Årgång 17, 1934

Första häftet

654. Lös ekvationen $\sin x + \cos x + \tan x + \cot x = -2$. *(S. B.)*

655. Tre av rötterna till ekvationen

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

äro x_1, x_2 och x_3. Beräkna $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$. *(X.)*

656. Ett kärl med given inre volym skall ha samma konstruktion som en tändsticksask.Alla väggar skola ha samma givna tjocklek. Hur bör kärlet dimensioneras för att väggarnas sammanlagda volym må bli den minsta möjliga? *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

657. Om a är kanten i en kub, så är ju $a\sqrt[3]{2}$ kanten i en dubbelt så stor kub. Att medelst passare och linjal konstruera denna (”kubens fördubbling”) är ett av de olösliga, klassiska problem på vilka så mycken tankekraft förspillts. Många konstruktioner, ledande till approximativa värden, ha under tidernas lopp föreslagits. Visa, att $5a : (\sqrt{5} + \sqrt{3})$ är ett mycket gott närmevärde på $a\sqrt[3]{2}$ (felet endast c:a 0,01%), och angiv hur detta uttryck konstrueras.

658. En regelbunden 8-hörning och en liksidig triangel äro inskrivna i samma cirkel, och ha ett hörn gemensamt. Den del av motstående triangelsida, som ligger inom 8-hörningen, har då approximativt samma längd som cirkelkvadranten. Hur många procent av kvadrantens exakta längd utgör felet?
(Svar: 0,955%)

659. Lös följande ekvation, i vilken a och b äro positiva tal:

$$\sqrt{a(x-1)} + \sqrt{b(x-2)} = \sqrt{a(3-x)}.$$

(Svar: $x = 2$)

660. För vilka värden på z kunna ekvationerna $x + y = 1$, $x^7 + y^7 = 1$ och $x^3 + y^3 = z$ gälla samtidigt?
(Svar: För z-värdena 1 och −2)

661. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} xy + x + y &= 5 \\ xz + x + z &= 7 \\ yz + y + z &= 11 \end{aligned}\right\}.$$

(Svar: x, y, z äro resp. 1, 2, 3 eller −3, −4, −5)

662. Rötterna till ekvationen $x^2 - 7x + 1 = 0$ betecknas med x_1 och x_2. Beräkna utan att lösa ekvationen $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ och $\sqrt[4]{x_1} + \sqrt[4]{x_2}$.
(Svar: 3 och $\sqrt{5}$)

663. Visa, att
$$\frac{\tan\alpha}{1+\cot^2\alpha} - \frac{\cot\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \tan\alpha - \cot\alpha.$$

664. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = 5\,\text{cm}$, $BC = 3\,\text{cm}$, $CD = 2\,\text{cm}$ och $DA = 7\,\text{cm}$. Vinklarna B och C äro lika stora. Beräkna ytan.
(Svar: $\dfrac{31\sqrt{3}}{4} = 13{,}42\,\text{cm}^2$)

665. I en rätvinklig triangel är höjden mot hypotenusan 1 cm kortare än den ena kateten och 4 cm kortare än den andra. Beräkna höjden.
(Svar: $\sqrt{5} + \sqrt{3+\sqrt{20}} = 4{,}970\,\text{cm}$)

666. I en likbent triangel är basen a. Bissektrisen till en av basvinklarna delar motstående sida i två delar, av vilka den närmast basen belägna är x. Vilka värden kan x antaga?
(Svar: $a > x > \dfrac{a}{3}$)

667. På ett bord ligga n stycken kongruenta koner på mantelytorna med spetsarna i samma punkt och utfylla då precis ett varv. Beräkna toppvinkeln.
(Svar: $\tan\dfrac{\alpha}{2} = \sin\dfrac{\pi}{n}$, om α är toppvinkeln)

668. Diskutera kurvan $8y = (x^2-4)^3(x^2-1)$.

669. Bestäm ekvationen för en cirkel, som i punkten $(3;3)$ tangerar linjen $y = x$ och av x-axeln avskär en korda, vars längd är $2\sqrt{7}$.
(Svar: $(x-5)^2 + (y-1)^2 = 8$ och $(x+5)^2 + (y-11)^2 = 128$)

670. En ellips och en cirkel ha samma medelpunkt och skära varandra under 30°. Parametrarna äro gemensamma kordor. Visa, att ellipsens excentricitet är $1 : \sqrt[6]{3}$.

