Årgång 21, 1938

Första häftet

957. En cirkel, en punkt A på cirkeln och en punkt B på tangenten i A äro givna. Att konstruera den punkt P på cirkeln, för vilken $AP+BP$ är maximum. *(X.)*

958. Genom centrum till ena basytan i en rät, cirkulär cylinder läggas n st. plan, som tangera den andra basytans omkrets i n ekvidistanta punkter. Den regelbundna, pyramidartade kropp, som dessa plan jämte en basyta och delar av cylindermanteln begränsa, betraktas såsom återstod. Hur stor del av cylinderns volym är då bortskuren? *(X.)*

959. A_0 är en given punkt på x-axeln. Punkterna $A_1, A_2, \dots, A_n$, som ligga på x-axeln, och $B_0, B_1, \dots, B_n$, som ligga på hyperbeln $xy=k$, erhållas på följande sätt: Från A_i drages A_iB_i vinkelrätt mot x-axeln. Hyperbelns tangent i B_i skär x-axeln i A_{i+1}. Sök förhållandet mellan den yta, som begränsas av hyperbeln och x-axeln emellan A_0B_0 och A_nB_n och sammanlagda ytan av trianglarna $A_0B_0A_1$; $A_1B_1A_2; \dots; A_{n-1}B_{n-1}A_n$. *(Stig Comét.)*

960. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x:y+y:z+z:x&=23:6\\ x:z+z:y+y:x&=25:6\\ x+y+z&=6\end{aligned}\right\}.$$

(Lwl.)

Enklare matematiska uppgifter

961. Beräkna den reella roten till ekvationen $x^3+(x+1)^3+(x+2)^3+\cdots+(x+6)^3=0$.
(Svar: $x=-3$)

962. Om p^2-qr, q^2-rp och r^2-pq bilda en aritmetisk serie och $p+q+r\neq 0$, måste även p, q och r bilda en aritmetisk serie.

963. Beräkna $\sqrt[3]{\log\cos 75{,}37°} : \log\sqrt[3]{\cos 75{,}57°}$.
(Svar: 4,230)

964. De vid kateterna vidskrivna cirklarnas radier i en rätvinklig triangel förhålla sig som 3 : 2. Beräkna vinklarna.
(Svar: 36,87° och 53,13°)

965. Lös ekvationen $\frac{1}{2}(1-\sin 2x+\sin 4x)=\sin^2\left(45°-\frac{x}{2}\right)$.
(Svar: $n\cdot 180°$; $\pm 40°+n\cdot 120°$)

966. I triangeln ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B. Sidan AB är 2 cm. Visa, att triangelns yta kan skrivas som

$$\frac{2\sin B \cdot \sin 2B}{\sin 3B}\,\text{cm}^2.$$

Kan triangeln ABC för något värde på vinkeln B bli hälften så stor som den liksidiga triangel, vilken uppritas på sidan AB?
(Svar: $B = 30°$)

967. Volymen av en regelbunden, fyrsidig pyramid är 48 dm^2 och hela ytan 96 dm^2. Bestäm pyramidens höjd.
(Svar: 4 eller 7 cm)

968. En reguljär 6-hörning är omskriven kring basytan till ett halvklot med radien r. Från 6-hörningens alla hörn dragas tangenter till halvklotet, vilka sammanlöpa i en punkt, som tages till toppunkt i en pyramid med sexhörningen som basyta. Beräkna summan av de sfäriska segment, som pyramidens sidoytor utskära ur halvklotet.
(Svar: $4\pi r^2\left(1-\frac{11}{\sqrt{125}}\right) = 0,202r^2$)

969. Summan av alla tolv kantlinjerna i en rätvinklig parallellepiped är 60 cm, och kroppens totala yta är 144 cm^2. Huru stora äro kantlinjerna, då volymen har sitt max.- eller min.-värde?
(Svar: Min. = 108 cm^3 för 6 cm, 6 cm, 3 cm; max. = 112 cm^3 för 4 cm, 4 cm och 7 cm)

970. Sök $\lim_{x\to 0}(x\cdot\sin x - \cos x + 1) : \tan^2 x$.
(Svar: $1,5$)

971. Sök max. och min. av $\sin^4 x + \cos^4 x$.
(Svar: Max. = 1 för $x = n\cdot 90°$; min = $0,5$ för $x = 45° + n\cdot 90°$)

972. Tangenten PT och normalen PN till kurvan $y = x^2 + 2$ i punkten P träffa y-axeln i resp. punkterna T och N. För vilket läge av P, blir ytan av triangeln $PTN = 65$ ytenheter?
(Svar: P skall ligga i (4; 18) eller (−4; 18))

