Årgång 14, 1931

Första häftet

413. Eliminera x, y och z ur systemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}&=a \\ \frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}&=b \\ \left(\frac{x}{y}+\frac{z}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)&=c \end{aligned}\right\}$$

(A. H. P.)

414. Den konvexa fyrhörningen $ABCD$ är omskriven kring en cirkel O. Visa, att

$$\frac{\overline{OA}^2}{AD\cdot AB}+\frac{\overline{OB}^2}{AB\cdot BC}=1.$$

(X.)

415. En likformigt föränderlig triangel glider med två av sina vinkelspetsar på en fast ellips. Sök orten för den tredje vinkelspetsen, om triangeln rör sig så, att sidorna ständigt förbliva parallella med varsin av tre givna riktningar. *(Iter.)*

416. Bestäm antalet punkter med heltalskoordinater på hyperbeln $x^2-2y^2=1$ inom en cirkel kring origo med radien $=1600$. *(Iter.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

417. Två trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ äro så beskaffade, att $B=B_1$ och $A+A_1=180°$. Visa, att $BC\cdot B_1C_1=AC\cdot A_1C_1+AB\cdot A_1C_1$.

418. Genom en fix punkt på diametern OA genom origo O drages en korda MN i cirkeln $x^2+y^2=2rx$. OM och ON skära linjen $x=2r$ i P och Q. Visa, att $AP\cdot AQ$ är konstant. Kan uppgiften generaliseras?

419. Uppdela 64 343 i primfaktorer.

420. I cirkelsektorn AOB är centrivinkeln O spetsig. Cirkelbågarna APO och BPO tangera resp. OB och OA i O. Visa, att området APO är mindre än området APB. (Ledning: Som uttryck för skillnaden mellan ytorna erhålles $2\cos^2 v(\tan v-v)$, om $\wedge AOB=v$ radianer och cirklarna APO och BPO antagas ha radien $=1$.)

421. Parabeln $y=x^2$ är given.

a) Sök en punkt på y-axeln, så beskaffad, att de båda tangenter, vilka därifrån dragas, med varandra bilda 45° vinkel.

b) Är det möjligt att finna en punkt på linjen $y = x$, från vilken parabeln synes under rät vinkel?

c) Vilken är den minsta vinkel, under vilken parabeln synes från räta linjen $y = x - 2$?

(Svar: a) $y = -1,457$. b) Ja, punkten $(-1/4; -1/4)$. c) 36,01°)

422. Kurvan $y = x^3$ är given.

a) Tangenten till kurvan i en godtycklig punkt P drages, och tangenten utdrages, tills den skär kurvan i en punkt P'. Visa, att förhållandet mellan abskissorna för punkterna P' och P är konstant.

b) Från en godtycklig punkt på kurvan dragas de båda tangenter till kurvan, som kunna dragas. Visa, att vinkeln mellan dem aldrig kan vara 45°.

c) Vilken är den största vinkel dessa tangenter kunna bilda med varandra?

(Svar: 36,87°)

423. Sök ekvationen för den gemensamma normalen till parabeln $y = \sqrt{x}$ och cirkeln $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 9$.

(Svar: $2x + y - 3 = 0$)

424. Sök avståndet mellan de tangenter till kurvan $y = x^7$, som hava vinkelkoeffienten 7.

(Svar: $1,2\sqrt{2}$ längdenheter)

425. För vilka punkter i xy-planet är funktionen $f(x, y) = \log(y - x^2)$ negativ?

(Svar: För den del av planet som begränsas av parablerna $y = x^2$ och $y = x^2 + 1$)

426. Från en godtycklig punkt P på räta linjen $y = 2x$ fälles en perpendikel PQ mot x-axeln. En cirkel med radien 2 längdenheter lägges så, att den går genom punkterna P och Q och har sin medelpunkt till höger om dessa. Sök orten för medelpunkten och konstruera den grafiskt eller på annat sätt.

