Årgång 22, 1939

Första häftet

1022. En korda av längden l rör sig i parabeln $x^2 = 2py$. Sök orten för mittpunkten och konstruera ortkurvans maximi- och minimipunkter.

(X.)

1023. För vilka ändliga x-värden är funktionsvärdet av

$$f(x) = \frac{\log\left(x^4 - \frac{15}{8}x + \frac{15}{8}\right)}{\log\left(x^4 - \frac{15}{14}x^3 + \frac{15}{14}\right)}$$

obestämt, och vad blir $\lim f(x)$, då x närmar sig dessa värden?

(Stig Comét.)

1024. Om man i en kub lägger fyra plan med samma lutning mot vertikallinjen genom kanterna på kubens bottenyta och likaså behandlar den motstående kubsidan, så uppstå tvenne pyramider, vilka skära varandra utefter en kvadrat, belägen horisontellt och mitt emellan de båda kubsidorna. Här bildas alltså 9 plana ytor, nämligen den lilla kvadraten och 8 lika stora parallelltrapets. Lägger man härtill de 4 trianglar, som ha till baser kubens vertikala kanter och sina motstående spetsar belägna i den lilla kvadratens hörn, så får man kubens alla kanter förenade genom en kombination av 13 plana ytor. Denna kan åskådligt framställas genom att i den s.k. *Plateaus* vätska nedsänka en trådmodell av kubens kanter. – För vilket värde på pyramidsidornas lutningsvinkel blir summan av de 13 plana ytorna ett minimum, och vad är detta minimivärde? Just denna form är det, som i det närmaste realiseras av vätskelamellerna, när försöket utföres noggrant. *(S. Wigert.)*

Enklare matematiska uppgifter

1025. Lös ekvationen

$$\sin x - 5\sin^3 x + 25\sin^5 x - 125\sin^7 x + \cdots = \frac{2}{9}.$$

(Svar: $23{,}58° + n\cdot 360°$; $156{,}42° + n\cdot 360°$)

1026. r och s äro rötterna till ekvationen $ax^2 + 2bx + c = 0$, varvid man antager $r \neq s$. Om man substituerar $x = \dfrac{ry+\alpha}{y+\beta}$, där $\alpha \neq r\beta$, erhålles en förstagradsekvation i y, vars enda lösning ger $x = s$; roten $x = r$ erhålles ej. Varför?

1027. Lös ekvationen $x^{{}^b\log a} + a^{{}^b\log x} = 2a^p$; a och b äro positiva tal, $\neq 1$.
(Svar: $x = b^p$)

1028. Lös följande ekvationssystem, där a är ett positivt tal $\neq 1$ och alla logaritmer positiva

$$\begin{cases} {}^x\log a + {}^y\log a + {}^z\log a = 9 \\ {}^y\log a = 6 \cdot {}^a\log x \\ xyz = a\sqrt[12]{a} \end{cases}$$

(Svar:

x	$\sqrt{a}$	$\sqrt[3]{a}$
y	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt{a}$
z	$\sqrt[4]{a}$	$\sqrt[4]{a}$

)

1029. I en cirkel drages en korda, vars längd = radien. Med kordan som bas uppritas en triangel, vars spets ligger på cirkelns periferi, och vars yta är $\frac{1}{4}$ av cirkelns yta. Hur stora äro triangelns vinklar?
(Svar: 30°; 52,41°; 97,59°)

1030. I en vid A rätvinklig triangel ABC bilda medianen och bissektrisen mot AC en vinkel v med varandra. Bevisa, att

$$\tan v = \left(\tan \frac{B}{2}\right)^3.$$

1031. I en triangel ABC är vinkeln B dubbelt så stor som vinkeln C. Medianen mot AB är lika stor som sidan BC. Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: 60,81°; 79,46°; 36,73°)

1032. Lös ekvationen $\tan^2 x + \cos x = \sin x + \tan x$.
(Svar: $45° + n \cdot 180°$; $38{,}17° + n \cdot 360°$; $141{,}83° + n \cdot 360°$)

1033. En person insatte 200 kr på en sparbanksbok den första i varje månad från den 1 jan. 1935 t.o.m. den 1 jan. 1936. Hur stor var hans behållning den 1 jan. 1837, då räntefoten var 3% och räntan kapitaliserades den den 31 dec. varje år?
(Svar: 2718,17 kr)

1034. En fader insatte på en sparbanksbok 100 kr åt sin son samma dag denne föddes, nämligen den 1 juli 1925 och sedan samma belopp vid varje hans födelsedag till och med den 1 juli 1935. Hur stor var behållningen den 31 dec. 1935? Räntefoten var 3% och räntan kapitaliserades den 31 dec. varje år.
(Svar: 1300 kr)

1035. Fem av en tetraeders kanter äro = a. Bestäm den sjätte, om volymen är $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
(Svar: a eller $a\sqrt{2}$)

1036. Kring punkten $(a; b)$, som ligger i 1:a kvadranten, vrider sig en rät linje, så att dess vinkelkoefficient hela tiden är negativ. I vilket läge av linjen är det mellan koordinataxlarna belägna styckets längd ett minimum?

