Årgång 16, 1933

Första häftet

575. En normalkorda i en parabel är given till längd och läge. Bestäm enveloppen för parabelns styrlinje. *(X.)*

576. Att genom en given punkt draga en sekant till två givna cirklar så, att de avskurna kordorna bli lika långa.

577. Lös ekvationen

$$\sqrt{a^2+x^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+x^2}\cdot\sqrt{a^2+c^2}=(a+b)(c+x),$$

där a, b och c äro positiva. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

578. Vilka fyrsiffriga tal äro så beskaffade, att summan av de två sista siffrorna är lika med den andra siffran, produkten av första och sista siffrorna lika med summan av de två övriga samt sista siffran kvadraten på den första?

(Svar: 1101 och 2624)

579. Beräkna volymen av den största räta dubbelkon, som kan inskrivas i en regelbunden oktaeder (kant = a) på så sätt, att dubbelkonens spetsar sammanfalla med oktaederns centrum.

(Svar: $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{81}$)

580. I en tresidig pyramid, vars höjd är h och vars basyta utgöres av en liksidig triangel, vars sida är a, inskrives en cylinder med maximivolym. Ovanpå denna cylinder inskrives på liknande sätt en andra cylinder och ovanpå denna en tredje, o.s.v. i oändlighet. Bestäm summan av alla dessa cylindrars volymer.

(Svar: $\frac{\pi a^2 h}{57}$)

581. Sjömän begagna sig av regeln, att avståndet till horisonten i storcirkelminuter (sjömil) räknat är $2\sqrt{h}$, då h är ögats höjd över vattenytan i meter. Undersök, hur nära denna formel är riktig, då h är så liten i förhållande till jordradien, att dess kvadrat får försummas. Jordens omkrets är 40 000 km.

(Svar: Formeln ger värden, som är 4,4% för stora)

582. Lös systemet

$$\left.\begin{aligned}\tan x+\tan y&=\sqrt{3}+1\\ \cos x\cdot\cos y&=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\end{aligned}\right\}.$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c} x & 75^\circ+m\cdot180^\circ & -45^\circ+m\cdot180^\circ \\ \hline y & -45^\circ+n\cdot180^\circ & 75^\circ+n\cdot180^\circ \end{array}$)

583. Visa, att i varje triangel

$$4T = a^2 \sin 2\beta + b^2 \sin 2\alpha$$

om T = ytan, a och b två sidor samt α och β motsvarande vinklar.

584. Eliminera v ur systemet

$$\left.\begin{array}{l} x = \cos v + \cos 2v \\ y = \sin v + \sin 2v \end{array}\right\}.$$

(Svar: $(x^2 + y^2)^2 = 3(x^2 + y^2) + 2x$)

585. En rät linje rör sig så, att dess avskärningar på koordinataxlarna (a och b) uppfylla villkoret $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{k}$, där k är en konstant. Bestäm orten för normalens från origo fotpunkt på linjen.
(Svar: Cirkeln $x^2 + y^2 = kx + ky$)

586. I en likbent triangel är medianen mot ena benet konstant (= m). Visa, att ytans maximivärde är $\frac{2m^2}{3}$.

587. Konstruera en andra grads kurva, då styrlinjen och tre punkter på kurvan äro givna.

588. I en triangel äro två sidor a och b och höjden mot den tredje sidan h. Genom de båda sidornas mittpunkter drages kordan k i den omskrivna cirkeln. Visa, att $k^2 + h^2 = a^2 + b^2$.

589. Ytan av en sfär delas i två kalotter K_1 och K_2 ($K_1 < K_2$) av en parallellcirkel. Den tangentkon, vars bottenperiferi sammanfaller med parallellcirkeln, har mantelytan M. Visa, att

$$\frac{1}{K_1} - \frac{1}{K_2} = \frac{1}{M}.$$

590. Visa (se föreg. ex.), att förhållandet mellan de volymer som inneslutas av M och K_1 samt av M och K_2 är $= K_1^2 : K_2^2$.