(Svar: En båge av ellipsen $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$)

427. Diskutera kurvan $y = \cos \dfrac{2\pi}{x^2+1}$.

Andra häftet

428. Två koncentriska sfärer äro givna. Man betraktar en variabel sfär O, som har sin medelpunkt på en fix, gemensam diameter till de givna, råkar båda dessa och delar området mellan dem mitt itu.

Visa, att sfären O ständigt (går genom) innehåller en viss cirkel.

(X.)

429. Sammansättningen hos en blandning av två vätskor A och B (specifik vikt a och b resp; $a > b$) kan angivas antingen medelst antalet volymprocent v_A, som utgöres av A, eller medelst antalet viktprocent m_A, som utgöres av A. Visa, att $m_A - v_A$ är maximum, då $m_A = v_B$ och $v_A = m_B$. *(X.)*

430. O är centrum, F ena brännpunkten och l ena asymptoten till en hyperbel. P är en punkt på hyperbeln; FP skär l i Q. Konstruera en sträcka, vars längd är det gränsvärde, till vilket längden av PQ närmar sig, då P längs en av de till l hörande kurvdelarna försvinner till oändligheten. *(X.)*

431. T är ytan av en triangel med sidorna a, b och c. T_o är ytan av den triangel, som har sina hörn i den inskrivna cirkelns kontaktpunkter. T_a, T_b och T_c ha motsvarande betydelse för de vid a, b och c vidskrivna cirklarna. Bevisa, att $T_a + T_b + T_c - T_o = 2T$. *(X.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

432. Visa, att en cirkel, vars medelpunkt är inflexionspunkten för kurvan $y = x^3 - 2x$ och vars periferi passerar såväl genom denna kurvas maximipunkt som genom dess minimipunkt, tangerar kurvan i två andra punkter. Bestäm dessa punkterns kooordinater.

(Svar: $x = \pm\sqrt{15}$; $y = \mp\sqrt{15} : 9$)

433. Kurvan $y = a(3x^4 + 4x^3 - 12x^2)$ har ett maximum i A och minimum i såväl B som C (B lägre än C). Bestäm a så, att linjerna AB och BC bli lika långa.

(Svar: $a = 1 : \sqrt{59}$)

434. Bestäm a, b och c så, att maximi- och minimipunkterna på kurvan $y = ax^3 + bx^2 + cx$ komma att falla, den ena i maximipunkten, den andra i en av minimipunkterna på kurvan $y = x^4 - 2x^2$.

(Svar: $a = \pm 2$, $b = -3$, $c = 0$)

435. Bestäm a så, att de tre kurvorna $y = x^4 - 2x^2$, $y = 2x^3 - 3x^2$ och $y = ax^2$ för ett värde på x få parallella, icke sammanfallande tangenter, och visa, att avståndet mellan två och två av dessa tangenter är lika.

(Svar: $a = -1,5$)

436. Konstruera kurvan $y = \dfrac{(x^2-1)(x^2-4)^2}{x^4(x^2-2)}$.

437. Konstruera kurvan $y = \dfrac{8(x^2-1)^2}{x^6+8}$.

438. Bestäm a i ekvationen $y = \dfrac{x^3 - 5x}{x^2 + a}$ så, att funktionskurvan får en enda asymptot, vilken skall vara mittpunktsnormal till sträckan mellan maximi- och minimipunkterna.

(Svar: $a = 3$)

439. Konstruera kurvan $y = \dfrac{(8x^2 - 5)(x^2 - 4)^2}{9x^4}$.

440. Lös systemet:

$$\frac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = 1;\ \cos(x - 45°) \cdot \cos(y + 45°) = \frac{1}{2}.$$

(Svar:

x	45°	45°	225°	225°	−15°	105°	165°	−75°	$+n \cdot 360°$
y	15°	−105°	75°	−165°	−45°	−45°	135°	135°	$+n \cdot 360°$

)

441. Kurvorna $y = x^3 - 3x$ och $y = 4x^2 - 6$ äro givna. En linje $x = a$ skär kurvorna i A och B. Bestäm största och minsta längden av AB, då $-1 \le a \le 0$.