973. Punkten $A(5;3)$ är given. I romben $ABCD$ ligger B på y-axeln, D på x-axeln. Sök orten för C.
(Svar: Hyperbeln $x^2 - y^2 = 16$)

974. Vilket värde får den positiva konstanten a i uttrycket $(1+ax)^{14} + (1-ax)^{14}$ icke överstiga, för att koefficienten för x^{10} i utvecklingen av funktionen i fråga icke skall överstiga 1000?
(Svar: $\sqrt[10]{\frac{1000}{2002}} = 0,933$)

Andra häftet

975. Bestäm n så, att omkretsen av en i en cirkel inskriven n-hörning är en sämre och omkretsen av en i samma cirkel inskriven $(n+1)$-hörning en bättre approximation för cirkelperiferin än den som erhålles, då denna beräknas med approximativa värdet $\pi = 3,14$. Bestäm motsvarande omskrivna månghörningar vid beräkning av cirkelns omkrets, resp. yta med $\pi = \frac{22}{7}$. *(S. L.)*

976. Ett ihåligt klot med den inre radien r väger tomt hälften så mycket som fyllt med en viss vätska. Till vilken höjd skall vätskan ihällas i klotet, för att den gemensamma tyngdpunkten må ligga så lågt som möjligt? *(C.-E. Fröberg.)*

977. En liksidig triangel ABC med sidan $2a$ och tyngdpunkten O är given. M och M_1 äro mittpunkter på resp. AB och BC. Med A som medelpunkt ritas en cirkel med radien a. Med M och M_1 som medelpunkter ritas cirklar med radien $2a$. M tangerar A i P och M_1 skär A i Q. Med O som medelpunkt ritas en cirkel, som omsluter M och M_1 samt tangerar dem i R och S resp.; Q ligger emellan A och R. Beräkna ytan av den kommaliknande figur, som begränsas av bågarna SR, RP, den större bågen PQ samt QS. *(Gösta Danielsson.)*

Enklare matematiska uppgifter

978. Lös ekvationen $\sin x - \cos x = 4 \sin x \cos^2 x$.

(Svar: $135° + n \cdot 180°$; $67{,}5° + n \cdot 90°$)

979. Bestäm de spetsiga vinklarna i den rätvinkliga triangel, i vilken medianerna mot en av kateterna delar höjden mot hypotenusan i förhållandet $3:2$, från den räta vinkelns spets räknat.

(Svar: 54,74° och 35,26°)

980. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = BC = 5\,\text{cm}$ och $CD = DA = 4\,\text{cm}$. Beräkna vinkeln B, om fyrhörningens yta är $12\,\text{cm}^2$.

(Svar: 32,62°)

981. En observatör ser ”högsta” punkten på en förankrad sfärisk ballong under elevationsvinkeln 59,7° och den ”lägsta” under elevationsvinkeln 58,6°. Ballongens diameter är 4 m. a) Vilket värde skulle dessa mätningar, om de vore exakta, ge på ballongcentrums höjd över observatörens öga? b) Mellan vilka gränser ligger denna höjd, om vinkelfelen kunna uppgå till 0,05° och felet i diametern till 1 dm?

(Svar: a) 178,8 m, b) mellan 160 och 202 m)

982. I triangeln ABC är sidan $BC = 6$ cm, medianen från A är 2 cm och triangelns yta är 2,5 cm^2. Beräkna vinkeln A.
(Svar: 135°)

983. Sök summan av den oändliga serien

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{4} + \frac{9}{8} + \frac{16}{16} + \frac{25}{32} + \dots$$

(Svar: 6. Anm. Använd metoden för summation av en geometrisk serie)

984. En triangel ABC har hörnet A i $(0; 12)$, B i $(8; 0)$, och C i $(-4; 0)$. Sök ekvationerna för sidorna hos en kvadrat, som är inskriven i ABC och har en sida utefter BC.
(Svar: $y = 0$; $x = 4$; $x = -2$; $y = 6$)

985. Sök koordinaterna för hörnen till en liksidig triangel, som har ett hörn i origo och de båda andra på linjerna $y = 2$ och $y = 10$.
(Svar: $(0; 0)$, $(\pm 6\sqrt{3}; 2)$, $(\pm 2\sqrt{3}; 10)$)

986. Bestäm ekvationerna för den cirkel, som går genom punkten $(-1; 15)$ och skär cirklarna $x^2 + y^2 = 16$ och $x^2 + y^2 - 12x = 28$ under räta vinklar.
(Svar: $(x+1)^2 + (y-8)^2 = 49$)