591. Om punkterna (1; −1), (2; 3), (6; −4), (0; 3), (−5; −3), (−3; 1), (1; −1) förenas i denna ordning, uppkomma två trianglar och en fyrhörning. Visa, att trianglarna tillsammans ha lika stor yta som fyrhörningen.

592. Vilken av cirklarna $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 + m(x + y - 2) = 0$, där m varierar, har den minsta radien? Hur lång är denna?
(Svar: $m = -3$; radien = $\sqrt{4,5}$)

593. Sök ekvationen för en cirkel, som skär cirkeln $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ under räta vinklar, delar periferin av cirkeln $x^2 + y^2 + x + y = 0$ mitt

itu samt får sin egen periferi mittituskuren av cirkeln $x^2+y^2-6y-1=0$.
(Svar: $x^2+y^2=1$ och $x^2+y^2+x-5y=3$)

594. Sidorna i en triangel äro a, b och 1. Uttrycket $(a-4)^2+(b-1)^2-1$ kan tydligen fås att antaga hur stora värden som helst genom lämpligt val av triangel. Vilken är den undre gränsen för uttryckets värdeförråd?
(Svar: 1)

595. Punkterna $A(a;0)$, $A_1(-a;0)$, $M(0;b)$ samt linjerna L; $x=a$ och L_1; $x=-a$ äro givna. En rörlig linje genom M råkar L och L_1 i resp. P och P_1. Linjerna AP_1 och A_1P råkas i Q. Sök orten för höjdernas skärningspunkt i triangeln AQA_1.
(Svar: $y=\dfrac{2a^2}{b}$)

596. Sök orten för en punkt, varifrån två motstående sidor i en rektangel synas under samma synvinkel.
(Svar: Orten utgöres dels av en rät linje, dels av de bågar av den omskrivna cirkeln, vilka ligga mellan sidorna, dels av de utanför rektangeln belägna delarna av en liksidig hyperbel gående genom hörnen)

597. En cirkel med radien 1 rör sig så, att den ständigt tangerar y-axeln. Från origo lägges en tangent. Sök orten för tangeringspunkten. Konstruera kurvan.
(Svar: Ortens ekvation är $y^2(2-x)=x(x-1)^2$, om medelpunktens x-koordinat är positiv)

598. En fyrhörning har en sådan form, att en cirkel (radie $=r$) delar två sidor i tre lika delar och tangerar de båda andra i deras mittpunkt. Beräkna fyrhörningens vinklar och uttryck dess sidor i r.
(Svar: Fyrhörningen är antingen en rektangel med sidorna $2r$ och $\dfrac{4r\sqrt{2}}{3}$ eller en fyrhörning med vinklarna 86,62°; 90°; 93,38° och 90° samt två sidor $=2r$ och två sidor $=\dfrac{4r\sqrt{2}}{3}$)

599. Tre av en fyrhörnings vinklar äro lika. En cirkel (radie $=r$) lagd genom dessa vinklars spetsar delar två av fyrhörningens sidor mitt itu. Beräkna fyrhörningens vinklar och uttryck dess sidor i r.
(Svar: De lika vinklarna = 104,48°, den fjärde = 46,56°. Två sidor $=r\sqrt{1,5}$ och två sidor $=r\sqrt{6}$)

Andra häftet

600. Sidorna i en plan fyrhörning äro i ordning 3 cm, 4 cm, 6 cm och 5 cm. Hörnen tänkas försedda med ledgångar. Minsta sidan fasthålles. Sök orten för den inskrvna cirkelns medelpunkt. *(X.)*

601. En ellips har sitt centrum i ett av hörnen i en rektangel och går genom de andra tre. Rektangelns yta är A. Hur stor är ellipsens? *(X.)*

602. På ett cirkelrunt papper med radien R utmärkes en punkt P på avståndet $k \times R$ från centrum. Man viker ihop papperet så, att det invikta segmentets båge går genom P. Därpå utslätas papperet åter och en ny vikning företages omkring en annan korda o.s.v. Hur stor del av papperets yta förblir fri från spår av veck hur många gånger proceduren än upprepas? *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

