Årgång 20, 1937

Första häftet

882. I en triangel, vars alla sidor äro olika, dragas höjderna, bissektriserna och medianerna. Dessa linjers skärningspunkter med motstående sidor äro H_1, H_2, H_3, B_1, B_2, B_3, M_1, M_2, M_3, varvid samma index hänför sig till skärningspunkter med samma sida. Bevisa, att

$$\frac{H_1B_1}{B_1M_1}\cdot\frac{H_2B_2}{B_2M_2}\cdot\frac{H_3B_3}{B_3M_3}=\left(\frac{2p}{R}\right)^2,$$

där $2p$ = triangelns omkrets, R = den omskrivna cirkelns radie.

(Stig Comét.)

883. En tung kropp, vridbar utan friktion omkring en vågrät axel, befinner sig i jämvikt. Om vikten A upphänges i en punkt på kroppen, vrider den sig vinkeln α till sitt nya jämviktsläge. Utbytes A mot B, erhålles i stället vridningsvinkeln β. Vilken belastning hör till vridningsvinkeln $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$? *(X.)*

884. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^n + ry^pz^{n-p} &= a\\ y^n + sx^{n-p}z^p &= p\\ rsz^n - x^py^{n-p} &= c \end{aligned}\right\}.$$

(Ö.)

Enklare matematiska uppgifter

885. Upplös $(x+y)^4 + x^4 + y^4$ i faktorer.
(Svar: $2(x^2+xy+y^2)^2$)

886. Om $a:b=c:d$, så är

$$d\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}+\frac{s}{d}\right)=\frac{1}{a}(sa+rb+qc+pd).$$

887. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} 5x^2 &= 9x+4y+6\\ 5y^2 &= 4x+9y+6 \end{aligned}\right\}.$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 3 & 2 & -1 & -0{,}4\\ \hline y & 3 & -1 & 2 & -0{,}4 \end{array}$)

888. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^2+y&=1\tfrac{5}{16} \\ x+y^2&=1\tfrac{5}{16} \end{aligned}\right\}$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & \frac{3}{4} & -1\frac{3}{4} & 1\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \hline y & \frac{3}{4} & -1\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1\frac{1}{4} \end{array}$)

889. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x+y&=5xyz \\ x+z&=8xyz \\ y+z&=9xyz \end{aligned}\right\}$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \hline y & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \hline z & 0 & 1 & -1 \end{array}$)

890. Lös ekvationen $\dfrac{2}{\cos x} - \dfrac{2}{\sin 2x} = 1 - 2\cot 2x$.
(Svar: $36{,}87° + n \cdot 360°$)

891. En fyrhörning $ABCD$, i vilken $AB = 3\,\text{dm}$, $BC = 4\,\text{dm}$, $CD = 9\,\text{dm}$ och $DA = 6\,\text{dm}$, är försedd med ledgångar i hörnen så, att vinklarna kunna varieras. Vid två tillfällen är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln C. Hur stor är ytan då (exakt)?
(Svar: $10\sqrt{5}$ och $16\sqrt{2}$ dm^2)

892. Punkterna $A\,(2;\,0)$, $B\,(3;\,0)$, $C\,(6;\,0)$, $D\,(9;\,0)$ äro givna. Sök orten för en punkt P, som rör sig så, att $\wedge APB = \wedge CPD$.
(Svar: En cirkel $x^2+y^2=18$)

893. Linjen $x+y=4{,}2$ är radikalaxel till cirkeln $x^2+y^2=1$ och en annan cirkel med radien 3. Bestäm ekvationen för denna cirkel.
(Svar: $(x-5)^2+(y-5)^2=9$ eller $(x+0{,}8)^2+(y+0{,}8)^2=9$)

894. Genom en tangent till ett klot läggas två plan, som dela klotet i tre lika delar. Bestäm vinkeln mellan dessa plan.
(Svar: 38,94°)

895. I bascirkeln till en rät kon med spetsen S är en liksidig triangel inskriven. Om konens toppvinkel är lika med baskantvinkeln i pyramiden $S(ABC)$, vilket är dessa vinklars gemensamma värde?
(Svar: 70,53°)

896. I en rät kon inskrives en sfär. Ovanför denna inskrives en ny sfär, tangerande den förra och mantelytan o.s.v. i oändlighet. För vilken toppvinkel hos konen inträffar, att summan av alla sfärernas volymer blir hälften av konens volym?
(Svar: 53,13°)

