 meters kantlinje. Angiv, var flugan skall befinna sig för att summan av kvadraterna på dess avstånd från takets fyra hörn skall vara a) så liten som möjligt, b) så stor som möjligt.
(Svar: a) I golvets mittpunkt, b) i något av rummets hörn.)

411. Beräkna asymptoterna till kurvan $y^2 = \dfrac{4x^4}{x^2+x-2}$.
(Svar: $x = 1$; $x = -2$; $y = 2x - 1$; $y = -2x + 1$)

412. Konstruera kurvan $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.