Årgång 25, 1942

Första häftet

1204. Toppen i en pyramid utgöres av ett regelbundet n-sidigt hörn. Tre på varandra följande sidokanter ha längderna a, b och c. Beräkna de övrigas längd. *(X.)*

1205. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 1 + (y-z)^2 &= 2x \\ 16 + (z-x)^2 &= 8y \\ 81 + (x-y)^2 &= 18z \end{aligned}$$

(X.)

1206. I likheten $(1+\sqrt{5})^n = A_n + B_n \cdot \sqrt{5}$, där $n = 1, 2, \ldots$, äro A_n och B_n positiva, hela tal. Visa, att såväl A_n som B_n äro jämnt delbara med 2^{n-1}. *(Stig Comét.)*

Enklare matematiska uppgifter

1207. Genom en punkt inom en triangel dragas linjer parallella med triangelns sidor. De stycken av dessa linjer, som ligga inom triangeln äro alla lika långa. Beräkna deras längd uttryckt i sidorna.

(Svar: $\dfrac{2abc}{ab+ac+bc}$.)

1208. Visa att $\sqrt{\cos^4 \dfrac{\alpha}{4} - \cos\dfrac{\alpha}{2}} + \sqrt{\sin^4 \dfrac{\alpha}{4} + \cos\dfrac{\alpha}{2}} = 1$.

1209. I en likbent triangel ABC tangerar den inskrivna cirkeln triangelns sidor i punkterna A_1, B_1, C_1. Förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC är $\dfrac{3}{16}$. Beräkna toppvinkeln i triangeln ABC.

(Svar: 28,96° eller 97,18°.)

1210. I triangeln ABC är $AB = AC$. Från B dragas bissektrisen och medianen mot AC. Bestäm vinkeln mellan bissektris och median, om den senare är lika lång som sidan AC.

(Svar: 2,84°.)

1211. I en likbent triangel ABC tangera de vidskrivna cirklarna sidorna i punkterna A_1, B_1 och C_1. Visa, att förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC är maximum, då triangeln ABC är liksidig[1].

[1] För godtyckliga trianglar är både i ex. 1209 och 1211 $\Delta A_1B_1C_1 : \Delta ABC = r : 2R \leq \frac{1}{4}$, varvid likhet är möjlig endast för liksidiga trianglar.

1212. En tangent till kurvan $y = x^2$ bildar med x-axeln och linjen $x = 2$ en triangel. Bestäm tangeringspunkten så, att triangelns yta blir så stor som möjligt.
(Svar: (4/3; 16/9).)

1213. Bestäm längden av den fokalradie hos hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, vars mittpunktsnormal tangerar hyperbeln.
(Svar: $4a$.)

1214. Bestäm minsta längden av den tangent, som kan dragas från någon punkt på konjugataxeln till hyperbeln $x^2 - 3y^2 = 12$.
(Svar: 6 längdenheter.)

1215. En rörlig tangent till parabeln $y^2 = 4ax$ skär den fasta diametern $y = b$ i B och topptangenten i C. Sök orten för mittpunkten av BC.
(Svar: Parabeln $2y^2 - 3by + ax + b^2 = 0$.)

1216. En punkt P på storaxeln till en ellips med brännpunkterna i F och F_1 är så belägen, att $FP : PF_1 = 3 : 4$. De ellipsnormaler, som gå genom P och icke sammanfalla med axeln, äro vinkelräta mot varandra. Beräkna excentriciten.
(Svar: $\frac{1}{5}$.)

1217. Tangenterna till en hyperbel i ena parameterkordans ändpunkter skära en asymptot i A och B. Sträckan AB är dubbelt så stor som parametern. Beräkna vinkeln mellan asymptoterna.
(Svar: 60°.)

