Årgång 24, 1941

Första häftet

1147. Om en triangels hörn speglas i motstående sidor, bilda spegelbilderna en liksidig triangel. Beräkna den ursprungliga triangelns vinklar. *(X.)*

1148. Att konstruera en fyrhörning, då sidornas längder äro givna och två närbelägna vinklar skola vara lika stora. *(S. B.)*

1149. Hur skall ett rektangulärt bord placeras i ett rektangulärt rum, vilket icke är så mycket större än bordet, för att man skall komma lättast fram runt bordet? *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1150. Beräkna värdet av $\dfrac{\log a + \log 2}{\log b}$ om $\log\left(\dfrac{a+2}{b}\right) = \dfrac{1}{2}$ och $\dfrac{\log(a+2)}{\log b} = 2$.

(Svar: $\log 256$.)

1151. Ett lån, som löper efter 6%, amorteras på 20 år. Vid varje halvårs slut betalas ränta för det gångna halvåret och dessutom $\dfrac{1}{40}$ av det ursprungliga lånebeloppet. När inträffar det första gången, att det inbetalade beloppet blir mindre än om lånet amorterats med sinsemellan lika annuiteter vid varje halvårs slut?

(Svar: Efter $8\frac{1}{2}$ år.)

1152. Bissektrisen och höjden från samma hörn i en triangel dela en av de andra höjderna i tre lika delar. Visa, att triangelns sidor förhålla sig som $2:3:\sqrt{7}$.

1153. I triangeln ABC dragas från A höjden, bissektrisen och medianen, vilka råka BC i resp. D, E och F. Sträckorna BD, DE och EF äro lika långa. Beräkna triangelns vinklar.

(Svar: $A = 82{,}81°$; $B = 69{,}30°$; $C = 27{,}89°$.)

1154. Med sträckan $AB = 2r$ som diameter ritas en halvcirkel. Från punkterna P och Q på dess båge dragas normalerna PC och QD mot AB. Bågarna AP, AQ och AB bilda en aritmetisk serie. Beräkna de sistnämnda sträckornas längder.

(Svar: $AC = \dfrac{r}{12}(7+\sqrt{33})$; $CD = \dfrac{2r}{3}$; $DB = \dfrac{r}{12}(9-\sqrt{33})$.)

1155. Tre kantlinjer i en kub äro AB, AC och AD. I vilket förhållande delar planet BCD den kring kuben omskrivna sfärens volym?

(Svar: $7:20$.)

1156. I triangeln ABC är vinkeln $A = 90°$, D är mittpunkten på BC och E mittpunkten på AC. Om triangeln CDE roterar kring AB, blir den av CD alstrade ytan lika med summan av de ytor, som alstras av CE och DE. Beräkna förhållandet mellan sidorna i triangeln ABC.

(Svar: $5:12:13$.)

1157. En rät cirkulär kons basradie och höjd förhålla sig som $3:4$. Ett klot har sin medelpunkt O på konens höjd AB och tangerar dess basyta i B. Vidare är $BO : OA = 3 : 4$. Hur stor del av klotets yta ligger utanför konen?

(Svar: 48%.)

1158. I en fyrsidig pyramid med basytan $ABCD$ och spetsen O har varje kantlinje längden a. Pyramiden skäres av ett plan, som går genom A samt genom mittpunkterna av OB och OD. Beräkna snittytans storlek.

(Svar: $\dfrac{a^2\sqrt{5}}{6}$.)

1159. Ett vinglas hade form av en stympad kon, som i sin nedre, smalare del fortsattes av ett sfäriskt segment, varvid konens sida tangerade segmentets buktiga yta. De för mätningar lättast tillgängliga dimensionerna voro: mynningsdiametern = 4 cm, glasets djup = 6 cm, den stympade konens sida = 5 cm. Hur många centiliter rymde glaset?

(Svar: 4,45 cl. Klotradien beräknas till $\frac{5}{4}$ cm och segmentets höjd till $\frac{18}{17}$ cm.)

1160. A och B äro ändpunkterna av parametern i parabeln $y^2 = 2px$, O är vertex och P en rörlig punkt på kurvan. Sök orten för skärningspunkten mellan AP och en linje genom B parallell med OP.

(Svar: Parabeln $y^2 = 4px - p^2$.)

