Årgång 26, 1943

Första häftet

1261. I en tresidig pyramid äro sidokanterna l cm, baskanterna a, b och c cm. I topphörnet är kantvinklarnas summa 360°. Visa, att $a^2+b^2+c^2=8l^2$. *(X.)*

1262. Visa, att enveloppen för de kordor i en konisk sektion, som halveras av en rät linje, är en parabel. *(N. J.)*

1263. Visa, att tangeringspunkterna för de gemensamma tangenterna till två cirklar ligga på en hyperbel. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1264. Lös ekvationen $\binom{n}{m-1}+\binom{n}{m+1}=2\binom{n}{m}$.
Med $\binom{n}{m}$ menas koefficienten för termen $a^{n-m}b^m$ i utvecklingen av $(a+b)^n$.

(Svar: $n=a^2-2$; $m=\frac{1}{2}(a+1)(a-2)$ eller $\frac{1}{2}(a-1)(a+2)$, där a är ett godtyckligt helt tal större än 2.)

1265. Angiv sambandet mellan x och y, om $x=\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+1}$ och $y=\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t}$.

(Svar: $x^y=y^x$.)

1266. Genom logaritmering av ekvationerna $xy=z$, $xz=y$, $yz=x$ erhålles en lösning $x=y=z=1$. Vart ta de andra lösningssystemen $x=y=z=0$, $x=y=-1$, $z=1$ m. fl vägen?

(Svar: De tillhöra talområden, där de använda logaritmlagarna icke gälla.)

1267. I en triangel är en sida a, de in- och omskrivna cirklarnas radier resp. r och R. Beräkna ytan.

(Svar: $\dfrac{r}{a}\left(a^2+2Rr\pm r\sqrt{4R^2-a^2}\right)$. En enkel diskussion utvisar, när två, ett eller intet svar erhålles.)

1268. De yttre och inre bissektriserna till vinkeln A i en triangel äro a resp. b. Beräkna den inskrivna cirkelns radie.

(Svar: $ab\sin\dfrac{A}{2}:\left(a+\sqrt{a^2+b^2}\sin\dfrac{A}{2}\right)$.)

1269. Genom en regelbunden tetraeders hörn som spetsar läggas tangentkonerna till den sfär, som tangerar alla dess kanter. Dessa koner skära varandra tre och tre i ytterligare fyra punkter, vilka äro hörn i en annan regelbunden tetraeder. Sök förhållandet mellan följande sidor i en rätvinklig triangel: normalen från sfärens centrum mot denna tetraeders kant, halva den korda som denna kant avskär av sfären samt dess radie.

(Svar: 3 : 4 : 5.)

1270. I en romb inskrives ett parallelltrapets, vars baslinjer äro parallella med den ena diagonalen. Visa, att dettas yta är störst, då dess höjd är hälften av den andra diagonalen.

1271. Brännpunkterna till två kägelsnitt bilda hörnen i en kvadrat och parametersekanterna skära varandra i segment med lika produkter. Angiv sambandet mellan excentriciteterna e_1 och e_2.

(Svar: $e_1^2 + e_1^{-2} + e_2^2 + e_2^{-2} = 6$, om endast den ena sekantens segment äro inre; i annat fall antingen $e_1 = e_2$ eller $e_1 \cdot e_2 = 1$.)

1272. I vilka trianglar är bissektrisen från ett hörn median i den triangel, som bildas av höjden och medianen från samma hörn samt motstående sida?

(Svar: I likbenta trianglar med spetsen i hörnet eller trianglar, där hörnet ligger på en ellips med excentriciten $\sqrt{2}/2$ och de andra hörnen som foci.)

1273. Visa, att en brännpunktsradie , som är parallell med en asymptot i en hyperbel är $1/4$ av parametern.

Andra häftet

1274. Visa, att summan av cotangenterna för en triangels vinklar alltid är positiv och beräkna det minsta värde summan kan ha i någon triangel. *(X.)*

1275. En regelbunden polyeder har N kantlinjer med längden a. Samtliga kantlinjer projiceras ortogonalt i ett plan. Beräkna summan av projektionernas kvadrater. *(X.)*

1276. Vilka kurvor beskriver skuggan av spetsen på en vertikal stång (gnomon) vid olika latituder och soldeklinationer? *(Erik Nilsson.)*

Enklare matematiska uppgifter

1277. Bestäm sambandet mellan a, b och c så, att de tre ekvationerna $ax^2 + bx + c = 0$, $bx^2 + cx + a = 0$, $cx^2 + ax + b = 0$ få en gemensam rot.

(Svar: $a^3+b^3+c^3-3abc = 0$ eller $(a+b+c)^3-3(a+b+c)(ab+ac+bc) = 0$, varav $a+b+c = 0$ och $(a+b+c)^2 = 3(ab+ac+bc)$ vilket ger $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0$, dvs $a = b = c$, om storheterna är reella)

1278. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} xy &= 3z^2 - 1 \\ x^2 - y^2 - z^2 &= 2z \\ x + y &= 3z \end{aligned}$$

(Svar:

x	1	-1	2	$-11/7$
y	-1	1	1	$-13/7$
z	0	0	1	$-8/7$

.)