(Svar: max. $= 6\frac{14}{27}$ för $x = -\frac{1}{3}$; min. $= 4$ för $x = -1$)

442. Till hyperbeln $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{10} = 1$ läggas två parallella tangenter och från brännpunkterna normaler mot dessa. Bestäm maximum av den så bildade rektangelns yta.

(Svar: 32 ytenheter)

443. Triangeln ABC har $AB = AC$; A ligger i punkten $(0; -4)$, B och C på kurvan $y = (x^4 - 8x^2) : 4$. Sidan BC är parallell med x-axeln och mindre än 4 enheter. Sök max. av triangeln ABC:s yta.

(Svar: $\frac{128\sqrt{5}}{125}$ ytenheter)

444. I ena ändpunkten av var sin av två konjugatdiametrar till en ellips lägges en normal. Visa, att de trianglar dessa normaler bilda med ellipsens axlar äro lika stora.

445. En punkt på den i andra kvadranten belägna delen av kurvan $y = \dfrac{x^2}{15} - 2x$ sammanbindes med origo. Bestäm max. av denna linjes längd.

(Svar: $\sqrt{30}$ (för $x = -15$))

446. Kurvorna $y = \dfrac{4 - 4x - x^2}{4}$ och $y = \dfrac{x^2 - 12}{4}$ skära varandra i två punkter. Mellan dem lägges, parallellt med y-axeln, en linje, som skär kurvorna i A och B. Bestäm max. av linjen AB.

(Svar: 4,5 (för $x = -1$))

447. Kurvan $y = \dfrac{(x^2-4)^2(x^2-1)}{4}$ är given. Sök excentriciteten hos en ellips, som går genom alla maxima och minima.
(Svar: $\sqrt{10}:5$)

448. I triangeln ABC drages en med BC parallell transversal, som skär AB i D och AC i E; DC och EB råkas i F. Visa, att transversalen delar sidorna enligt gyllene snittet, då ytan av triangeln DEF är maximum.

Tredje häftet

448. Genom punkten $(a; 0)$ som ligger inom cirkeln $x^2 + y^2 = 1$, dragas två vinkelräta kordor, vilka dela cirkelns periferi i fyra delar. Visa, att produkten av två närliggande bågars sinus har värdet $1 - a^2$.
(X.)

449. Man betraktar de trianglar ABC med given yta, som ha en diameter AB i cirkeln K till gemensam bas. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna till K i dess variabla skärningspunkter med CA och CB. *(X.)*

450. A är en godtycklig punkt på en given parabel. Normalen i A skär kurvan ytterligare i B och dess styrlinje i C. Tangenterna i A och B råkas i P. Bevisa, att $PB \perp PC$. *(X.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

451. Lös ekvationen $16\cos^2 x = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x$.
(Svar: $90° + n \cdot 180°$; $52{,}5° + n \cdot 90°$; $82{,}5° + n \cdot 90°$)

452. En liksidig triangel med sidan a vrider sig 180° kring en axel, som halverar ena sidan och är vinkelrät mot en annan. Beräkna rotationskroppens yta.
(Svar: $\frac{15}{16}\pi a^2 + \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$)

453. En rätvinklig triangels hypotenusa delas av inskrivna cirkelns tangeringspunkt i delarna a och b. Visa, att triangelns yta är $= ab$.