1218. Diskutera kurvan $y = x\sqrt{\dfrac{5-3x}{x+1}}$.

Andra häftet

1219. Inom en given spetsvinklig triangel ABC väljes en punkt P. Cirklar uppritas med PA, PB och PC som diametrar. När har den figur, som begränsas av dessa cirklars utanför triangeln liggande bågar, så liten yta som möjligt? *(X.)*

1220. Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar sidorna a, b, c i resp. A_1, B_1, C_1. Cirkelns medelpunkt är I. Visa, att linjer dragna genom A_1, B_1, C_1 parallella med resp. AI, BI, CI råkas i samma punkt. *(X.)*

1221. Bestäm antalet kvadratrötter $< N$, vilkas första decimal är t, om för $t = 0$ de hela talen ej medräknas. N är ett helt, positivt tal. *(C.)*

Enklare matematiska uppgifter

1222. Beräkna värdet av $y^2 + z^2 - x^2$ ur systemet

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= a \\ 2x + y + 2z &= b \\ 2x + 2y + z &= c \end{aligned}$$

(Svar: $b^2 + c^2 - a^2$.)

1223. Beräkna exakta värdet av $\tan 12° \cdot \tan 24° \cdot \tan 48° \cdot \tan 96°$.
(Svar: -1.)

1224. Sidorna i en triangel äro proportionella mot $u^2 - uv + v^2$, $v^2 - u^2$, $2uv - v^2$, vilka antagas vara positiva tal. Visa, att en vinkel är 120°.

1225. ABC är en liksidig triangel, inskriven i en cirkel. AA_1, BB_1, CC_1 äro tre parallella kordor i denna cirkel. Visa, att en av dem alltid är lika lång som de båda andra tillsammans.

1226. I en rät cirkulär kon inskrives ett klot. Bestäm konens toppvinkel, om klotet är aritmetiska mediet till konens två övriga delar.
(Svar: 81,24° eller 13,56°.)

1227. En fyrsidig pyramid i form av en halv regelbunden oktaeder och en regelbunden tetraeder ha en sidoyta gemensam. Hur stor del av tetraedern faller utom pyramiden?
(Svar: 25 %.)

1228. I vart och ett av tvenne horisontella plan på 3 cm inbördes avstånd har man ritat ett koodinatsystem med längdenheten 1 cm och i vilka varandra motsvarande axlar äro vända åt samma håll. Punkten $(-1; 2)$ i det övre planet ligger lodrätt över punkten $(2; 5)$ i det undre. Beräkna vinkeln mellan det plan, som innehåller de båda x-axlarna och det plan, som innehåller de båda y-axlarna.
(Svar: 120°.)

1229. Visa, att linjerna $ax + by + c = 0$, $a^3x + b^3y + c^3 = 0$ och $x\cos A + y\cos B + \cos C = 0$ råkas i samma punkt, då a, b, c äro sidorna, A, B, C motstående vinklar i en triangel.

1230. Tangenten i en punkt P på kurvan $y = ax^3 + bx$ skär y-axeln i A och inflexionstangenten i B. Beräkna förhållandet $AB : BP$.
(Svar: $2:1$.)

1231. Parametrarna i två konjugathyperbler skära varandra så, att produkten av den ena parameterns segment är lika med produkten av den andras segment. Angiv sambandet mellan excentriciteterna.
(Svar: $e_1^2 + e_2^2 = 5$.)

Tredje häftet

1232. En tangent till kurvan $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ avskär ett segment, i vilket en rektangel inskrives. Bestäm maximum av förhållandet mellan rektangelns och segmentets ytor. *(X.)*

1233. Ekvationen $(\cos x - a)(\cos v - a) + \sin x \sin v = \frac{a^2 - 1}{2}$ förutsättes ha två olika lösningar x_1 och x_2. Visa, att

$$(\cos x_1 - a)(\cos x_2 - a) + \sin x_1 \sin x_2 = \frac{a^2 - 1}{2}$$

(X.)