(Svar: Linjens vinkelkoefficient är $-\sqrt[3]{\frac{b}{a}}$)

1037. Bestäm halvaxlarna i den största ellips, som kan inskrivas i en likbent, rätvinklig triangel, vars hypotenusa $= 2A$, om ellipsens ena axel skall vara parallell med a) hypotenusan, b) ena kateten.

(Svar: Halvaxlarna äro a) $\frac{A}{\sqrt{3}}$ och $\frac{A}{3}$; b) Den inskrivna cirkeln)

1038. Från punkten $P(a; b(\sqrt{2}+1))$ dragas två tangenter till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Hur stor är den yta, som inneslutes av tangenterna och den närmast P belägna ellipsbågen?

(Svar: $ab\left(\sqrt{2}+1-\frac{3\pi}{8}\right)$)

Andra häftet

1039. Konstruera i ett givet cirkelsegment den största möjliga likbenta triangel, då en av de lika sidorna faller utmed segmentets korda.

(S. L.)

1040. Angiv ungefärliga utseendet av den kurva, vars ekvation (i rätvinkliga koordinater) är $\sin mx + \sin ny = a$; $m > o$, $n > 0$, $a \geq 0$.

(Stig Comét.)

1041. Om man framför ett sexsiffrigt helt tal tillfogar en lämplig siffra x, så blir det bildade sjusiffriga talet jämnt delbart med 7. Bestäm x och angiv det minsta och det största sjusiffriga talet.

(C. A. Mebius.)

Enklare matematiska uppgifter

1042. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} 8(x+y)(x^2+y^2) &= 15x^3 \\ (x^2-2y^2)^2 &= x+y^2+1 \end{aligned}\right\}$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & -1 \\ \hline y & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}$)

1043. Sök vinkeln A i en triangel ABC, där

$$\frac{R}{r} = \frac{1+2\sin B+2\sin C}{2\sin B\cdot\sin C}.$$

(Svar: $A = 30°$ eller $150°$)

1044. Lös ekvationen

$$\tan^3 x + \tan 3x(1 - 3\tan^2 x) + (1 + \cot x)(5 + 6\cot x) = 0.$$

(Svar: $x = 146{,}31° + n \cdot 180°$)

1045. Lös ekvationen $\cos x \cdot \tan \dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{\tan x + \cot 2x}$.

(Svar: $\pm 30° + n \cdot 180°$; $(n \cdot 360°;\ 90° + n \cdot 180°)$)

1046. Om $\log \sqrt[3]{90} = a$ och $\log \sqrt{1{,}35} = b$, vad är $\log 36$?

(Svar: $12a - 4b - 6$)

1047. En reguljär n-hörning med stort antal sidor är inskriven i en cirkel, och man vet, att $\cos \dfrac{360°}{n} = 1 - c$, där c är ett mycket litet tal. Visa att uttrycket $\dfrac{n}{2}\sqrt{2c}$ ger ett närmevärde på talet π, om man använder månghörningens omkrets som närmevärde på cirkelns.

1048. Stränderna närmast kring en cirkelrund sjö med ytinnehållet a m^2 luta överallt $\alpha°$ mot horisontalplanet. Om vattnet stiger h m, hur stort blir det översvämmade området, ifall det antages ha formen av en sfärisk zon?

(Svar: $\frac{2h\sqrt{\pi a}}{\sin\alpha}$ m^2)

1049. Mot en fast punkt P rör sig i rätlinig bana med konstant hastighet v m/sek en plan yta. Från P utsändes en partikel A och t sek. senare en annan B, vilka båda röra sig med hastigheten c m/sek längs en normal mot ytan. Sedan de återstudsat från denna, återvända de med oförändrad hastighet till P. Hur många sekunder senare än A inträffar B i P? Av storheterna är t mycket liten och c avsevärt större än v.

(Svar: $\frac{c-v}{c+v}t$)

1050. Vilken normal till kurvan $y = x^3$ är tangent till kurvan $9y^2 = 16x$?

(Svar: $x + 3y = -4$; $x = 0$)

1051. Från vilken punkt på parabeln $y^2 = x$ synes cirkeln $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 1$ under max.- eller min.-vinkel?

(Svar: min. i $(1;\ 1)$; max. i $(\frac{6 \mp \sqrt{11}}{2};\ \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2})$)

1052. Genom punkterna $A(-a;\ 0)$ och $B(a;\ 0)$ dragas två mot varandra vinkelräta linjer, som råkas i C. AC förlänges åt C till med ett stycke lika med $k \cdot \overline{AC}$. Sök orten för den så erhållna punkten.

