# Årgång 27, 1944

## Första häftet

**1316.** I vilka serier äro $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 + \cdots + t_n^3 = (t_1 + t_2 + t_3 + \cdots + t_n)^2$ för alla positiva heltalsvärden på $n$? *(X.)*

**1317.** Huru stora äro toppvinklarna i en regelbunden $n$-sidig pyramid, om en sfär, som tangerar alla kanterna och a) den omskrivna sfären, b) en sfär, som tangerar alla ytorna, ha samma medelpunkt? *(N. J.)*

**1318.** I triangeln $ABC$ är $a = \sqrt{5} - 1$, $h_a = 1$ och vinkeln $A = 63°$. Beräkna exakta värdet på vinklarna $B$ och $C$. *(X.)*

## Enklare matematiska uppgifter

**1319.** Summan av de $n$ första termerna i en viss serie kan uttryckas genom formeln $s_n = \dfrac{n}{n^2 + 1260}$. Hur många termer skola medtagas för att summan skall bli så stor som möjligt?
(Svar: 35 eller 36 termer.)

**1320.** Kan en geometrisk serie med ett udda antal termer vara så beskaffad, att summan av alla termer med udda ordningsnummer blir lika med summan av alla termer med jämnt ordningsnummer?
(Svar: Nej. Räkningen leder endast till de oanvändbara värdena $k = \pm 1$.)

**1321.** Lös ekvationen $2\sin x - \sin 2x = 3\sin\dfrac{x}{2}$.
(Svar: $n \cdot 360°$; $\pm 120° + n \cdot 720°$; $\pm 98{,}70° + n \cdot 720°$.)

**1322.** I $\triangle ABC$ är $AB = 10$ cm, $AC = 17$ cm och $BC = 21$ cm. Beräkna det exakta värdet på radien i den cirkel, som tangerar triangelns inskrivna cirkel samt sidorna $AC$ och $BC$.
(Svar: $\frac{7}{16}\left(9 - \sqrt{17}\right)$ cm.)

**1323.** I en romb är en vinkel $\alpha$. Den vinkel, varunder en sida synes från motstående sidas mittpunkt, är $v$. Visa, att $\sin\alpha = 0{,}75 \tan v$.

**1324.** En fyrsidings sidor ha längderna $a$, $b$, $c$ och $d$. Sök längderna av de gemensamma, yttre (mellan tangeringspunkterna räknade) tangenterna till de utanför motstående sidorna vidskrivna cirklarna.
(Svar: $\frac{1}{2}(a + b + c + d)$. )

**1325.** Visa, att summan av $\frac{2}{3}$ av den i enhetscirkeln inskrivna regelbundna $n$-hörningens omkrets och $\frac{1}{3}$ av den kring samma cirkel omskrivna regelbundna $n$-hörningens omkrets ger en bättre approximation för $2\pi$ än någondera omkretsen.

**1326.** Två lika stora cirklar tangera varandra. Hur förhålla sig sidorna i den rätvinkliga triangel, där hörnen utgöras av tangeringspunkten, den ena cirkelns centrum samt centrum för den cirkel, som tangerar de båda cirklarna och en gemensam yttre tangent?
(Svar: $3:4:5$.)

**1327.** Tre lika sfärer tangera varandra två och två. a) Visa, att den triangel, där hörnen utgöras av ett centrum och centra i de sfärer, som tangera de givna sfärerna och vart och ett av deras gemensamma tangentplan, är liksidig. b) Vad är förhållandet mellan axel, basradie och sida i den kon, som har centrum i en av de sistnämnda sfärerna till topp och en storcirkel på en av de förstnämnda till bas?
(Svar: $4:3:5$.)

**1328.** Bestäm ordinatan för skärningspunkten mellan linjen genom $(3; 5)$ och $(-5; -2)$ och linjen genom $(1; 3)$ och $(8; -5)$.
(Svar: $3\frac{16}{113} = \pi + 0,0000001$.)

**1329.** En likbent triangel $ABC$ har vinkeln $A = 105°$. Koordinaterna för $A$ äro $(0; -2)$ och för $B$ $(2; 0)$. Beräkna de exakta värdena på koordinaterna för punkten $C$.
(Svar: $(-\sqrt{6}; -2+\sqrt{2})$ eller $(\sqrt{2}; -2-\sqrt{6})$.)

**1330.** Beräkna halva storaxeln i en ellips med den givna ytan $S$, för vilken produkten av parametern och excentriciten är ett maximum.
(Svar: $\sqrt[4]{\dfrac{5S^2}{3\pi^2}}$.)