1161. Bestäm ett tal a sådant, att kurvorna $y = 3\cos x$ och $y = a\sin x + \cos x$ skära varandra vinkelrätt samt angiv skärningspunkternas y-koordinater.

(Svar: $a = \pm\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$; ± 2.)

Andra häftet

1161. Man hyvlar av kanterna på en regelbunden tetraeder så, att varje sidoyta minskar lika mycket runt om. Hur stor del av tetraederns volym är kvar, då av varje ursprunglig sidoyta endast medelpunkten återstår? *(X.)*

1162. I en oändlig följd av storheter, $a_1, a_2, a_3, \dots$ byta först a_1 och a_2 plats, därpå byta a_2 och a_1 plats med a_3 och a_4, därefter a_3, a_4 och a_2 med a_1, a_5 och a_6 o.s.v, så att den n:te operationen innebär platsbyte mellan de n då främsta storheterna och de n därpå följande med bibehållen ordningsföljd inom vardera gruppen. Komma någon gång a_1 och a_2 att samtidigt återfå första, resp andra platsen? *(B-r.)*

1163. O är en fast, P en rörlig punkt på en given cirkels periferi. På tangenten i P avsättes $PT_1 = PT_2 = PO$. Ortkurvan för T_1 och T_2 jämte den givna cirkeln avgränsa fyra områden (ett av dem cirkeln), vilkas ytor skola beräknas. *(G. Printz.)*

Enklare matematiska uppgifter

1164. Lös ekvationen

$$(ax+b)(bx+c)(cx+d)(dx+a) = (a+bx)(b+cx)(c+dx)(d+ax).$$

(Svar: $x_1 = 0$; $x_{2,3} = \pm 1$.)

1165. Lös ekvationssystemet

$$\frac{x(y+z-x)+2}{x^2} = \frac{y(z+x-y)-2}{y^2} = \frac{z(x+y-z)-4}{x^2} = -2.$$

(Svar: $(x,y,z) = (1,-1,-2)$ och $(x,y,z) = (-1,1,2)$.)

1166. Mätetalen för en triangels sidor, mätta i en viss längdenhet äro rötterna till ekvationen $x^3 - 7x^2 + 15x - 9,5 = 0$. Beräkna triangelns yta.

(Svar: $\frac{\sqrt{7}}{4}$ ytenheter.)

1167. Termerna $t_1, t_2, t_3, \dots$ i en aritmetisk serie med $s_n = \alpha n^2 + \beta n$ ordnas i grupper på följande sätt $|\, t_1 \,|\, t_2, t_3 \,|\, t_4, t_5, t_6 \,|\, t_7, t_8, t_9, t_{10} \,| \dots$ Visa att den n:te gruppens termer ha summan $\alpha n^3 + \beta n$.

1168. Visa, att medelpunkterna A och a i två cirklar C och c, tangeringspunkterna på tangenterna från a till C och tangenterna från A till c samt skärningspunkterna mellan de yttre och inre gemensamma tangenterna ligga på samma cirkel men aldrig på samma reguljära polygon.

1169. En gemensam sekant till två cirklar C och c i samma eller olika plan skär C i A och B samt c i a och b. Sök relationen mellan längderna S och T av tangenterna till C från a och b samt längderna s och t av tangenterna från c till A och B.

(Svar: $S \cdot T = s \cdot t$.)

1170. I en cirkel med diametern D äro inskrivna: en fyrhörning med sidorna a, b, c och d, en med sidorna a, c, d och b samt en med sidorna a, d, b och c i ordning tagna. Vinklarna mellan de riktningar av diagonalerna i de tre fyrhörningarna som gå mot ändpunkterna av sidan a äro resp. u, v och w. Beräkna a, b, c och d.
(Svar: $a = D\cos\left(180° - \frac{u+v+w}{2}\right)$, $b = D\cos\left(\frac{u+v-w}{2}\right)$,
$c = D\cos\left(\frac{v+w-u}{2}\right)$, $d = D\cos\left(\frac{w+u-v}{2}\right)$.)

1171. I cirkelsektorn OAB drages normalen i P mot kordan AB. Normalen skär sektorns båge i E (mellan A och B) och radien OA i F (mellan O och A). Om $EP = PF$, så är $\cos\wedge AOB = -\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{AB}}$.