671. Linjen $3x - 2y = 4$ är normal till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, vars excentricitet är $\sqrt{6} : 3$. Angiv ellipsens ekvation.
(Svar: $x^2 + 3y^2 = 7$ eller $9x^2 + 3y^2 = 31$)

Andra häftet

672. I en likbent triangel är basen av konstant längd och dess mittpunkt O fix. Triangelns motstående vinkelspets är belägen på en fix, rät linje. Sök orten för den inskrivna cirkelns medelpunkt. *(X.)*

673. Mellan vilka gränser ligger $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$, om A, B och C äro en triangels vinklar? Kan man med kännedom om värdet på summan avgöra, huruvida triangeln är spets-, rät- eller trubbvinklig? *(X.)*

674. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^2 - yz &= a \\ y^2 - xz &= b \\ z^2 - xy &= c \end{aligned}\right\}$$

Enklare matematiska uppgifter

675. En triangels sidor betecknas med a, b och c. Visa, att triangeln är rätvinklig, om $(a^4 + b^4 + c^4)^2 = 2(a^8 + b^8 + c^8)$.

676. Ekvationen $x^2 + x + 2 = 0$ har rötterna x_1 och x_2; ekvationen $y^2 - 3y + 1 = 0$ har rötterna y_1 och y_2. Bilda (utan att lösa dessa ekvationer) den ekvation som har rötterna $x_1 y_1$, $x_1 y_2$, $x_2 y_1$ och $x_2 y_2$.
(Svar: $x^4 + 3x^3 + 15x^2 + 6x + 4 = 0$)

677. Visa, att divisionen

$$\frac{9(3x-1)^4 - 7(3x-1)^2 + 1}{9x^2 - 7x + 1}$$

går jämnt upp utan att utföra densamma.

678. En cirkel med centrum på sidan AB i en triangel ABC tangerar sidorna AC och BC. Visa, om cirkelns radie $= r$, att

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{\sin C}{r}.$$

679. I en cirkel med sidorna 13 cm, 11 cm och 15 cm förenas de vidskrivna cirklarnas medelpunkter. Beräkna ytan av den så erhållna triangeln.
(Svar: 341,25 cm^2)

680. I en tetraeder äro fem av kantlinjerna $= a$ och den återstående $= \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Beräkna tangenten för kantvinkeln längs den kortare kantlinjen.
(Svar: 2)

681. Från en punkt P på linjen $x + y = 1$ fällas normalerna PA och PB mot linjerna $2x - y = 3$ och $x + 2y = 4$. Angiv minimivärdet på sträckan AB.
(Svar: $\sqrt{2}$)

682. Koordinaterna för en punkt, belägen inuti en cirkel med centrum i origo, äro $(a;\, b)$. Bestäm ekvationen för den genom $(a;\, b)$ gående räta linje, som skär cirkeln under minsta möjliga vinkel.
(Svar: $ax + by = a^2 + b^2$)

683. Från punkten $(a;\, 0)$ lägges en tangent till kurvan $y = bx^n$. Angiv tangeringspunktens abskissa.
(Svar: $an : (n-1)$)

684. En triangels sidor äro $AB = 10\,\text{cm}$; $BC = 13\,\text{cm}$ och $CA = 9\,\text{cm}$. På AB och BC äro tagna punkterna D och E resp. så, att DE delar triangelytan mitt itu. Angiv minimivärdet på sträckan DE.
(Svar: 6 cm)

685. A och B äro punkter på x-axelns positiva del. Från punkterna $(0;\, a)$ och $(0;\, b)$ synes sträckan AB under vinkeln α. Visa, att $AB = (a+b)\tan\alpha$.