987. En cirkel med medelpunkten O och en rät linje L äro givna. En vid P rätvinklig, variabel triangel PRS har hörnet P på cirkelns periferi och R på L; O är därjämte fotpunkt för höjden från P. Sök orten för S.
(Svar: En cirkel genom O)

988. $y^2 = (1 + x^2)^3$ består av två symmetriska grenar. Sök ekvationen för en rät linje, som är tangent till båda grenarna.
(Svar: $2y = \pm 3x\sqrt{3}$)

989. I ett tresidigt hörn äro sidovinklarna 90°, x och $2x$. De sistnämnda vinklarnas gemensamma ben bildar vinkeln y med den räta sidovinkelns plan. Sök maximum för y.
(Svar: 48,59°)

990. Bestäm tyngdpunktens läge hos ett öppet koniskt kärl av tunn plåt med höjden h.
(Svar: $\frac{2h}{3}$ från spetsen räknat.)

Tredje häftet

991. Sammanlagda arean av tre sidoytor i en tetraeder är A. Bestäm maximivärdet av volymen. *(X.)*

992. Vilka reella rötter har ekvationen

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} =$$
$$= \frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n ?$$

(X.)

993. I en parabel drages en korda av längden k samt motsvarande diameter. Den del av denna, som är belägen mellan kordan och kurvan, indelas i n st. lika delar. Genom delningspunkterna dragas kordor parallella med den givna. A_n och G_n beteckna aritmetiska resp. geometriska mediet av alla kordornas längder. Sök $\lim_{n\to\infty} A_n$ och $\lim_{n\to\infty} G_n$. *(Stig Comét.)*

Enklare matematiska uppgifter

994. Lös ekvationen $1 + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1+\sin x + \cos x}$.
(Svar: $135° + n \cdot 180°$)

995. I en rätvinklig triangel drages medianen till hypotenusan. I deltrianglarna inskrivas cirklar, vilkas radier ha förhållandet $8:9$. Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: 36,87° och 53,13°)

996. Beräkna den gemensamma kordan för de om- och vidskrivna cirklarna till en liksidig triangel med höjden h.
(Svar: $\frac{h\sqrt{15}}{4}$)

997. En cirkel är omskriven kring en rätvinklig triangel. Ytorna av segmenten utanför resp. hypotenusan, den längre och den kortare kateten betecknas med S, S_1 och S_2. Beräkna triangelns vinklar, då $2(S_1 - S_2) = S$.
(Svar: 22,5°; 67,5°; 90°)

998. På en rätvinklig triangels sidor uppritas kvadrater utåt. Dessa kvadraters mittpunkter äro hörn i en triangel. Bevisa, att ytan av denna triangel är lika med kvadraten på det aritmetiska mediet till den rätvinkliga triangelns kateter.

999. För en triangel ABC, vars omkrets är 210 cm, gäller relationen $\cot\frac{A}{2} : \cot\frac{B}{2} : \cot\frac{C}{2} = 6:7:8$. Beräkna triangelns sidor.
(Svar: 65 cm; 70 cm; 75 cm)

1000. I triangeln ABC är $\cos^2 A + \cos^2 B - \cos^2 C = 1$. Visa, att triangeln är rätvinklig.

1001. Ekvationen $2x^3-5x^2y+2xy^2+7x^2-4xy-2y^2+9y-9=0$ betyder tre räta linjer. Vilka?

(Svar: $x=1$; $2y-x=3$; $2x-y=-3$)

1002. Mittpunktsnormalerna till sidorna AB och AC i triangeln ABC representeras av ekvationen $3x^2-2xy=y^2$. Bestäm ekvationen för mittpunktsnormalen till BC, om A ligger i (0; 6).

(Svar: $y=2x$)

1003. En tangent i punkten P på kurvan $y=x^3$ skär linjen $y=-4$ i Q. Projektionen av P på sistnämnda linje är R. Sök läget av P, om QR skall bli minimum.

(Svar: I punkten (2; 8) eller $(-\sqrt[3]{4}; -4)$)

1004. På den del av kurvan $y=1+4x-3x^2$, som ligger ovanför x-axeln, väljes en punkt P. A är projektionen av P på x-axeln, och B är kurvans skärningspunkt med y-axeln. Bestäm max. och min. av triangeln PAB:s yta.