1172. AA_1 och BB_1 äro två kordor i en cirkel, O är deras skärningspunkt och P en punkt på cirkeln; BP skär AA_1 i L, AP skär BB_1 i M. Om $\overrightarrow{OL} : \overrightarrow{LA_1} = l$ och $\overrightarrow{OM} : \overrightarrow{MB_1} = m$ så är $lm = \sin^2\wedge APB : \sin^2\wedge AOB$.

1173. Hur skall man dela en sträcka i två delar för att det ena av de klot, som ha delarna till diametrar skall få samma volym som det område mellan kloten, vilket ligger inom klotens gemensamma omskrivna kon?
(Svar: Enligt gyllene snittet.)

1174. I en halvcirkel drages en korda AB. I kordans ändpunkter dragas tangenterna till cirkeln; dessa skära varandra i C. Bestäm kordans medelpunktsvinkel, så att den volym, som alstras av triangeln ABC vid rotation kring halvcirkelns diameter delas mitt itu av den klotyta, som halvcirkeln alstrar.
(Svar: 90°.)

Tredje häftet

1175. Vilken cirkel skär var och en av tre cirklar i rymden i två punkter? *(N. J.)*

1176. Sök orten för mittpunkten av det mellan koordinataxlarna belägna stycket av en tangent till cirkeln $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Studera specialfallen 1:o $a = b = 0$; 2:o $a = r$, $b = 0$; 3:o $a = b = r$. *(Lwl.)*

1177. I en cirkel drages en korda KL; A och B äro fasta punkter på den ena bågen, P en rörlig punkt på den andra. Linjerna PA och PB avgränsa sträckan XY på KL. Konstruera P så, att XY blir maximum. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1178. Bestäm det minsta tolvsiffriga talet, som är en jämn kvadrat.
(Svar: 100 000 147 984. Ledning: $\sqrt{10^{11}}$ beräknas t.o.m. heltalsdelens sista siffra, som tages en enhet för hög.)

1179. Ekvationen $x^3 - 3x + 1 = 0$ har rötterna x_1, x_2 och x_3. Vilka rötter har då ekvationen $\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \frac{1}{x - x_3} = 0$?
(Svar: ± 1.)

1180. Ekvationen $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2 + x^2 + \frac{3x^2 + 3x}{2x-1} = 2$ är given. Beräkna de båda värdena av $z = x + \frac{x+1}{2x-1}$.
(Svar: 1 och $-1,5$.)

1181. För vilka värden på k kan kvadraten på summan av den konvergenta oändliga serien $a + ak + ak^2 + \ldots$ skrivas som en ny oändlig geometrisk serie med första termen a^2?
(Svar: $1 - \sqrt{2} < k < 1$.)

1182. I en cirkelsektor OAB är radien = 20 cm; höjden från medelpunkten O mot kordan AB är 15 cm. Beräkna radien i den cirkel, som kan inskrivas i den figur, som begränsas av bågen AB, radien OB och normalen från A mot OB.
(Svar: 7,5 cm.)

1183. Tangenterna för en triangels vinklar förhålla sig till varandra som talen $\sqrt{0,75}$, $1,5$ och $1,5 + \sqrt{3}$. Beräkna vinklarna.
(Svar: 45°, 60° och 75°.)

1184. De cirkelytor som begränsa en klotskiva, ha båda radien 15 cm. Klotskivans tjocklek är 30 cm. Genom två meridianplan, som bilda 45° med varandra, utskäres ur klotskivan ett parti i form av en kil, vars egg sammanfaller med klotskivans axel. Beräkna det utskurna partiets totala yta.
(Svar: $\frac{1}{4}[1800 + \pi(1125 + 450\sqrt{2})] = 1833$ cm^2.)

1185. Diagonalvinkeln i ett regelbundet femsidigt hörn är 60°. Beräkna sidovinkeln.
(Svar: 36°.)

1186. Av en liksidig kon behålles bascirkelns omkrets och en med denna orubbligt förbunden generatris. Hur stor yta överfar bascirkeln vid rotation kring generatrisen, om konens sida är s?
(Svar: πs^2.)

1187. En triangel har ett hörn i punkten (3; 0). Två av medianerna falla utefter koordinataxlarna, den tredje utefter linjen $y = x$. beräkna triangelns yta.
(Svar: 13,5 ytenheter.)