686. En vid A rätvinklig triangel ABC har hörnet A fast i punkten $(a;\, b)$. Hörnet B glider utefter x-axeln, C utefter y-axeln. Sök orten för triangelns tyngdpunkt.
(Svar: Räta linjen $3ax + 3by = 2a^2 + 2b^2$)

Tredje häftet

687. För vilka värden på a har ekvationen

$$\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{a}{(a+1)^2} = \frac{a}{x+a^2}$$

1:o en rot $= a$; 2:o två rötter $= a$; 3:o en dubbelrot $\neq a$? *(X.)*

688. En rät linje med en punkt A, en punkt B utanför densamma och en determinerad linje a äro givna. Bestäm på den givna linjen en punkt X så, att $\overline{BX}^2 = a \cdot AX$. *(X.)*

689. Sök orten för en punkt, som rör sig så, att om normaler fällas mot benen i en likbent triangel, fotpunkterna och basens mittpunkt ligga i rät linje. *(S. B.)*

Enklare matematiska uppgifter

690. Visa, att summan av rötternas kvadrater är densamma i ekvationerna $x^2 + (a+2)x + a = 0$ och $x^2 + ax - (a+2) = 0$.

691. Hur många gånger är den $(3n-1)$:sta digniteten av 81^3 större än den $(2n-1)$:sta digniteten av 9^9?
(Svar: 729)

692. I en aritmetisk serie är summan av de n första termerna n^2. Visa, att summan av de n följande är $3n^2$.

693. Finnes någon rätvinklig triangel så beskaffad, att man från den räta vinkelns spets till hypotenusan kan draga en rät linje, som delas i tre lika delar av den inskrivna cirkelns periferi?
(Svar: Sidornas förhållande är $1:\sqrt{63}:8$)

694. En sida i en rektangel delas i tre lika delar, och delningspunkterna förenas med varsin av motstående sidas ändpunkter. Om föreningslinjerna därvid bilda rät vinkel, hur stort är förhållandet mellan rektangelns sidor?
(Svar: $2:3$ eller $1:3$)

695. I en triangel är en sida $3+\sqrt{5}$, bissektrisen mot denna sida är $3+\sqrt{5}$ och delar densamma enligt gyllene snittet. Beräkna de övriga sidorna.
(Svar: $3\sqrt{2}+\sqrt{10}$ och $\sqrt{10}+\sqrt{2}$)

696. Toppen i en likbent triangel ligger mitt emellan höjdernas skärningspunkt och basen. Beräkna vinklarna.
(Svar: Toppvinkeln = 109,46°)

697. Beräkna vinklarna i en likbent triangel, om höjdernas skärningspunkt ligger på den inskrivna cirkeln.
(Svar: Toppvinkeln = 83,64°)

698. Visa, att

$$\text{a)}\quad \sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{14}$$
$$\text{b)}\quad \cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7} = \frac{1}{2}$$

699. Man har $(1-\sin\alpha) = p\cos\alpha$. Beräkna $(1-\cos\alpha):\sin\alpha$ som funktion av p.
(Svar: $\frac{1-p}{1+p}$)

700. I triangeln ABC är vinkeln $C = 90°$. Visa, att $a+c = b+\tan\left(45°+\frac{A}{2}\right)$.

701. På ett bord ligga två kongruenta, liksidiga koner på mantelytorna med en generatris gemensam. Hur högt över planet ligger basytornas beröringspunkt?
(Svar: $\frac{2h}{3}$, där h är konernas höjd)

702. En cirkelsektor med centrivinkeln 2α ($< 180°$) roterar kring en diameter, som ej råkar sektorbågen. Den härvid alstrade sfäriska ytan är S och de övriga ytornas summa M. Visa, att $S = 2M\tan\alpha$.

703. I triangeln ABC, där vinkeln $C = 90°$ och hypotenusan konstant, dragas bissektriserna BD och AE. När blir a) $CE \cdot CD$ b) $CE \cdot EB$ ett maximum?

(Svar: a) om $B = 45°$ b) om $B = 24{,}47°$)

704. Det finns tre punkter på kurvan $y(x^2+1) = x + a$, i vilka $y'' = 0$. Dessa punkter ligga i rät linje. Sök ekvationen för denna linje.

(Svar: $4y = x + 3a$)

705. En kvadrat $ABCD$ har hörnet A fast i punkten (0; 0); B glider utefter linjen $y = kx + l$. Sök orten för C.

(Svar: Räta linjerna $(k-1)x - (k+1)y + 2l = 0$: $(k+1)x + (k-1)y + 2l = 0$)

706. Punkterna A, B och C ligga i ordning i rät linje. Att på normalen i C bestämma punkten P så, att $\wedge PBC = 3 \wedge PAC$. Möjlighetsvillkor?