454. I vilken punkt på kurvan $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ är subtangenten kortast?
(Svar: I punkterna $(1; \frac{1}{2})$ och $(-1; \frac{1}{2})$)

455. Om man i lexikografisk ordning permuterar bokstäverna g, i, o, o, r, vilken permutation i ordningen blir origo?
(Svar: Den 45:e)

456. En punkt rör sig så, att längden av en från densamma till cirkeln $x^2 + y^2 + 4x = 0$ dragen tangent är lika med punktens avstånd från räta linjen $x + 6 = 0$. Sök orten.
(Svar: Parabeln $y^2 = 4(2x + 9)$)

457. Linjen $y = 2$ delar cirkeln $x^2 + y^2 = 256$ i två segment. Giv ekvationen för den cirkel, som är inskriven i den inom första kvadranten belägna delen av det mindre segmentet.
(Svar: $(x - 6)^2 + (y - 8)^2 = 36$)

458. Diskutera kurvan $y = \dfrac{x^4 - 5x}{x^3 - 1}$.

459. Angiv maximum och minimum hos funktionen $y = 2\sin^2 x \cdot \tan \dfrac{x}{2}$.
(Svar: $y_{\text{max}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$; $y_{\text{min}} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$)

460. Beräkna det mindre segmentet, vilket begränsas av kurvan $y = x^3$ och räta linjen $y = 13x - 12$.
(Svar: 8 ytenheter)

Fjärde häftet

461. AB och AC äro två lika långa kordor i en cirkel. Drag en tangent till cirkeln så, att den del av tangenten , som begränsas av BA:s och AC:s förlängningar delas mitt itu i tangeringspunkten. *(X.)*

462. Drages en parameter i en viss ellips, delas ellipsens yta i förhållandet $1:3$. Beräkna excentriciteten på 0,001 när. *(X.)*

463. Cirkelbågarna AMB och ANB ligga på samma sida omAB. Cirkeln C tangerar båda. Beräkna den största vinkel, under vilken C synes från någon punkt på AB, då den större bågens gradtal är α och den mindres $360° - \alpha$. *(X.)*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet

464. Lös ekvationen $(\sin x + \cos x)^4 = \sin 4x + \cos 4x$.
(Svar: $x_1 = n \cdot 90°$; $x_2 = -56{,}32° + n \cdot 180°$)

465. Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} x - y &= 8{,}13° \\ \tan x \cdot \tan y &= 1\tfrac{1}{3} \end{aligned}\right\}$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c|c} x & 53{,}15° & -45° & +n \cdot 180° \\ \hline y & 45° & -53{,}15° & +n \cdot 180° \end{array}$.)

466. I en likbent triangel är basen = 8 cm. Avståndet från den inskrivna cirkelns medelpunkt till höjdernas skärningspunkt är = 1 cm. Beräkna triangelns yta.
(Svar: $21\frac{1}{3}$ eller 38,4 cm^2)

467. Bottenytan till en pyramid med toppen i O är en kvadrat $ABCD$ med sidan = $4a$. Höjden är = a, och dess fotpunkt delar diagonalen AC, från A räknat, i förhållandet $1:3$. Beräkna vinkeln mellan planen OAB och OAD.
(Svar: 120°)

468. En parallellt stympad kons bottenradier äro 1 cm och 2 cm. Mantelytan är $\frac{1}{7}$ av ytan till den sfär, som tangerar såväl den mindre basytan som manteln. Angiv förhållandet mellan den stympade konens och sfärens volymer.
(Svar: 1 : 12)

469. Mantelytan av en parallellt stympad kon med höjden 2 cm är dubbelt så stor som ytan av en sfär med radien 1 cm. Förhållandet mellan konens och klotets volymer är 3,5. Angiv basradierna.
(Svar: $\sqrt{2}+1$ och $\sqrt{2}-1$)

470. En regelbunden pyramid med kvadratisk basyta skall delas mitt itu med ett plan lagt genom en av baskanterna. Visa att detta plan skär två sidokanter enligt ”gyllene snittet”.

