Årgång 23, 1940

Första häftet

1085. På övre ändan av en lodrät axel är fästad en plan spegel, vars speglande yta är vänd uppåt och bildar vinkeln v med axeln. Spegeln belyses med vågräta parallella ljusstrålar. Vad ser en iakttagare, som håller sitt öga på axelns förlängning, då axeln roterar? *(X.)*

1086. För vilka trianglar ABC gäller relationen

$$8\cos A\cos B\cos C + 16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = 3$$ *(X.)*

1087. Rötterna till ekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cxd = 0$ betecknas med x_1, x_2, x_3, x_4. Bestäm den ekvation vars rötter äro $(x_1+x_2)(x_3+x_4)$, $(x_1+x_3)(x_2+x_4)$ och $(x_1+x_4)(x_2+x_3)$. *(B. Lindwall.)*

Enklare matematiska uppgifter

1088. Lös ekvationen $\dfrac{x-a}{b+c} + \dfrac{x-b}{a+c} + \dfrac{x-c}{a+b} = 3.$
(Svar: $a+b+c$.)

1089. I en rätvinklig triangel är höjden mot hypotenusan 7 cm och den inskrivna cirkelns radie 3 cm. Beräkna sidorna.
(Svar: 18 cm och $\left(12 \pm \sqrt{18}\right)$ cm.)

1090. I en cirkel med radien 8 cm skära två kordor varandra under 60° vinkel. Den ena kordans delar äro 3 cm och 5 cm. Beräkna den andra kordans delar.
(Svar: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{229} \pm 13\right)$ cm eller $\frac{1}{2}\left(\sqrt{181} \pm 11\right)$ cm.)

1091. Lös ekvationen $\cos x(\cot 2x - \cot 3x) = 1$.
(Svar: $10° + n \cdot 120°$; $50° + n \cdot 120°$.)

1092. En triangels sidor bilda aritmetisk serie med differensen 3 cm. Bestäm minimivärdet på den omskrivna cirkelns radie.
(Svar: 6 cm.)

1093. Bestäm maximivärdet på volymen av en rät cirkulär cylinder, vars mantelyta bildar en rektangel, som kan inskrivas i en given cirkel med radien r.
(Svar: $4r^3\sqrt{3}/9\pi$.)

1094. Bestäm b, uttryckt i a, så att ekvationen $x^2 - 2xy - 3y^2 + 2ax + 2y + b = 0$ kommer att betyda två räta linjer, och angiv orten för dessa linjers skärningspunkt, då a varierar.
(Svar: $b = \frac{1}{4}\left(3a^2 - 2a - 1\right)$; orten är $x + 3y = 1$.)

1095. En godtycklig rät linje genom en parabels brännpunkt F skär parabeln i A och B samt diametern genom parameterns ena ändpunkt i C. Visa, att FC är medelproportional till FA och FB.

1096. I en parabel inskrives en godtycklig triangel ABC. Linjen AB skär i D parabeldiametern genom C; linjen AC skär i E parabeldiametern genom B. Visa, att DE är parallell med parabelns tangent i A.

1097. Parallellogrammen $OABC$ har sidorna OA och OC belägna utefter en hyperbels asymptoter; linjerna AB och BC skära hyperbeln i D, resp. E. Visa, att DE är parallell med diagonalen AC.

1098. A är en given hyperbels ena vertex, P en godtycklig punkt på hyperbeln. Tangenten i P råkar ena asymptoten i B. Linjen AP samt en linje genom B parallell med konjugataxeln råkas i C. Visa, att längden av BC är konstant.

1099. Rektangeln $ABCD$, vars sidor äro parallella med koordinataxlarna, har hörnen A och C belägna på kurvan $xy = a^2$. Diagonalen AC skär koordinataxlarna i P och Q. Visa, att linjerna BP och BQ äro parallella med var sin av kurvans tangenter i A och C.

1100. En rät linje parallell med x-axeln skär kurvan $x^2y + y = 1$ i A och B; tangenterna i A och B råkas i C. Bestäm linjen AB så, att ytan av triangeln ABC blir så stor som möjligt.
(Svar: Linjen $y = \frac{1}{4}$; ytan $= \frac{3\sqrt{3}}{8}$.)