603. Lös ekvationen $(n \cdot x^n)^{n-n^2 \cdot \log x} = 1$
(Svar: $x_1 = \sqrt[n]{10}$; $x_2 = 1 : \sqrt[n]{10}$)

604. Lös ekvationen $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x - \sin 3x$.
(Svar: $a_1 = 60° + k \cdot 120°$; $x_2 = 270° + k \cdot 360°$; $x_3 = 135° + k \cdot 180°$)

605. I en vid A rätvinklig triangel ABC är $AC > AB$. På AC avsättes $AD = AB$. Bestäm kateternas förhållande, om BD delas i tre lika delar av den inskrivna cirkeln.
(Svar: $3 : 4$)

606. På höjden AD i en liksidig triangel ABC tagas punkterna E och F så, att $3 \cdot AE = 2 \cdot AF = AD$. Visa, att de kring trianglarna BEF och BFC omskrivna cirklarna äro lika stora.

607. Bissektriserna till vinkeln A och dess yttervinkel i en triangel ABC råka den omskrivna cirkeln i D och E. Visa, att

$$AD : AE = (b+c)\tan\frac{A}{2} : (b-c).$$

608. I varje rätvinklig heltalstriangel är produkten av mätetalen för hypotenusan och kvadraten på den ena katetmedianen en summa av formen $a^6 + b^6$, där a och b äro hela tal.

609. En cirkel med radien r har sin medelpunkt på en cirkel med radien R. Genom deras skärningspunkt dragas tangenter till cirklarna. Hur stora kordor utskära cirklarna av dessa tangenter?
(Svar: $\sqrt{4R^2 - r^2}$ och $\frac{r}{R}\sqrt{4R^2 - r^2}$)

610. I en rätvinklig triangel ABC äro till hypotenusan, som är given till sin längd, dragna höjden AD, bissektrisen AE och medianen AO. Huru stora äro triangelns vinklar, då a) $\triangle ADO$, b) $\triangle AEO$, c) $\triangle ADE$, är så stor som möjligt?

(Svar: De spetsiga vinklarna äro a) 22,5° och 67,5°; b) 19,08° och 70,92°; c) 25,67° och 64,33°)

611. Två kongruenta, likbenta trianglar med sammanfallande höjder (längd = h) och spetsarna åt olika håll glida i höjdriktningen. För vilket avstånd mellan baserna blir a) den gemensamma ytan ett maximum; b) den volym, som alstras, om denna yta roterar kring höjdriktningen ett maximum?

(Svar: a) $\frac{2h}{3}$; b) $\frac{h}{7}(6-\sqrt{8})$)

612. För vilket värde på r tangerar cirkeln $(x-a)^2+y^2=r^2$ parabeln $y^2=2px$?

(Svar: $r=\sqrt{p(2a-p)}$ och $r=a$)

613. Visa, att $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$ och $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,5$, om $\alpha+\beta=120°$ och $\beta-\gamma=120°$.

614. Om P och P_1 äro punkter på två koncentriska cirklar och i dessa äro inskrivna liksidiga trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ resp., så är

$$\overline{PA_1}^2+\overline{PB_1}^2+\overline{PC_1}^2=\overline{P_1A}^2+\overline{P_1B}^2+\overline{P_1C}^2$$

615. I en triangel äro de tre medianerna dragna. Därvid uppkomma sex deltrianglar. De omskrivna cirklarnas radier äro $R_1, R_2, \ldots, R_6$, och de inskrivna cirklarnas radier äro $r_1, r_2, \ldots, r_6$ tagna i ordning. Visa, att $R_1\cdot R_3\cdot R_5=R_2\cdot R_4\cdot R_6$ och att

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_5}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}+\frac{1}{r_6}.$$

616. Visa grafiskt, att ekvationen $x^3+9x+m(x^2-1)=0$ alltid har tre reella rötter.

617. I ett parallelltrapets $ABCD$ är en av de parallella sidorna AB given till längd (= a) och läge. Sidorna $AD=b$ och $DC=c$ äro givna till längd. Sök orten för diagonalernas skärningspunkt.

(Svar: Cirkeln $\left(x-\frac{ac}{a+c}\right)^2+y^2=\left(\frac{ab}{a+c}\right)^2$, om AB tages till x-axel med A som origo.)