(Svar: $(x - ak)^2 + y^2 = a^2(1+k)^2$)

1053. Till cirkeln $x^2 + y^2 = r^2$ drages den tangent från punkten $(2r;\ r)$ som icke är parallell med abscissaxeln. Sök orten för tangeringspunkten, då r varierar.

(Svar: Den del av linjen $3x + 4y = 0$ som ligger i fjärde kvadranten)

1054. Till ellipsen $x^2+4y^2=4a^2$ drages den tangent från punkten $(2a;2a)$ som icke är parallell med ordinataxeln. Sök orten för tangeringspunkten, då a varierar.

(Svar: Den del av linjen $2x+3y=0$, som ligger i andra kvadranten)

1055. Vilken är orten för skärningspunkten mellan två tangenter till parabeln $y^2=2px$, om mellan tangeringspunkternas ordinator y_1 och y_2 råder sambandet $y_1y_2=-p^2$?

(Svar: Styrlinjen)

1056. Vilken är orten för skärningspunkten mellan två tangenter till kurvan $y=\dfrac{1}{x^2-1}$, om mellan tangeringspunkternas abscissor x_1 och x_2 råder sambandet $x_1x_2=1$?

(Svar: $y=\frac{1}{x^2-1}$)

Tredje häftet

1057. Om a ligger mellan -1 och $+1$ kan man parallellförflytta kurvan $y=\sin x$ så, att den hela tiden glider mot bägge grenarna av kurvan $y^2=1+2a\cos x+a^2$. *(X.)*

1058. P är ena ändpunkten av en parameter i ett kägelsnitt. Tangenten och normalen i P skära kägelsnittets transversalaxel i T och N resp. En genom P, T och N gående cirkel skär kägelsnittet under den spetsiga vinkeln v. Vilken är kägelsnittets excentricitet? *(Stig Comét.)*

1059. Ett klot skäres i två delar av ett godtyckligt plan. 1:o Bestäm sannolikheten för att ingen av delarna är mindre än bråkdelen α av klotet $(0<\alpha<\frac{1}{2})$. 2:o Visa att sannolikheten för att någon av delarna är mindre än 3% av klotet är större än $\frac{1}{2}$. *(S. L.)*

Enklare matematiska uppgifter

1060. Lös ekvationen $4\sin 3x=3\sin 4x$.

(Svar: $n\cdot 180°$; $\pm 74{,}08°+n\cdot 360°$; $\pm 127{,}41°+n\cdot 360°$)

1061. Lös ekvationen $3\sin ax+4\cos ax+5\sin bx=0$.

(Svar: $\frac{n\cdot 360°-53{,}13°}{a+b}$; $\frac{n\cdot 360°-126{,}87°}{a-b}$)

1062. En sträckas projektioner på två av en liksidig triangels sidor äro 3 cm och 2 cm. Bestäm projektionen på den tredje sidan.

(Svar: 1 eller 5 cm)

1063. I en cirkel inskrives en triangel. Avstånden från medelpunkten till två av sidorna äro 7 och 8 cm. Mellanliggande vinkel är 60°. Bestäm den tredje sidans avstånd från medelpunkten.
(Svar: $\frac{13\sqrt{3}}{3} = 7{,}506\,\text{cm}$)

1064. Om man i en viss rätvinklig triangel drager radier i den inskrivna cirkeln till kontaktpunkterna på två sidor, dela dessa radier triangelns yta i två lika delar. Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: 36,87° och 53,13°)

1065. En sfär (radie = R) skäres av en cirkulär cylinderyta, vars axel går genom sfärens medelpunkt. Volymen av den del av sfären, som ligger utanför cylinderytan, är en viss bråkdel λ av hela sfärens volym. Hur lång är den inom sfären belägna cylindergeneratrisen?
(Svar: $2R\sqrt[3]{\lambda}$)

1066. Till kurvan $y = x^2$ dragas tangenterna i punkterna $A(a; a^2)$ och $B((a+1); (a+1)^2)$. Dessa råkas i C. Beräkna ytan av triangeln ABC.
(Svar: $\frac{1}{16}$)

1067. Från en godtycklig punkt P på ena grenen av kurvan $xy = x^3 - 2$ kan man draga två tangenter PA och PB till kurvan. Visa, att $x_A + x_B = 0$.