897. Sök ekvationen för en kurva, så beskaffad, att ytan av den triangel som begränsas av kurvans normal, motsvarande ordinata och x-axeln är konstant $= a^2$.
(Svar: $y^3 = 6ax^2 + C$)

898. För en vanlig räknesticka, där den övre skalan ger kvadraten på motsvarande tal på den undre, gäller följande: Avstånden (på den övre skalan) mellan delstrecken 1 och 2, mellan 1 och 3 och mellan 1 och 10 äro resp. a, b och c. Visa, att avståndet mellan delstrecken 5 och 6 på den undre skalan är $2(2a + b - c)$.

899. Diskutera kurvan $y = \cos(\sin x)$.

900. En linje genom origo O skär linjen $bx + ay = ab$ i P och linjen $3bx - 2ay = 6ab$ i Q. Angiv linjens ekvation, om $OQ = 4 \cdot OP$.
(Svar: $ay = 9bx$ eller $7ay = 3bx$)

Andra häftet

901. $c_0, c_1, c_2, \ldots$ äro cirklar, som alla ha sina medelpunkter på kurvan $y = kx^2$ $(k > 0)$. Alla tangera de positiva x-axeln, varjämte varje cirkel c_n tangerar den föregående c_{n-1} och befinner sig till vänster om denna. Sök radien i c_n, om radien i c_0 är r_0. *(Stig Comét.)*

902. På en cirkelperiferi fixeras en viss omloppsriktning såsom positiv. A_0 och A_1 äro två givna punkter på periferien. Successivt definieras sedan (för $n = 2, 3, \ldots$) A_n såsom mittpunkten på den båge, som i positiv led går från A_{n-1} till A_{n-2}. Visa, att punkterna A_n, då n växer över alla gränser, närma sig vissa lägen, och angiv dessa lägen. *(Stig Comét.)*

903. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^3 + ryz^2 &= a \\ y^3 + sx^2z &= b \\ rsz^3 - xy^2 &= c \end{aligned}\right\}.$$

(Ö.)

Enklare matematiska uppgifter

904. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{y} + x + y &= 5 \\ \frac{y}{x} - x - y &= -2{,}5 \end{aligned}\right\}.$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & 1{,}5 \\ \hline y & 1 & 3 \end{array}$)

905. Beräkna värdet av $\sqrt{\dfrac{a+2b}{2a+b}}+\sqrt{\dfrac{2a+b}{a+2b}}$, då a och b äro rötter till ekvationen $9x^2-3x=1$.
(Svar: 3)

906. Bevisa formeln

$$\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta).$$

907. Lös ekvationen $2\cos x\cos 2x=\cos^3 x+\sin^3 x$.
(Svar: $135°+n\cdot 180°$; $31{,}72°+n\cdot 90°$)

908. Visa, att i varje triangel ABC

$$\frac{\tan A+\tan B}{\tan A+\tan C}=\frac{\sin 2C}{\sin 2B}.$$

909. Om man viker in hörnen i en triangel av papper så, att vinkelspetsarna sammanfalla i den inskrivna cirkelns medelpunkt, återstå tre obetäckta trianglar. Visa, att ytorna av dessa trianglar äro proportionella mot kvadraterna på den ursprungliga triangelns sidor.

910. Bissektriserna till de spetsiga vinklarna B och C i den rätvinkliga triangeln ABC råka motstående kateter i D och E resp. Hur långa äro kateterna, om $AD=25\,\text{cm}$ och $AE=18\,\text{cm}$?
(Svar: 90 och 37,5 cm)

911. I tetraedern $ABCD$ är $AB=5\,\text{cm}$, $AC=6\,\text{cm}$, $AD=9\,\text{cm}$, $BC=2\,\text{cm}$, $BD=7\,\text{cm}$, och kantvinkeln längs $AB=90°$. Beräkna längden av CD.
(Svar: $5{,}1\sqrt{2}=7{,}213\,\text{cm}$)

912. Om tetraedern $ABCD$ vet man endast, att triangeln ABC har en yta av $6\,\text{cm}^2$, triangeln ABD en yta av $10\,\text{cm}^2$ samt det plana snitt genom AB, som halverar tetraederns volym, en yta av $7\,\text{cm}^2$. Beräkna kantvinkeln längs AB.
(Svar: 60°)

913. Två klotytor tangera varandra utvändigt i O. Två klotytor med centrum i O och radierna a och b begränsa jämte de förstnämnda en ringformig kropp. Hur stor är radien i en klotyta med centrum i O, som delar denna rings volym i två lika delar?
(Svar: $\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}}$)

914. Visa, att det största klotsegment, som får plats i en given liksidig kon under förutsättning att segmentets plana yta ligger i konens basyta, är ett halvklot.