471. För ett likbent parallelltrapets $ABCD$ med de parallella sidorna AB och AC äro hörnens koordinater $A\,(0;0)$, $B\,(a;b)$, $D\,(0;-b)$. Angiv koordinaterna för C.
(Svar: $(\frac{a(a^2+3b^2)}{a^2+b^2}\ \frac{2b^3}{a^2+b^2};)$)

472. För vilket a-värde har ekvationen $4x^3-25x^2+28x+a=0$ två lika rötter?
(Svar: $a=\frac{147}{4}$; $a=-\frac{236}{27}$)

473. Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} xyz+x^3&=27\\ xz+y^2&=9\\ x+z&=6\end{aligned}\right\}$$

(Svar:

x	3	-1	$\frac{3}{4}\mp\frac{i}{4}\sqrt{63}$
y	0	-4	$\frac{9}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{63}$
z	3	7	$\frac{21}{4}\pm\frac{i}{4}\sqrt{63}$

)

474. En liksidig triangel har ett hörn i punkten (5; 3) och motsvarande bas på linjen $2x+y-8=$. Hur stor är dess yta?
(Svar: $\frac{5\sqrt{3}}{3}$)

475. Ett par av stor- och lillaxelns ändpunkter i en ellips äro resp. A och B, ena brännpunkten F och medelpunkten O. Halva storaxeln delas i F enligt gyllene snittet, om $\wedge BFO = \wedge ABO$.

476. Beräkna storleken av den yta, som begränsas av kurvorna $y = (2x)^2$ och $y^2 = 2x$.
(Svar: $1:6$)

477. En rektangels sidor äro a och b. Varje hörn i rektangeln tages till medelpunkt för ellipser med a och b till halvaxlar. Hur stor är ytan av a) den fyrhörning, som bildas, om ellipsernas skärningspunkter med varandra inuti rektangeln sammanbindas, b) den i rektangelns mitt belägna, av ellipsbågar begränsade figur, som har sina hörn i nyssnämnda skärningspunkter.
(Svar: a) $ab(2-\sqrt{3})$; b) $ab\left(\frac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}\right)$)

478. En pendel består av en stång (längd = 5 dm) fästad i medelpunkten till en rät, liksidig cylinders övre yta (radie = 1 dm) och vinkelrätt mot denna. Pendeln roterar kring stångens andra ända, så att stången ständigt befinner sig i samma plan. Hur stor volym alstrar därvid cylindern?
(Svar: $\frac{148\pi}{3}$ dm^3)

479. Genom en upprättstående blomkrukas bottenhål (vilket är mycket litet) har man trätt ett snöre, på vilket man gjort en knut så stor, att den ej går genom hålet. Krukan hänges upp i snöret, varvid dess övre kant kommer att ligga an mot snöret, som antages vara så styvt att det ej därvid böjes. Hur stor volym har den kropp, som blomkrukan alstrar, då den roterar kring snöret som axel? Blomkrukan har formen av en stympad kon med höjden = 16 cm och radierna 12 cm och 8 cm.
(Svar: $\frac{73984\pi}{15}$ cm^3 $= 15,5l$ approx.)

480. Från en klippavsats, 3,4 m ovanför den horisontella marken, uppmätte man vinkeln mellan syftlinjerna till toppen och foten av ett träd och fann den vara 18,6°. Från en punkt på marken, 1 m närmare trädet, fann man även nämnda vinkel (alltså höjdvinkeln till trädtoppen) vara 18,6°. Beräkna trädets höjd.
(Svar: 29,3 m)

481. Om talen r, s, t äro i aritmetisk serie, så gäller detsamma om talen $r(-r+s+t)^2$, $s(r-s+t)^2$, $t(r+s-t)^2$. Visa detta.

482. Beräkna summan av alla hela positiva tresiffriga tal, som varken innehålla 2 eller 3 som faktor.
(Svar: 164 700)

483. Man har två aritmetiska serier: $t_1, t_2, t_3, \ldots$ med summorna $s_1, s_2, s_3, \ldots$ och $T_1, T_2, T_3, \ldots$ med summorna $S_1, S_2, S_3, \ldots$. Om för alla n

$$\frac{s_n}{S_n} = \frac{2n-8}{137-7n}$$

ha serierna en gemensam term med samma nummer i båda. Vilket är detta nummer?

(Svar: 15)