Tredje häftet

618. Tre positiva tal ha det aritmetiska mediet a ; deras harmoniska medium är h. För vilka sådana tal blir det geometriska mediet maximum eller minimum? *(S. Wigert.)*

619. En cirkel med centrum O och en punkt P äro givna. Att i cirkeln inskriva en likbent triangel, i vilken en av de lika sidorna är vinkelrät mot PO, medan den andra går genom P. *(X.)*

620. Från en given punkt dragas tangenterna till en given cirkel. En variabel tangent bildar med de förstnämnda tangenterna en triangel. Sök orten för medelpunkten till den omskrivna cirkeln. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

621. I en cirkelsektor inskrives en cirkel, varvid radien delas mitt itu i tangeringspunkten. Beräkna sektorns medelpunktsvinkel.
(Svar: 73,74°)

622. Två cirklar ha radierna 3 cm och 8 cm samt medelpunktsavståndet 25 cm. Angiv radien i den cirkel som tangerar såväl cirklarna som centrallinjen.
(Svar: 12 cm och 252 cm)

623. Giv ekvationen för den gemensamma normalen till parablerna $x^2 = 4ay$ och $y^2 = 4ax$.
(Svar: $x + y = 3a$)

624. En rörlig, med y-axeln parallell linje råkar parablerna $x^2 = -4y$ och $x^2 = 8(y-2)$ i A och B. Sök orten för mittpunkten till AB.
(Svar: Parabeln $x^2 = -16(y-1)$)

625. En med x-axeln parallell linje råkar parablerna $y^2 = 4ax$ och $x^2 = 4ay$ i A och B. Sök maximum av längden AB, då punkterna A och B ligga i 1:a kvadranten.
(Svar: $\dfrac{3a\sqrt[3]{2}}{2}$)

626. Tangenten i en punkt P på $x^2y = 1$ råkar kurvan i Q. Visa, att PQ delas av y-axeln i förhållandet $2:1$

627. För vilket a-värde skära kurvorna $y = x^3 + a$ och $y^3 + x = 0$ varandra under rät vinkel?
(Svar: $a_1 = 0$; $a_2 = 2$; $a_3 = -2$)

628. Giv ekvationen för den gemensamma tangenten till kurvorna $y = x^3$ och $y^3 = 81x$.
(Svar: $3x - y - 2 = 0$ och $3x - y + 2 = 0$)

629. Sök orten för en punkt, varifrån kateterna i en likbent och rätvinklig triangel synas under samma vinkel.
(Svar: Orten utgöres dels av höjden mot hypotenusan, dels av hypotenusans förlängningar, dels av halva den omskrivna cirkeln)

630. En triangel har ett hörn i origo och sina övriga hörn i skärningspunkterna mellan linjen $y = x + l$ och cirkeln $x^2 + y^2 = 4y + 8$. Bestäm l så, att triangelns yta blir maximum, och angiv maximivärdet.
(Svar: $l_1 = 5$ och $l_2 = -2$; $T_1 = 2,5\sqrt{15}$ och $T_2 = 2\sqrt{2}$)

631. Vilket värde bör a ha i ekvationen $y = x^4 - ax^2 + 6$ för att kurvans maximi- och minimipunkter skola bli hörn i en triangel med tyngdpunkten i origo?
(Svar: $a = 6$)

632. En transversal genom en triangels tyngdpunkt råkar sidorna AB och AC i resp. M och N. Visa, att

$$\frac{AB}{AM} + \frac{AC}{AN} = 3.$$

Fjärde häftet

633. F är den ena brännpunkten i en given ellips; P är en annan given punkt. Sök enveloppen för den variabla ellips, som går genom F, har sin ena brännpunkt i P och den andra på den givna ellipsen.
(X.)