915. Genom punkten (4; 2) dragas två mot varandra vinkelräta linjer. Den ena skär positiva x-axeln i A, den andra positiva y-axeln i B. Bestäm maximum för triangelytan AOB, där O är origo.
(Svar: $6,25$ ytenheter)

916. Från en punkt P inom triangeln (0; 0), (15; 0), (0; 20) fällas normaler mot triangelns sidor. Bestäm kooordinaterna för P så, att dessa normaler bliva proportionella mot resp. triangelsidor, och visa, att P är mittpunkten av höjden mot hypotenusan.
(Svar: $(3,6; 4,8)$)

917. Medelpunkten till cirkeln $x^2 + y^2 - 2x\cos v - 2y\sin v = 0$ faller på linjen $x + 3y = 3$; beräkna vinkeln v.
(Svar: 90° eller 53,13° + $n \cdot 360°$)

918. Diskutera kurvan $y = \sqrt{1 + \sin x}$.

919. Bestäm funktionen $f(x)$, om $f'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}$ och $f(x) = 1$ för $x = \dfrac{\pi}{8}$.
(Svar: $f(x) = 3 - 2\cot 2x$)

920. Kurvorna $y = x^2$ och $y = ax^2 + 3x + b$ skära varandra under rät vinkel i båda skärningspunkterna. Beräkna härav konstanterna a och b.
(Svar: $a = -1$; $b = 0,5$)

921. I kvadraten $ABCD$ inskrives en vid Q rätvinklig triangel PQR så, att P faller i mittpunkten av AB, Q på BC och R på CD. Sök triangelytans maximi- och minimivärde. Kvadratens sida $= 2a$.
(Svar: Max. $= a^2$ för $BQ = a$ (och 0); min. $= \frac{25a^2}{27}$ för $BQ = \frac{a}{3}$ (samt min. $= 0$ för $BQ = 2a$))

Tredje häftet

922. Till kurvan $ax^2 + 2bxy + ay^2 = 1$ drages en tangent. Bestäm tangeringspunkten så, att tangentens avstånd från origo blir maximum eller minimum; $a^2 - b^2 \neq 0$ och $b \neq 0$. *(Stig Comét.)*

923. Angiv heltalslösningar (för x, y och z) till ekvationen $x^2 + y^2 = Az^2$, där A är ett tal, som kan skrivas som en summa av två hela tals kvadrater. *(Stig Comét.)*

924. Volymen av en sfärisk sektor kan anses vara sammansatt av en rät kon och ett sfäriskt segment. För vilken toppvinkel är förhållandet mellan delarnas volymer lika med förhållandet mellan deras buktiga ytor? *(S. L.)*

Enklare matematiska uppgifter

925. Lös ekvationen $5x^4 + 12x^3 - 8x^2 - 8x + 4 = 0$.
(Svar: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$; $x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{11}}{5}$. Ledning: Ordna efter stigande dignitet och komplettera, så att leden bli jämna kvadrater)

926. Två cirklar med radierna 13 cm och 1 cm tangera varandra innantill. En korda i den större cirkeln tangerar den mindre och bildar 30° med centrallinjen. Hur lång är kordan?
(Svar: 24 cm eller $4\sqrt{30}$ cm)

927. Bestäm förhållandet $x : y : z$ ur ekvationssystemet

$$\frac{x+z}{y} = \frac{z}{x} = \frac{x}{z-y}.$$

(Svar: $x : y : z = 2 : 3 : 4$)

928. Lös ekvationen $2\sin x - \tan x = 2\sin 2x + \tan 2x$.
(Svar: $\pm 60° + n \cdot 360°$; $\pm 129{,}04° + n \cdot 360°$; $n \cdot 180°$)