1279. Lös ekvationen $2\sin 2x - \tan 2x = \sin 3x - 2\sin x$.
(Svar: $n \cdot 180°$; $\pm 30° + n \cdot 180°$; $111{,}47° + n \cdot 360°$.)

1280. Ett cirkelsegments korda delas i tre lika delar. Normalerna mot kordan i delningspunkterna dela bågen i tre delar, vilkas gradtal betecknas med $2x$, $2y$, $2x$. Visa, att $\tan \frac{x-y}{2} = \tan^3 \frac{x+y}{2}$.

1281. Punkten A delar diametern i en cirkel i två delar, vilkas skillnad är s. Tangenterna i diameterns ändpunkter råka en godtycklig tangent i B och C. Visa, att ytan av triangeln ABC är $\frac{s^2}{8} \cdot \tan \wedge ABC$.

1282. De positiva heltalsvärden på a, som göra $\sqrt{2a+2}$ till en jämn kvadrat tänkas uppskrivna i en stigande serie. Beräkna a_{100}.
(Svar: 19999.)

1283. Diagonalerna i en parallellogram ligga på var sin av linjerna $3x - y = 2$ och $3x + 2y = 14$; en sida ligger på linjen $6x + y = 25$. På vilka linjer ligga de övriga sidorna?
(Svar: $6x + y = 7$; $y = 7$; $y = 1$.)

1284. Från en punkt P på diagonalen AC i romben $ABCD$ fällas normalerna PM och PN mot BA och BC respektive. Visa, att normalen från P mot MN går genom D.

1285. På en sträcka AB som sida äro två regelbundna sexhörningar uppritade, en på vardera sidan om AB. Bestäm excentriciteten i den ellips, som går genom alla hörnen utom A och B.
(Svar: $\sqrt{6} : 3$.)

1286. En tangent till kurvan $2y = x^2 - 1$ är vinkelrät mot en tangent till $2y = 1 - x^2$. Visa, att tangenterna råkas på x-axeln.

1287. I en ellips är O centrum, A ena ändpunkten av storaxeln och PP_1 parametern i den motsatta ellipshalvan. Tangenterna i A och P råkas i Q. Hur stor är ellipsens excentricitet, om a) punkterna Q, O och P ligga i rät linje; b) Q, lillaxelns ändpunkt och P_1 ligga i rät linje?
(Svar: a) $0{,}5$, b) $0{,}8$.)

Tredje häftet

1288. Vad är villkoret för att de nio punkter, som givit niopunktscirkeln dess namn, ligga på en regelbunden månghörning? *(N. J.)*

1289. Tio av kanterna i en allmän hexaeder äro a. Vilka värden skola de två återstående kanterna ha, för att a) ytan b) volymen skall bli så stor som möjligt? *(N. J.)*

1290. Konstruera den största ellips, som kan inskrivas i ett symmetriskt segment av ett kägelsnitt. Ellipsen och segmentet ha gemensam symmetriaxel. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1291. Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2 &= 1 \\ x^2+2xy-y^2 &= x\sqrt{2} \end{aligned}\right\}.$$

(Svar:

x	$\cos 15°$	$\cos 45°$	$\cos 135°$	$\cos 255°$
y	$\sin 15°$	$\sin 45°$	$\sin 135°$	$\sin 255°$

)

1292. Lös ekvationen $(1+\tan x)^2+(1+\cot x)^2=24$.
(Svar: $\left.\begin{matrix} 15° \\ 75° \end{matrix}\right\} + n\cdot 180°; \quad \left.\begin{matrix} -9{,}73° \\ -80{,}27° \end{matrix}\right\} + n\cdot 180°.$)

1293. För en triangel ABC gäller attt $a^2+b^2+c^2=8R^2$. Visa, att en vinkel är rät.

1294. Visa, att punkterna $(\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta); \cos\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta))$, $(\cos\beta\cos\gamma\cos(\beta+\gamma); \cos\beta\cos\gamma\sin(\beta+\gamma))$ och $(\cos\alpha\cos\gamma\cos(\alpha+\gamma); \cos\alpha\cos\gamma\sin(\alpha+\gamma))$ ligga i rät linje.

1295. I en cirkel med radien R inskrives en oliksidig triangel ABC, i vilken $2a=b+c$. Den inskrivna cirkelns medelpunkt är I, den omskrivna cirkelns medelpunkt är O. Beräkna radien i cirkeln AIO.
(Svar: $R/2$.)

1296. Genom en punkt P på kantlinjen AB i tetraedern $ABCD$ läggas plan parallella med sidoytorna ACD och BCD. Dessa plan avgränsa jämte tetraederns sidoytor en kropp, vars volym genom lämpligt val av P skall göras så stor som möjligt. Hur skall P väljas?
(Svar: På mittpunkten av AB.)