Andra häftet

1101. I ett plan äro givna: en storcirkel tillhörande en klotyta och en annan cirkel, som utgör tvärsnittet av en obegränsad cylinderyta. Klotet och cylindern skära varandra längs en kurva. Konstruera den punkt, där kurvtangenten råkar planet, då tangeringspunktens projektion på planet är given. *(X.)*

1102. Punkterna A och B ligga på var sin av en cirkulär cylinders generatriser. Plan genom punkterna A och B utskära ellipser på cylindern. Härled ekvationerna för den kurva, i vilken ortkurvan för ellipsernas toppar övergår, då cylindern utvecklas i ett plan. *(X.)*

1103. Vilket villkor måste konstanterna i funktionen $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $(a \neq 0)$, uppfylla, för att någon rät linje skall kunna tangera funktionskurvan i två skilda punkter? Bestäm, om villkoret antages uppfyllt, vinkelkoefficienten för denna tangent. *(Stig Comét.)*

Enklare matematiska uppgifter

1104. Lös ekvationen $\dfrac{b^2-c^2}{x-a}+\dfrac{c^2-a^2}{x-b}+\dfrac{a^2-b^2}{x-c}=0.$
(Svar: $a+b+c$.)

1105. Visa, att summan och produkten av de tre talen $\dfrac{y-x}{x+y}$, $\dfrac{vx-uy}{ux+vy}$ och $\dfrac{u-v}{u+v}$ ha samma värde.

1106. I ett parallelltrapets, vars yta är 6,25 cm^2, äro diagonalerna dragna. En av deltrianglarnas ytor är 1 cm^2. Bestäm de övrigas ytor.
(Svar: Antingen 1,5 cm^2, 1,5 cm^2 och 2,25 cm^2 eller 0,25 cm^2, 1 cm^2 och 4 cm^2.)

1107. I triangeln ABC är vinkeln A rät. Vinkeln mellan medianen och bissektrisen mot hypotenusan $= v$. Visa, att $\tan v=\dfrac{b-c}{b+c}$.

1108. Man har $\cos x=(1-a^2):(1+a^2)$. Sök värdet på $\tan\dfrac{5x}{2}$, då x är en vinkel, som uppfyller villkoret: $\frac{\pi}{2}>x>0$ och $a>0$.
(Svar: $\frac{a^5-10a^3+5a}{5a^4-10a^2+1}$.)

1109. Med ena ändpunkten M av en sträcka AM $(=2a)$ som medelpunkt uppritas en cirkel, som skär AM i punkten B. En triangel har två hörn i A och B, dess tredje hörn rör sig utefter cirkeln. Bestäm cirkelns radie och triangelns sidor, när triangelns yta är så stor som möjligt.
(Svar: Radien $=a$, sidorna $=a$, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{5}$.)

1110. En kropp begränsas av en plan cirkelformig yta, en zon och en kalott; kalotten tangerar den plana ytan. Cirkel, zon och kalott ha alla lika ytor. Sök förhållandet mellan radierna i cirkeln och i de klotytor, av vilka zon och kalott utgöra delar.
(Svar: Radierna äro lika stora.)

1111. I ett koordinatsystem är en regelbunden sexhörning uppritad. Tre efter varandra följande hörn ha x-koordinaterna $+14$, $+3$ och -10. Beräkna sexhörningens sida.
(Svar: 14 enheter.)

1112. Punkten P ligger 12,5 cm från medelpunkten O i en cirkel med radien 6,4 cm. Tangenten till cirkeln i en punkt A skär linjen OP i B mellan O och P. Sök maximum för ytan av triangeln ABP, då A rör sig på cirkeln.
(Svar: 8,64 cm^2.)

1113. I en hyperbel med konjugataxeln $2b$ drages en diameter, vars mellan kurvgrenarna liggande del AA_1 synes under rät vinkel från en

brännpunkt F. Bestäm ytan av triangeln AA_1F.
(Svar: b^2.)

1114. Normalen till en hyperbel i en parameterkordas ena ändpunkt skär axlarna i A och B. Mittpunkten av AB liger på en asymptot. Beräkna excentriciteten.
(Svar: $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{20}}$.)

1115. Normalen till kurvan $y = \sin x$ i en maximipunkt P skär normalen i en punkt Q i N. Bestäm y-koordinaten för N, när Q obegränsat närmar sig P.
(Svar: 0.)

Tredje häftet

1116. Beräkna volymen av den kropp, som uppstår, då den båge av parabeln $y = ax^2$, som avskäres av den räta linjen $y = kx$, roterar ett varv kring denna linje. *(Stig Comét.)*

1117. Funktionerna $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ och $Y = \dfrac{Ax+B}{Cx+D}$ äro givna. Då $y = Y$ är deras gemensamma värde d_1 eller d_2. Då $y - Y$ är extremum, är antingen $y = p_1$, $Y = P_1$ eller $y = p_2$, $Y = P_2$. Visa geometriskt, att $d_1 + d_2 = p_1 + P_1 = p_2 + P_2$. *(X.)*

1118. I talteorin visas, att varje primtal p kan skrivas $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, där a, b, c, d äro hela tal eller 0. Använd denna sats för att bevisa, att varje tal kan skrivas som en summa av fyra (ev. mindre antal) heltalskvadrater. *(B. Lindwall.)*

Enklare matematiska uppgifter

1119. Triangeln ABC omskrives av en cirkel. Tangenten till denna i punkten C skär AB:s förlängning i P. Uttryck BP i a, b, och c.
(Svar: $BP = \dfrac{a^2c}{b^2-a^2}$ (om b större än a).)