929. I en rektangel med sidorna a och b förlänges den ena diagonalen över båda sina ändpunkter med ett stycke $= x$, som är mindre än rektangelns halva diagonal. På den andra diagonalen avsättas de punkter inom rektangeln, som ligga på avståndet x från denna diagonals ändpunkter. De så erhållna fyra punkterna tagas till hörn i en parallellogram. Skillnaden mellan rektangelns och parallellogrammens ytor kan skrivas $= kx^2$, där k är en konstant. Bestäm k.
(Svar: $k = \frac{4ab}{a^2+b^2}$)

930. Summan av ytorna av en kub och en liksidig kon är konstant. När är summan av deras volymer minimum?
(Svar: Förhållandet mellan kubens kant och konens basradie bör vara $2 : \sqrt{3}$)

931. Om i en sfärisk sektor inskrives ett klot, i mellanrummet mellan detta och spetsen ett andra klot, mellan detta och spetsen ett tredje o.s.v., bli klotens sammanlagda ytor lika med sektorns koniska yta. Bevisa detta.

932. Toppen på en rät cirkulär kon avskäres med ett plan parallellt med basytan. Angiv sannolikheten för att toppkonens totala yta är mindre än den stympade konens, om vinkeln mellan generatrisen och bottenytan är α.
(Svar: $\cos\frac{\alpha}{2}$)

933. En pyramid delas av ett plan parallellt med basytan i två delar.
a) Bestäm sannolikheten för att ingen av delarna är mindre än en

given bråkdel α $(0 < \alpha < 1)$ av den andra. b) Bestäm motsvarande sannolikhet vid liknande delning av ett prisma, om $\alpha = \frac{1}{8}$.

(Svar: a) $\frac{1-\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{1+\alpha}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3} = 0,48$ för $\alpha = \frac{1}{8}$; b) $\frac{1-\alpha}{1+\alpha} = \frac{7}{9}$)

934. Av tolv stänger, alla med längden a, har man hopfogat kantlinjesystemet i en regelbunden oktaeder, som försetts med ledgångar i hörnen. Man utbyter en av stängerna mot en annan med längden x. Bestäm volymen av den deformerade oktaedern och angiv för vilket x-värde volymen är störst.

(Svar: $\frac{a}{6}\sqrt{(a+x)^3(2a-x)}$; $x = \frac{5a}{4}$)

935. Bestäm ekvationen för den gemensamma tangenten till kurvorna $y = x^3$ och $y = (x-1)^3$.

(Svar: $54x - 32y = 27$ och $y = 0$)

936. Genom punkten $(m; n)$ drages en linje med x-interceptet a och vinkelkoefficienten k. Visa, att den linje, vars x-intercept är $a+1$ och vinkelkoefficient $2k$, alltid går genom en fix punkt.

(Svar: Genom punkten $(m+1; 2n)$)

937. $A(-6; 0)$, $B(0; -6)$ och en punkt P i första kvadranten utgöra hörn i en triangel vars yta = 36 ytenheter. Den del av triangelns yta, som faller inom första kvadranten, utgör 5,4 ytenheter. Angiv koordinaterna för P.

(Svar: (2; 4) och (4; 2))

938. Vilka x-värden göra determinanten

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^3 & 2x^3 & 3x^3 \\ 3x^3+1 & 3x^3+2 & 3x^3+3 \end{vmatrix}$$

till maximum eller minimum?

(Svar: $x = 1$ ger maximum och $x = \frac{7}{9}$ minimum)

939. Ekvationen $4x^2 + axy + y^2 + bx + cy - 3 = 0$ betyder två parallella linjer, den ena gående genom (1; 1). Bestäm a, b och c.

(Svar: $a = 4$; $b = -4$; $c = -2$ eller $a = -4$; $b = 4$; $c = -2$)

Fjärde häftet

940. Fem personer få i uppdrag att rita trianglar efter olika direktiv. Den förste skall rita trianglar med någon vinkel = 60°, den andre med någon vinkel = 45°, den tredje med någon = 30°, den fjärde skall alltid börja med att rita en spetsig vinkel, men den femte får fullständigt fria händer. Alla tänkbara trianglar inom varje kategori antagas vara ”likaberättigade”. Den förste ritar tre stycken, och jag har en viss matematisk förväntan, att åtminstone en av dem är spetsvinklig. Hur många måste jag låta den andre (tredje, fjärde, femte) rita, för att min förväntan att hitta åtminstone en spetsvinklig bland hans trianglar skall vara minst lika stor som i första fallet? *(S. L.)*