1297. I en regelbunden n-sidig pyramid ha de in- och omskrivna kloten samma medelpunkt. Beräkna sidovinkeln i topphörnet.
(Svar: $180°/n$.)

1298. I en sexsidig pyramid med toppen O är basytan en regelbunden sexhörning $ABCDEF$. I vilket förhållande delas pyramidens volym av det plan genom kanten AB, som halverar kanterna OD och OE?
(Svar: 13:23.)

1299. Kurvan $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x}{\sqrt{a}}$ går genom origo och en punkt A på positiva x-axeln. Tangenter och normaler i O och A bilda en rektangel. Beräkna siffervärdet på a samt rektangelytan.
(Svar: $a = 2$; en ytenhet.)

1300. Kurvan $y = ax^2 + bx - 4$ skär x-axeln i A och B. Tangentena till kurvan i A och B bilda med x-axeln en likbent och rätvinklig triangel, vars yta är en ytenhet. Angiv siffervärdena på a och b.
(Svar: $a = -\frac{1}{2}$; $b = \pm 3$.)

1301. Att konstruera en kvadrat, då avstånden från en fix punkt till tre av kvadratens hörn äro givna.

Fjärde häftet

1302. I triangeln ABC är H höjdernas skärningspunkt. Vid rätvinklig projicering av figuren i ett rätvinkligt koordinatplan erhålles resp A_1 (1; 0), B_1 (0; 5), C_1 (−4; −5) och H_1 (0; 0). Beräkna vinkeln mellan xy-planet och planet ABC. *(X.)*

1303. Kurvan $y = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ förutsättes ha två reella inflexionspunkter A och B. Den har då en reell dubbeltangent och en med denna parallell enkel tangent. Visa, att AB delar avståndet mellan dessa tangenter i förhållandet 4 : 5. *(X.)*

1304. Avståndet mellan ett föremål P och ett öga Q är konstant. Var mellan P och Q skall man placera en tunn positiv lins ($f \geq PQ$) för att se bilden av P under så stor vinkel som möjligt? Det förutsättes, att ögats ackommodationsförmåga tillåter tydlig uppfattning av bilden vid alla ifrågakommande placeringar av linsen. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1305. Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} x^2y &= 6x - y \\ xy^2 &= 3x + 2y \end{aligned}\right\}.$$

(Svar: $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & \pm 1 & \pm\sqrt{5} \\ \hline y & 0 & \pm 3 & \pm\sqrt{5} \end{array}$.)

1306. En cirkel tangerar den ena kateten AB av en rätvinklig triangel ABC i dess mittpunkt och skär den andra i D och E i tre lika delar. En av cirkelns skärningspunkter med hypotenusan är P. Beräkna $\tan DPE : \tan ACB$.
(Svar: 3/8.)

1307. I triangeln ABC är $h_a = 4r$. Beäkna $\cot\dfrac{B}{2} + \cot\dfrac{C}{2} - \cot\dfrac{A}{2}$.
(Svar: 0.)

1308. För en triangels sidor och vinklar gäller $b - c = \dfrac{a}{2}$ och $B - C = \dfrac{A}{2}$. Visa, att $\cos 2B = 1 - \sqrt{3}$.

1309. I en geometrisk serie är $s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n = 2t_n$. Beräkna kvoten.
(Svar: 2 eller -1.)

1310. Om $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$, $\cos 2\gamma$ bilda en aritmetisk serie, så gäller detsamma om $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\gamma)}$, $\dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta)}$.

1311. I ett tresidigt hörn äro sidovinklarna $AOB = 90°$, $BOC = 120°$, $AOC = 144°$. Beräkna vinkeln mellan kanten OA och bissektrisen till $\wedge BOC$ samt vinkeln mellan OB och bissektrisen till $\wedge AOC$.
(Svar: 144°.)

1312. Det hyperbelsegment parametern avskär roterar kring symmetrilinjen. Den alstrade kroppen har samma volym som en sfär med transversalaxeln som diameter. Beräkna excentriciteten.
(Svar: $\sqrt{3}$.)

1313. En hyperbelgren och en parabel ha samma avstånd mellan vertex och fokus. De segment parametrarna avskära rotera kring segmentens symmetrilinjer. Förhållandet mellan de uppkomna volymerna är 2. Beräkna hyperbelns excentricitet.
(Svar: 2.)

1314. Från punkten P fällas normalerna PA, PB och PC mot koordinataxlarna och mot linjen $y = x$. Sök orten för P, om ytan av triangeln ABC är en ytenhet.
(Svar: Cirkeln $x^2 + y^2 = 4$.)

1315. Om det i en ellips finnes en fokalkorda, vars längd = halva storaxeln, så tillhöra kordans ändpunkter var sin av två konjugatdiametrar. För vilka värden på excentriciteten finnas sådana kordor?
(Svar: $e \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.)