Fjärde häftet

707. Om koefficienterna äro rationella och bråket

$$\frac{ax^2+bx+c}{Ax^2+Bx+C}$$

kan förkortas med en lineär faktor, så är $(Bc - Cb) : (Ab - Ba)$ en jämn kvadrat. *(X.)*

708. I triangeln ABC är $\wedge A = 100°$, $\wedge B = 60°$. Punkten P ligger inom triangeln och $\wedge PAC = 30°$, $\wedge PBC = 20°$. Beräkna $\wedge APC$ exakt.

(X.)

709. Två cirklar med centra på x-axeln tangera ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ och råkas under räta vinklar. Sök orten för deras skärningspunkt.

(X.)

Enklare matematiska uppgifter

710. Uppdela $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3$ i faktorer.

(Svar: $3(a+b)(a+c)(b+c)$)

711. Beräkna $\sqrt{2(x-y)^4 + 2(y-z)^4 + 2(z-x)^4}$ genom att först införa $u = x - y$, $v = y - z$.

(Svar: $2(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$)

712. Visa, att i varje triangel är $a^2 + b^2 + c^2 = 4T(\cot A + \cot B + \cot C)$.

713. Lös ekvationen

$$\frac{2\cos 2x - 1}{\sin 2\alpha} + \frac{\tan x}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$

(Svar: $x_1 = 45° - \frac{\alpha}{2} + n \cdot 180°$; $x_2 = \frac{\alpha}{2} - 22{,}5° + n \cdot 90°$)

714. Lös ekvationen $\tan 2x = 2\tan(x+\alpha)$, då $\log\tan\alpha = 0,5963-5$.
(Svar: $1{,}95° + n\cdot 180°$)

715. Lös ekvationen $\dfrac{\cos 2x - \sin 4x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
(Svar: $45° + n\cdot 120°$; $65° + n\cdot 120°$)

716. Två cirklar med radierna a och b tangera varandra i O. En gemensam tangent berör cirklarna i A och B. beräkna ytan av triangeln AOB.
(Svar: $\dfrac{2ab\sqrt{ab}}{a+b}$)

717. Över höjden mot hypotenusan i en rätvinklig triangel som diameter ritas en cirkel. Från hypotenusans ändpunkter dragas tangenter till denna cirkel. Angiv förhållandet mellan ytan av den så erhållna triangeln och den ursprungliga.
(Svar: $4:3$)

718. I en rätvinklig triangel är den ena spetsiga vinkeln α och vinkeln mellan medianerna mot kateterna v. Visa, att $\tan v = 0,75\sin 2\alpha$.

719. I triangeln ABC är vinkeln $A = 60°$. Den diameter i den omskrivna cirkeln, som går genom A, delar BC innantill i förhållandet $1:2$. Beräkna vinklarna B och C.
(Svar: $45°$ och $75°$)

720. Från origo O drages den godtyckliga kordan OA i cirkeln $x^2+y^2=x$. Man utdrager OA över A stycket $AP = 1$. Sök maximivärdet på P:s avstånd från x-axeln.
(Svar: $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$)

721. En sfär med medelpunkten M och radien r är given. En regelbunden tetraeder har tre av sina hörn på sfärens yta och det fjärde utanför sfären. Vilket är det största avstånd, som tetraederns fjärde hörn kan ha från M?
(Svar: $r\sqrt{3}$)

722. I en sektor vars centrivinkel = 90°, inskrives en rektangel med två hörn på bågen. Diagonalen är = cirkelns radie. Visa, att förhållandet mellan rektangelns sidor är $1:2$

723. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = AD$ och $CB = CD$. Dessutom delar $BE \parallel AD$ fyrhörningens yta mitt itu. Visa, att E delar CD enligt gyllene snittet.

724. Två cirklar råkas i C; en gemensam tangent berör cirklarna i A och E. Cirkeln ABC uppritas. Visa, att dess radie är medelproportional till de ursprungliga cirklarnas radier.