1120. Förkorta bråket $\dfrac{a^2 - b^2 + ab\left(c^k - c^{-k}\right)}{a^2 + b^2 - ab\left(c^k + c^{-k}\right)}$.
(Svar: $\dfrac{a+bc^k}{a-bc^k}$.)

1121. I triangeln ABC dragas bissektriserna. Dessa skära sidorna i punkterna $A'B'C'$. Ytorna av trianglarna betcknas med T resp. T'. Visa att $T' = T \cdot \dfrac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

1122. I parallellogrammen $ABCD$ (yta= T) delas sidan DC av punkten E i förhållandet $m:n$. AE och BD skära varandra i F. Visa att ytan av fyrhörningen $BCEF = \frac{T}{2} \cdot \frac{m^2+3mn+n^2}{(m+n)(2m+n)}$.

1123. I en likbent triangel är bissektrisen mot en av de lika sidorna dubbelt så stor som bissektrisen mot basen. Sök triangelns vinklar.
(Svar: 36°, 36° och 108°.)

1124. I triangeln ABC är vinkeln $A = 20°$. Bissektrisen till vinkeln B råkar AC i D. Ytan av triangeln ABD är dubbelt så stor som ytan av triangeln BCD. Beräkna vinkeln C.
(Svar: 43,16° eller 136,84°.)

1125. En triangel har ett hörn i punkten (1; 4). Motstående sida skall vara den del av räta linjen $x + y = a$, som begränsas av koordinataxlarna. Bestäm a, då triangelns yta är 3 ytenheter.
(Svar: -1; 2; 3; 6.)

1126. Sök ekvationen för en rät linje, som bildar 45° med linjen $y = 3x+4$ och med koordinataxlarna bildar en triangel, vars yta är 4 enheter.
(Svar: $x-2y\pm 4 = 0$ och $2x+y\pm 4 = 0$.)

1127. Genom punkten (0; 4) drages en rät linje, som med räta linjen $x = -2$ och x-axeln bildar en triangel, vars yta är $16\frac{2}{3}$ enheter. Bestäm linjens ekvation.
(Svar: $12x-y+4 = 0$; $x-3y+12 = 0$; $3x+y-4 = 0$; $4x+3y-12 = 0$.)

1128. Räta linjen L, som är parallell med y-axeln, skär i första kvadranten hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i P och asymptoten i Q. Genom P drages en linje parallell med x-axeln. Den råkar y-axeln i R. Sök det värde ytan av triangeln PQR antar, då linjen L obegränsat avlägsnar sig från y-axeln.
(Svar: $\frac{ab}{4}$.)

1129. I ekvationssystemet

$$x^3 + y^3 + z^3 = 36; \quad x^2 + y^2 = 10; \quad x + y = 2z$$

betyda x, y och z kanterna på en rätvinklig parallellepiped. Beräkna dess volym.
(Svar: 6 eller $15\sqrt{7}-39$.)

1130. För vilka x-värden är funktionen $\frac{1}{1+\cos 3x}$ lika med sin första derivata?
(Svar: $12{,}29° + n\cdot 120°$.)

1131. Sök $\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{\tan x + \cot x} - \sin 4x\right) : x^3$.
(Svar: 8.)

1132. Hur stor är sannolikheten vid ”tippning” av 12 matcher med vardera tre olika möjliga resultat att få minst 10 av dem rätt?
(Svar: Summan av de tre första termerna i utvecklingen $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^{12} \approx \frac{1}{1840}$.)

Fjärde häftet

1133. En triangels sidor äro a, b, c, dess yta T, radien i den omskrivna cirkeln R. Visa, att $T\sqrt{48} \leq a^2+b^2+c^2 \leq 9R^2$, där likhetstecknen gälla för liksidiga trianglar och endast för dessa. Storheterna $q' = \frac{9R^2}{a^2+b^2+c^2} - 1$ och $q = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{48T^2} - 1$ äro därför ≥ 0. Visa, att

$$q\left(1-\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right) \leq 4q' \leq q\left(1+\sqrt{\frac{q}{1+q}}\right),$$

där vartdera likhetstecknet gäller för vissa likbenta trianglar och (om man bortser från de liksidiga) endast för dessa. *(C.)*

1134. På en rät linje L, har man fyra punkter, som i ordning betecknas med A, B, C,D. Visa, att villkoret för att utanför L, finnes en punkt, från vilken AB, BC och CD synas under lika vinklar, är $3AB\cdot CD > BC\cdot AD$. *(C.)*