634. Att genom en triangels ena vinkelspets draga en rät linje så, att om perpendiklar från de övriga hörnen fällas mot den sökta linjen de så uppkomna rätvinkliga trianglarna bliva likytiga. *(X.)*

635. Inuti en regelbunden tetraeder är vald en punkt, vars avstånd till sidoytorna förhålla sig som $1:3:4:8$. Beräkna punktens avstånd till tetraederns medelpunkt. *(S. B.)*

Enklare matematiska uppgifter

636. Beräkna $x^2 - y^2$ ur systemet

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= \frac{a+b}{2} \\ bx + ay &= \sqrt{ab} \end{aligned}\right\}.$$

(Svar: $\dfrac{a-b}{4(a+b)}$)

637. Beräkna $\sqrt{x}$ och $\sqrt{x+1}$, då $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} = a$, utan att lösa ekvationen.
(Svar: $\frac{a^2-1}{2a}$ och $\frac{a^2+1}{2a}$)

638. Visa, att ekvationen $\frac{a}{x-p} + \frac{b}{x-q} = 1$ har reella rötter, om $ab > 0$.

639. Ekvationen $4x^2 + 2x + 1 = 0$ har rötterna x_1 och x_2; ekvationen $4y^2 + 2(a+1)y + 1 = 0$ har rötterna y_1 och y_2. Beräkna

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_1)(x_1 - y_2)(x_2 - y_2).$$

(Svar: $\frac{a^2}{16}$)

640. I triangeln ABC är $AB = AC$. Om AC utdrages stycket $CD = CB$, så blir triangeln ABD likbent. Beräkna $AB : BC$.
(Svar: 0,802 eller $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}618$)

641. Visa, att fjärde proportionalen till radierna i den inskrivna och de vid kateterna vidskrivna cirklarna i en rätvinklig triangel är lika med halva omkretsen.

642. Höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel delar denna i två deltrianglar med omkretsarna 0,6 m och 0,8 m. Beräkna den ursprungliga triangelns omkrets.
(Svar: 1 m)

643. Att i en given cirkel inskriva en femhörning, då man känner mittpunkterna till de cirkelbågar, som femhörningens sidor överspänna.

644. Sidan AB i kvadraten $ABCD$ är diameter i en utåt uppritad halvcirkel. P är en punkt på cirkelbågen. Linjerna PC och PD dela AB i tre delar. Visa, att den mellersta av delarna är medelproportional till de båda andra.

645. Visa, att en rät linje är delad enligt ”gyllene snittet”, om mellan delarna x och y råder sambandet $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 3$.

646. Om vinklarna i en triangel bilda aritmetisk serie och motsvarande sidor geometrisk serie, så är triangeln liksidig.

647. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^2 - yz &= 1 \\ y^2 - xz &= 7 \\ z^2 - xy &= -5 \end{aligned}\right\}.$$

(Svar:

x	2	−2
y	3	−3
z	1	−1

)

648. Om n är ett udda tal och man har

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}, \quad \text{så är}$$
$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n}.$$

649. De gemensamma tangenterna till två cirklar med radierna 1 cm och 4 cm begränsa två kongruenta, likbenta trianglar. Beräkna härav avståndet mellan medelpunkterna.
(Svar: $\frac{\sqrt{375}}{3}$ cm eller $\frac{\sqrt{250}}{3}$ cm)

650. Visa, att en triangels sidor bilda aritmetisk serie, om för två vinklar α och β råder sambandet

$$\tan\frac{\alpha}{2}\cdot\tan\frac{\beta}{2}=\frac{1}{3}.$$

651. Bestäm p så, att parabeln $y^2 = 2px$ går genom två av skärningspunkterna för kurvorna $x^2+3y^2 = 16$ och $3x^2 - y^2 = 8$, och visa, att parabeln halverar vinkeln mellan ellipsen och hyperbeln.
(Svar: $p = \pm 1$)

652. En godtycklig punkt inuti en tetraeder har avstånden d_1, d_2, d_3 och d_4 till sidoytorna. De motsvarande höjderna äro h_1, h_2, h_3 och h_4. Visa, att
$$\frac{d_1}{h_1}+\frac{d_2}{h_2}+\frac{d_3}{h_3}+\frac{d_4}{h_4}=1.$$

653. Angiv ekvationen för den tangent, som i två punkter berör kurvan $y = x^4 - 2x^3 - 3x^2$.
(Svar: $y = -4x - 4$)