941. Tre cirklar tangera varandra innantill i O. En tangent i punkten P på den minsta cirkeln skär den mellersta i A_1 och den största i A_0. Bestäm $\lim PA_0 : PA_1$, då P närmar sig O. Punkterna A_0 och A_1 antagas ligga mellan P och skärningspunkten med tangenten i O. *(X.)*

942. En cirkel med centrum på y-axeln tangerar hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Cirkeln och asymptoterna rotera kring y-axeln. Beräkna volymen av den del av det därvid uppkommande klotet, som ligger utanför den av asymptoterna alstrade koniska ytan. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

943. Lös ekvationen $(1-a)x^2 + 2(a-a^2-1)x + a^2 + 1 - a^3 - a = 0$.
(Svar: $x_1 = 1-a$; $x_2 = \frac{a^2+1}{1-a}$)

944. Lös ekvationen $(1-x)a^2 + 2(x-x^2-1)a + x^2 + 1 - x^3 - x = 0$.
(Svar: $x_1 = 1-a$; $x_{2,3} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + a - 1}$)

945. Sök värdet av $\dfrac{3y-y^3}{1-3y^2}$, om $y = \dfrac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}$.
(Svar: $\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$)

946. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{array}{c} x+y=z+1 \\ x^2+y^2=z^2+2 \\ x^3+y^3=z^3+3 \end{array}\right\}.$$

(Svar:

x	$\frac{4+\sqrt{22}}{6}$	$\frac{4-\sqrt{22}}{6}$
y	$\frac{4-\sqrt{22}}{6}$	$\frac{4+\sqrt{22}}{6}$
z	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

.)

947. I triangeln ABC är sidan $AC = 5\,\text{cm}$, $AB = 3\,\text{cm}$. Bissektrisen till vinkeln A delar sidan BC och höjden från B i samma förhållande. Beräkna triangelns yta.
(Svar: $6\,\text{cm}^2$)

948. På samma bas $AB = 12\,\text{cm}$ äro uppritade två trianglar, AMB och ANB så, att cirkeln genom A, M och N har sitt centrum på förlängningen av AB. Beräkna AN, då $AM = 10\,\text{cm}$, $BM = 13\,\text{cm}$ och $BN = 15\,\text{cm}$.

(Svar: 18 cm)

949. Lös ekvationen $\tan 4x = 4\tan x$.

(Svar: $n \cdot 180°$; $\pm 65{,}90° + n \cdot 180°$)

950. Från en punkt P lägges tangentkonen till en sfär. Visa, att de buktiga ytor, som två koncentriska sfärer med P som centrum utskära på konen och sfären, äro lika stora. (Se uppg. 931.)

951. Triangeln AOB har ett hörn i origo O. Ekvationen för sidan AB är $2x - 3y + 6 = 0$ och för medianen från A $11x - 12y + 15 = 0$. Angiv ekvationen för sidan OB.

(Svar: $x + 3y = 0$)

952. Från punkten $(a; h)$ dragas tangenter till kurvorna $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{\lambda} = 1$. Sök orten för kontaktpunkterna, när λ varierar.

(Svar: $hx - ay + ah = 0$)

953. Bestäm transversalaxeln till hyperbeln $x(4y - 3x) = 4$.

(Svar: 4)

954. Koordinaterna för punkterna P och Q äro resp. $(1; 0)$ och $(0; 1)$. Bestäm punkten R på linjen $2y = x$ så, att $PR : QR$ blir maximum och minimum.

(Svar: Max. i punkten $(-\sqrt{0{,}8}; -\sqrt{0{,}2})$; min. i $(\sqrt{0{,}8}; \sqrt{0{,}2})$)

955. P och Q äro punkter på en cirkel. På tangenten i P avsättes a) $PR =$ kordan PQ b) $PR =$ bågen PQ; RQ råkar diametern genom P i S. Bestäm $\lim PS$, när Q närmar sig P. Cirkelns radie = 1; P och Q ligga på samma sida om nyssnämnda diameter.

(Svar: a) $PS = 4$; b) $PS = 3$)

956. Hur många, med hänsyn till numreringen av sidorna, olika tärningar kunna finnas, om man bortser från det vanliga vilkoret, att summan av talen på motstående sidor är 7?

(Svar: 30)