1234. Tangenten till en kurva i punkten P skär två fasta linjer i A och B. Konstruera tangenten i M till orten för AB:s mittpunkt M. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1235. I en rätvinklig triangel bilda de båda linjer, som från den inskrivna cirkelns medelpunkt utgå till tyngdpunkten och den räta vinkelns spets, vinkeln 135° med varandra. Beräkna förhållandet mellan triangelns sidor.
(Svar: $3 : 4 : 5$.)

1236. I en likbent triangel går den inskrivna cirkeln genom den omskrivna cirkelns medelpunkt. Beräkna toppvinkeln.
(Svar: 90° eller 34,06°.)

1237. I en rätvinklig triangel, vars ena spetsiga vinkel är α, drages höjden mot hypotenusan. De gemensamma tangenterna till de cirklar, som kunna omskrivas kring deltrianglarna, bilda vinkeln β med varandra. Visa, att $2 \sin 2\alpha = 1 + \cos \beta$.

1238. Lös ekvationen

$$\cos 2x(1 - 4\cos x) + 2\sin^2 x = 2.$$

(Svar: $\pm 60° + n \cdot 360°$; $\pm 72° + n \cdot 360°$; $\pm 144° + n \cdot 360°$.)

1239. I en pyramid med toppen O och den rektangulära eller kvadratiska basytan $ABCD$ äro alla sidokanterna 12 cm. Ett plan lägges genom B och två punkter E och F på resp. OA och OC så, att $OE = 3$ cm och $OF = 4$ cm. Planet skär OD i G. Beräkna längden av OG samt förhållandet mellan de delar, vari pyramiden delas av planet.
(Svar: $OG = 2$ cm. Förh. $= 7 : 137$.)

1240. En regelbunden tetraeder med höjden h är given. Ett klot med den variabla radien r tangerar tre bestämda sidoytor (men icke deras förlängningar). Beräkna största och minsta värdet på den del av klotets yta, som befinner sig inom tetraedern. Undersök även de fall, då tetraedern ersätts med en kon, vars toppvinkel är större eller mindre än den i en regelbunden tetraeder inskrivna konens, och klotet tangerar konmanteln (ej förlängd) längs en cirkel.

(Svar: Största värdet $= \dfrac{\pi h^2}{4}$ för $r = \frac{h}{4}$. Minsta värdet $= \dfrac{3\pi h^2}{16}$ för $r = \dfrac{3h}{8}$.)

1241. Man vill draga omkull ett vertikalt stående träd genom att i en punkt P på stammen, belägna på avståndet x från trädets rot R, fästa ett rep och draga i det med konstant kraft. För vilket värde på x är kraftens vridningsmoment så stort som möjligt, om repets effektiva längd är l och händerna måste befinna sig på höjden h över den horisontella marken?

(Svar: $x = \frac{1}{4}\big(3h + \sqrt{h^2 + 8l^2}$.)

1242. Genom de, från origo räknat, bortre belägna skärningspunkterna mellan kurvan $y = x^4 - 4x^2 + 3$ och x-axeln dragas tangenterna. Beräkna ytan av den triangel, som begränsas av dessa tangenter och tangenten genom kurvans minimipunkter.

(Svar: $\dfrac{121\sqrt{13}}{12} = 17{,}47$ ytenheter.)

1243. Angiv ekvationerna för dubbeltangenterna till kurvan $y = x^5 - 5x^3 + 10x$.

(Svar: $y = 5x + 2$; $y = 5x - 2$; $y = 3{,}75x$.)

1244. Dubbeltangenten till kurvan $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ berör kurvan i A och B. Tangenten i C är parallell med dubbeltangenten. Visa, att $2x_C = x_A + x_B$.