1068. Visa, att ekvationen $x^2 + 2axy + a^2y^2 + 2bx + 2aby + c = 0$ betyder två parallella räta linjer under förutsättning att $b^2 > c$, och bestäm dessa linjers inbördes avstånd.
(Svar: $2\sqrt{\frac{b^2-c}{a^2+1}}$)

1069. I en ellips är inskriven en parallellogram, vars sidor bilda de spetsiga vinklarna α resp β med ellipsens transversalaxel. Sök ellipsens excentricitet.
(Svar: $\sqrt{\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}}$)

1070. I en vid A rätvinklig triangel drages höjden mot hypotenusan. Medelpunkterna för de i deltrianglarna inskrivna cirklarna äro M och N. Den i den ursprungliga triangeln inskrivna cirkeln har medelpunkten O. Visa, att $AO = MN$.

1071. I triangeln ABC är $A = 90°$ och $B > C$. En rät linje genom B skär höjden mot hypotenusan i K, kateten AC i L och den omskrivna cirkeln i M så, att $KL = LM$. Visa, att det endast finnes en sådan linje, för vilken L ligger mellan A och C och konstruera denna linje.

Fjärde häftet

1072. Två räta linjer samt en punkt P äro givna. Genom P drages en rörlig rät linje, som skär de förra i P_1 och P_2. Genom P_1 och P_2 dragas linjer med konstanta vinkelkoefficienter. Sök orten för deras skärningspunkt. *(B. Lindwall.)*

1073. En reguljär polyeder har h-sidiga hörn och s-sidiga plana sidoytor; det inskrivna klotets radie är r. Man borrar cylindriska hål med radien ϱ vinkelrätt mot alla sidoytorna in till polyederns centrum och så, att hålens axlar riktas mot centrum. Beräkna den urborrade volymen. *(X.)*

1074. En triangels om- och inskrivna cirklar äro uppritade. Visa, att om en triangel med två hörn på den yttre omskrives kring den inre cirkeln, även det tredje hörnet ligger på den yttre cirkeln. *(E. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1075. Om a väljes så, att rötterna x_1 och x_2 till ekvationen $2x^2 + ax = 2$ satisfiera $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 3$, vilket värde har $x_1^4 + x_1^2x_2^2 + x_2^4$?
(Svar: 15)

1076. Beräkna vinklarna i en triangel, i vilken inskrivna cirkelns medelpunkt delar en bissektris i förhållandet $2:1$ och en annan i förhållandet $3:1$.
(Svar: 36,87°; 53,13° och 90°)

1077. Avstånden till en triangels hörn från höjdernas skärningspunkt äro 28 cm, 8 cm och 8 cm. Hur stora äro avstånden till triangelsidorna från samma punkt?
(Svar: 2 och 7 cm)

1078. Lös ekvationen $2\sin 5x = (2\sin x)^5$.
(Svar: $n \cdot 180°$; $\pm 30° + n \cdot 180°$)

1079. I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = 5\,\text{cm}$, $BC = 3\,\text{cm}$, $CD = 15\,\text{cm}$, $\cos B = -\dfrac{1}{3}$ och $\cos C = -\dfrac{7}{9}$. Beräkna AD.
(Svar: 17 cm)

1080. I en aritmetisk serie med obegränsat antal termer är summan av alla termer med ensiffrigt nummer 100, summan av alla termer med tvåsiffrigt nummer 100^2. Beräkna summan av alla termer med
a) tresiffrigt b) n-siffrigt nummer
(Svar: a) 100^3 b) 100^n)

1081. I ett regelbundet femsidigt hörn är varje kantlinje vinkelrät mot två andra. Bestäm sidovinkeln.
(Svar: 51,83°)

1082. I en sexhörning $ABCDEF$, vars alla vinklar äro lika stora, äro sidorna AB, BC och AF i ordning $3a$, $2a$ och a. Hur stora äro de övriga sidorna, då ytan av triangeln DEF är så stor som möjligt?
(Svar: $CD = 1,5a$; $DE = EF = 2,5a$)

1083. Den fyrhörning, som bildas av axlarna och linjerna $y = ax + b$ och $2ax + by = 3b$ har ett minimum. Vilka värden ha a och b, om punkten $(a; b)$ ligger på den i första kvadranten belägna delen av kurvan $xy + 2x = 9$?
(Svar: $a = 1$, $b = 7$)

1084. En person växlar i Sverige A svenska kronor till danska, reser till Danmark, växlar där dessa danska kronor till svenska, återvänder till Sverige, förvandlar där samma svenska kronor till danska, reser på nytt till Danmark och fortfar som förut. Till vilken summa i svenskt mynt ha de ursprungliga A kronorna blivit transformerade efter n resor över sundet? Kursen är i Sverige 100 d.kr. = s sv.kr och i Danmark 100 sv.kr = d da.kr.
(Svar: $A\left(\frac{10000}{sd}\right)^{n/2}$, om n är ett jämnt tal, $A\left(\frac{10000}{sd}\right)^{(n+1)/2}$, om n är ett udda tal)