1135. Två cirklar, den ena omskriven om, den andra inskriven i samma triangel, äro givna. Triangeln kan då (enligt uppgift 1074) förskjutas så, att medan spetsarna förflytta sig utefter den yttre cirkelns periferi, sidorna fortfara att tangera den inre cirkeln. Sök orten för medelpunkten till en vidskriven cirkel. *(H. Tengnér.)*

Enklare matematiska uppgifter

1136. Lös ekvationen

$$\frac{a^3}{(b+x)^2} - \frac{b^3}{(a+x)^2} - a + b = 0.$$

(Svar: $x_{1,2} = -(a+b)$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{a^2-ab+b^2}$.)

1137. Ekvationen $(a-x)(b-x)+c=0$ har rötterna x_1 och x_2. Vilka rötter har ekvationen $(x_1-x)(x_2-x)=c$?
(Svar: a och b.)

1138. AB är diametern i en halvcirkel; P och Q två punkter på bågen, C en godtycklig punkt på diametern. Visa, att $\tan\wedge CPA \cdot \tan\wedge CQB = \tan\wedge PAB \cdot \tan\wedge QBA$.

1139. På taket av en järnvägsvagn finnas två alldeles lika, vertikala skyltar, placerade symmetriskt mitt emot varandra på samma höjd över marken och ställda parallellt med vagnens längdaxel. På vardera skyltens yttersida läser man på en horisontalrad orden MONTE CARLO. Avståndet mellan mittlinjerna till bokstäverna E och C är 2 dm, mellan de övriga bokstävernas mittlinjer 1 dm. Medan vagnen rör sig med en hastighet av 126 km/tim, genomtränges ena skylten av en gevärskula mitt i bokstaven O, varefter kulan går i en horisontell bana tvärs över vagnen och träffar den andra skylten mitt för bokstaven A. Med vilken hastighet passerar kulan över vagnen, om avståndet mellan skyltarna är 3 m?
(Svar: 525 m/sek eller 150 m/sek.)

1140. A har 50 jordgubbar och B 40. C inbjudes att äta med dem ur en gemensam påse. Var och en äter 20 bär. C betalar sin del av kalaset med 10 öre. Hur böra A och B dela pengarna och de överblivna bären?
(Svar: A får t. ex. 6 öre och 18 bär, B 4 öre och 12 bär. De kunna sedan byta 2 bär mot 1 öre på många sätt.)

1141. På en vindruta sitta två torkare A och B, ställda i motsvarande noll-lägen. De sättas igång samtidigt, och man iakttager, att A hinner beskriva en cirkelsektor 10 gånger på 11 sek, medan B beskriver sin sektor 12 gånger på 10 sek. Hur lång tid har förflutit från starten, när A och B för första gången samtidigt inträffa i sina ursprungliga noll-lägen?
(Svar: 55 sek.)

1142. På en cirkelformig biljard med radien 6 längdenheter äro två bollar A och B placerade på samma diameter men på var sin sida om medelpunkten O. Avstånden OA och OB äro 4 och 3 längdenheter resp. I vilken riktning bör bollen A stötas, för att den efter högst en reflexion mot vallen skall träffa B?
(Svar: Mot en punkt P på vallen, så belägen att $\wedge OAP = 46{,}6°$. Den kan också stötas längs diametern genom B.)

1143. Beräkna radien i den största cirkel, som har sin medelpunkt på pos. y-axeln och träffar kurvan $y = x^3$ endast i origo.
(Svar: Radien = $\frac{1}{2}$.)

1144. En triangel har sina hörn belägna i origo samt i punkterna (4; 0) och (0; 3). Hur stor vinkel skall triangeln vridas (i pos. riktning) kring origo som axelpunkt, för att längden av hypotenusalinjens ordinata i origo skall bli ett minimum?

(Svar: $36{,}87° + n \cdot 180°$.)

1145. Vilka äro de hela positiva tal x och y, som uppfylla likheten $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 279$?

(Svar: Talen äro 17 och 14 eller 140 och 139.)

1146. I ett klot med radien r har man utskurit en mycket tunn klotskiva med tjockleken Δy. Radierna från klotets medelpunkt till punkter på periferierna av klotskivans begränsningscirklar äro generatriser till koniska ytor med toppvinklar x och $x + \Delta x$ resp. Beräkna först Δy som funktion av x och sedan $\frac{dy}{dx}$.

(Svar: $\Delta y = 2r \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\Delta x}{4}\right) \sin\frac{\Delta x}{4}$; $\frac{dy}{dx} = \frac{r}{2} \sin\frac{x}{2}$.)