1188. En liten kula fixerades på ett horisontellt papper och en på papperet ställd parallellepipedisk metallklots fick tangera kulan i tre olika lägen. För varje läge ritades den tangerande metallytans skärningslinje med papperet. De erhållna linjerna må betecknas med L_1, L_2 och L_3. Om man valde L_1 till x-axel och skärningspunkten mellan L_1 och L_2 till origo i ett rätvinkligt koordinatsystem, befunnos koordinaterna (uttryckta i mm) för en viss punkt på L_2 vara (20; 80) samt för koordinaterna för två punkter på L_3 vara resp. (60; −50) och (−60; 70). Beräkna kulans radie.
(Svar: 2,7 mm.)

1189. I en likbent spetsvinklig triangel ABC dragas höjderna, vilka skära sidorna i A_1, B_1 och C_1. Bestäm maximivärdet av förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC. Beräkna vinklarna i triangeln ABC, om förhållandet är $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.
(Svar: $\frac{1}{4}$ (för alla spetsvinkliga trianglar); toppvinkeln 45° eller 72,96°.)

Fjärde häftet

1190. Upplös $\dfrac{\sin 2x}{2} - \cos^2 v \sin x - \dfrac{\sin^3 v}{2}$ i två faktorer. *(X.)*

1191. I tetraedern $ABCD$ är basytan ABC given. Normalen till basytan i en punkt P skär sidoytornas plan i Q_1, Q_2 och Q_3. Om $PQ_1 + PQ_2 + PQ_3$ bibehåller samma värde, hur P än väljes inom triangeln ABC eller på dess omkrets, var ligger då hörnet D? *(X.)*

1192. Genom en fix punkt på en cirkel drages en korda, som skär en fix diameter i P och periferin i Q. Bestäm maximilängden av sträckan PQ. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1193. Förenkla utrrycket

$$\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}\right)^2 : \left[\frac{1}{(a-b)^2}+\frac{1}{(b-c)^2}+\frac{1}{(c-a)^2}\right]$$

(Svar: 1.)

1194. Lös ekvationssystemet

$$\frac{1-x^2}{1+x^2}+\frac{1-y^2}{1+y^2}=1{,}6$$
$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}=0{,}6$$

(Svar: $x = y = \frac{1}{3}$.)

1195. Förenkla uttrycket $\sqrt{(\log ab)^2 - \log a^4 \cdot \log b - 4\log \frac{a}{10b}}$.
(Svar: $\log \frac{a}{100b}$.)

1196. I en triangel med omkretsen $2p$ är $r_a = a$. Beräkna $r_b + r_c$.
(Svar: p.)

1197. I triangeln ABC äro de medianer som dragas från B och C vinkelräta mot varandra. Beräkna $(b^2 + c^2) : a^2$.
(Svar: 5.)

1198. Lös ekvationen $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1,5$.
(Svar: 22,5° + $n \cdot 45°$; ±60° + $n \cdot 1280°$.)

1199. I en vid A rätvinklig triangel ABC dragas medianen AM och bissektrisen AD. Triangeln AMD befinnes utgöra $13,4$ % av triangeln ABC. Beräkna dennas vinklar.
(Svar: 30,0°; 60,0°; 90,0°.)

1200. Tre lika cirklar äro lagda så, att var och en går genom de två övrigas medelpunkter. Till cirklarna dragas de tre tangenter, som tangera två av cirklarna och som delvis ligga inom den tredje. Dessa tangenter bilda en triangel, vars yta sökes. Cirklarnas radier äro r.
(Svar: $r^2\left(\frac{13\sqrt{3}}{4} - 3\right)$.)

1201. En kub och en regelbunden oktaeder äro omskrivna kring samma sfär med radien r. Visa att polyedrarnas hörn alla ligg apå en annan klotyta och angiv dess radie.
(Svar: $r\sqrt{3}$.)

1202. Tangenten i en punkt P på en ellips råkar storaxeln i M och lillaxeln i N. Storaxelns ändpunkt A förenas med P, varvid AP förlängd skär lillaxeln i B. Visa, att MN och AB delas enligt gyllene snittet i P, om trianglarna PAM och PBN äro lika stora.

1203. I den vid A rätvinkliga triangeln ABC är $AB : AC = k$. Bestäm excentriciteten för en genom A gående ellips med brännpunkterna i B och C.
(Svar: $\frac{\sqrt{k^2+1}}{k+1}$.)