Fjärde häftet

1245. Det finnes trianglar, i vilka $\tan C = \tan^2 B \cdot \tan \dfrac{B}{2}$. Visa, att i en sådan triangel är även $\sin A = \tan B \cdot \cos C$. *(X.)*

1246. En rät linje genom tyngdpunkten E i en triangel skär sidorna eller deras förlängningar i F, G och H. Tag E som origo och inför en positiv riktning på linjen. Om koordinaterna för F, G och H äro x_1, x_2 och x_3, så gäller $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} = 0$. *(F. E.)*

1247. Från en punkt P fällas normalerna PQ_1, PQ_2,... mot samtliga sidoytor i en regelbunden polyeder. Var ligger tyngdpunkten till punktsystemet $Q_1, Q_2, \ldots$? *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1248. Beräkna summan av rötternas kuber i ekvationen

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

(Svar: $3pq - p^3 - 3r$.)

1249. Rötterna till ekv. $(ax)^2 + (a+x)^2 = 1$ äro x_1 och x_2. Visa att

$$\frac{x_1^3 - x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2^3 - x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{a^3 - a}{a^2 + 1}$$

1250. Lös ekvationssystemet

$$x^2 + y^2 = 2$$
$$x^3 + y^3 = 2$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 1 & 1 & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 + \sqrt[4]{12}) & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 - \sqrt[4]{12}) \\ \hline y & 1 & 1 & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 - \sqrt[4]{12}) & \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1 + \sqrt[4]{12}) \end{array}$)

1251. Lös ekvationen $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \tan x + \cot x = -2$ samt beräkna $\lim_{x\to 180°}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \tan x + \cot x\right)$.

(Svar: $135° + n \cdot 180°$; -1.)

1252. I triangeln ABC är $\tan C = 4$. Visa, att $T = a^2 + b^2 - c^2$.

1253. I en cirkel drages en korda. I vartdera segmentet inskrives dels en kvadrat, dels en liksidig triangel med ett hörn i kordans mittpunkt. Förhållandet mellan kvadraternas sidor är m och mellan trianglarnas n. Visa, att $15n(m-1)^2 = 16m(n-1)^2$.

1254. Två lika långa kordor i en cirkel skära varandra i förhållandet $n:1$. Vinkeln mellan kordornas lika delar är α och varje kordas medelpunktsvinkel är β. Visa, att

$$\frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} + \frac{n^2 + 1}{2n} = 0.$$

1255. Förhållandet mellan de inre och yttre bissektriserna till den räta vinkeln i en triangel är n. Visa, att förhållandet mellan de in- och omskrivna cirklarnas radier är $\sqrt{2/(n^2+1)} - 1$.

1256. Beräkna n och $\sin\alpha$ i ekvationssystemet

$$n \sin x = \sin(\alpha - x)$$
$$\cot x - \cot(\alpha - x) = n \cot\alpha$$

då man vet, att n är ett helt tal, α en spetsig vinkel, vars sinus och cosinus kunna uttryckas exakt i hundradelar.

(Svar: $n = 5$; $\sin\alpha = 0,28$.)

1257. De in- och omskrivna cirklarnas radier till en triangel ABC äro resp. r och R. Längden av bissektrisen till vinkeln A är v. Visa, att

$$v\sin\frac{A}{2}\left(2R\sin^2\frac{A}{2}+r\right)=r\left(4R\sin^2\frac{A}{2}+r\right).$$

1258. I triangeln ABC är I den inskrivna cirkelns medelpunkt och AE bissektris. Visa, att cirkeln BIC skär cirkeln med AE som diameter under räta vinklar.

1259. I den kronliknande figur, vilken utgöres av en sidoyta i en regelbunden dodekaeder som basyta och de fem angränsande sidoytorna, bilda de linjer, som förena kronans spetsar med tyngdpunkten i basytan, 45° vinkel med denna yta.

1260. Kurvorna $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ och $y = 3x^2 + 2ax + b$ skära varandra under rät vinkel i punkten (1; 1). Bestäm konstanterna a, b och c.

(Svar: $a = -3,5$; $b = 5$; $c = -1,5$.)