(Svar: Max. 1 och $\frac{7}{243}$ ytenheter; min. = 0)

Fjärde häftet

1005. Bestäm sådana siffervärden på a och b, att rötterna till ekvationen $x^4-23x^2+ax+b=0$ kunna skrivas x_1, x_2, $\dfrac{1-x_1}{1+x_1}$, $\dfrac{1-x_2}{1+x_2}$. *(X.)*

1006. A och B äro fasta punkter, Q en rörlig punkt på en parabel. AQ skär diametern genom B i B_1, BQ skär diametern genom A i A_1. Visa, att A_1B_1 har en fix mittpunkt, som är polen till AB och att tangenten i Q är parallell med A_1B_1. *(X.)*

1007. Beräkna volymen av en ”prismatoid” av följande egenskap: Basytan är en kvadrat med sidan a, takytan en med denna kongruent kvadrat, vars diagonaler äro parallella med den förstnämndas sidor, sidoytorna 8 kongruenta, likbenta trianglar vardera med basen a och bildande en bruten, 8-planig ”mantel” mellan tak- och basyta samt slutligen avståndet mellan kvadraternas mittpunkter $=h$. *(B. Lindwall.)*

Enklare matematiska uppgifter

1008. Visa, att $x_1^{11}+x_2^{11}=2^{11}$, om x_1 och x_2 äro rötter till ekvationen $x^2-2x+4=0$.

1009. Lös ekvationen $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\cot x}=\cos 3x$.

(Svar: $n\cdot 180°$; $191{,}95°+n\cdot 360°$; $348{,}05°+n\cdot 360°$)

1010. Lös ekvationen $9\cos 4x + 8\cos^4 x = 0$.
(Svar: $\pm 30° + n \cdot 180°$; $\pm 67{,}21° + n \cdot 180°$)

1011. I en triangel är med vanliga beteckningar $bp = 2r_b^2$. Visa, att r_a, r_b och r_c bilda aritmetisk serie.

1012. Hypotenusan i en rätvinklig triangel är a och den räta vinkelns yttre bissektris, räknad från spetsen till hypotenusans förlängning, är $\dfrac{a}{2}$. Hur lång är höjden mot hypotenusan?
(Svar: $\frac{a}{4}$)

1013. På sidorna AB, BC, CD och DA i fyrhörningen $ABCD$ väljas punkterna P, Q, R, S så, att $AP : PB = BQ : QC = CR : RD = DS : SA = x$ och ytan $PQRS$: ytan $ABCD = 2 : 3$. Sök x.
(Svar: $2 \pm \sqrt{3}$)

1014. Basen PQ i ett cirkelsegment är $2a$. En linje, som drages parallellt med basen genom höjdens mittpunkt, skär bågen i S. Bestäm skillnaden mellan SP och SQ.
(Svar: $\pm a\sqrt{2}$)

1015. En linje, som delar den räta vinkeln i en rätvinklig triangel i förhållandet $1 : 2$, delar även hypotenusan i samma förhållande. Vilken vinkel gör denna linje med hypotenusan?
(Svar: 79,11° eller 46,10°)

1016. På kurvan $y = x^3$ har man tagit en punkt P, vars x-koordinat är a. Tangenten i P skär kurvan i Q. Normalen till kurvan i P skär kurvan i R. Beräkna ytan av triangeln PQR.
(Svar: $4,5a^4 + 0,5$)

1017. En punkt på linjen $3x + y = 8$ förbindes med två punkter Q och R på linjen $7x - y = -1$, så belägna att $PQ = PR = 5$. Var skall P tagas, för att triangeln PQR skall bli så stor som möjligt?
(Svar: P skall ligga i $(3,2;\, -1,6)$ eller $(-1,8;\, 13,4)$)

1018. Till kurvan $y = x^3$ dragas två tangenter och till kurvan $y^2 = 72x$ en tangent med vinkelkoefficienten $= k$. Vilket värde har k, om tangenternas inbördes avstånd äro lika?
(Svar: $k = 3$)

1019. I en likbent rätvinklig triangel är $AB = AC$. B ligger i toppen på parabeln $y^2 = 2x$ och A rör sig utefter kurvan. Sök orten för C och konstruera densamma.
(Svar: Orten är de *två* parablerna: $(x \pm y)^2 = 4(x \mp y)$)

1020. I en cirkel med radien r äro dragna två mot varandra vinkelräta kordor, den ena dubbelt så stor som den andra. Vilka värden kan

avståndet ($= x$) mellan deras mittpunkter antaga?
(Svar: $\frac{r\sqrt{3}}{2} \le x \le r\sqrt{2}$)

1021. Från en punkt på en cirkel med radien x dragas två kordor, som med varandra bilda en vinkel v. Kordornas summa är a. Vilka värden kan x antaga?
(Svar: $\frac{a}{4\cos\frac{v}{2}} < x < \frac{a}{2\sin v}$)