## Andra häftet

**1331.** En triangels vinklar äro $A$, $B$ och $C$. Vinklarna mellan dess medianer äro $\alpha$, $\beta$ och $\gamma$. Visa, att $\cot A + \cot B + \cot C = \cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma$. *(B-r.)*

**1332.** En strömbana har formen av en regelbunden $(m+n)$-hörning $A_0A_1 \ldots A_{m+n-1}$ $(m \geq 1,\ n \geq 1)$ med radierna till hörnen inlagda. Motståndet i varje sida är $s$ ohm, i varje radie $r$ ohm. $A_0$ och $A_m$ (eller $A_n$) förbindas med var sin av en strömkällas poler. Bestäm kombinationsmotståndet. Hur varierar detta med $m$ för givet $m + n = N$? *(X.)*

**1333.** Sök orten för inflexionspunkterna på de tredjegradskurvor av formen $y(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = AX^2 + Bx + C$, vilka ha en maximipunkt i $(1; 1)$ och en minimipunkt i $(-1; -1)$. *(X.)*

# Enklare matematiska uppgifter

**1334.** I en oändlig geometrisk serie, vars summa är $5\frac{1}{3}$, äro de tre första termerna rötter till ekvationen $x^3 - ax^2 + ax - 1 = 0$. Beräkna $a$.

(Svar: $5\frac{1}{4}$ eller $3\frac{1}{12}$.)

**1335.** En cirkel med radien 2 cm tangerar tre av sidorna i ett likbent parallelltrapets med höjden $4,8$ cm. Den fjärde sidan, som är en av de parallella sidorna, har längden 2 cm. Beräkna trapetsets yta.

(Svar: 19,2 cm.)

**1336.** I ett parallelltrapets äro de parallella sidorna $a$ och $b$ $(a > b)$, de andra sidorna $c$ och $d$ $(c > d)$ samt diagonalerna $e$ och $f$ $(e > f)$.Visa att $(e^2 - f^2) : (c^2 - d^2) = (a + b) : (a - b)$.

**1337.** En höskörd skall köras in på kortast möjliga tid. Genom försök har man funnit, att tomkörningen från ladan till fältet tar 10 minuter, att tiden för själva pålastningen är direkt proportionell mot lassets vikt samt att tiden för nödvändig körning på fältet plus hemkörning utgör $10 + ax + 0,00005x^2$ minuter, där $x$ är lassets vikt, uttryckt i kg, och $a$ en konstant. Urlastningen tar endast 10 minuter, oberoende av lassets vikt tack vare lämpliga anordningar vid ladan. Alla lass antagas ha samma vikt. Hur stor bör denna vara?

(Svar: $100\sqrt{60} = 775$ kg.)

**1338.** En rörlig punkt $P$ på linjen $x = 1$ sammanbindes med origo $O$. Från $P$ avsättes på $PO$ sträckan $PQ = 1$ åt origo till. Angiv och konstruera orten för $Q$.

(Svar: $y = \pm\dfrac{\sqrt{2x^3 - x^4}}{x-1}$ (konkoid).)

**1339.** Punkten $P$ rör sig så, att längden av sträckan $OP$ är $2 + 2\sin v$, där $O$ är origo och $v$ vinkeln mellan $OP$ och positiva $x$-axeln. Bestäm orten för $P$ och angiv kurvans max- och min-punkter.

(Svar: En sluten kurva, symmetrisk m.a.p. $y$-axeln. $y_{\max} = 4$ och 0, båda för $x = 0$; $y_{\min} = -\frac{1}{2}$ för $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ (kardioid).)

**1340.** Vilken är ekvationen för den största cirkel som tangerar ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ i vertex $(-a; 0)$ men för övrigt ligger helt inuti ellipsen?

(Svar: $\left(x \pm \dfrac{c^2}{a}\right)^2 + y^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$.)

**1341.** På kurvan $y = x^3 - 3x^2 - x + 4$ finnas två punkter med samma ordinata, i vilka kurvtangenterna äro parallella. Bestäm dessa punkters koordinater.

(Svar: $(3; 1)$ och $(-1; 1)$.)

**1342.** Punkten $P$ rör sig på den i första axelvinkeln liggande delen av linjen $y = 1$. $P$ förenas med $A(\sqrt{2}; 0)$, $O(0; 0)$ och $B(-\sqrt{2}; 0)$. Bestäm maximum av skillnaden $\wedge OPA - \wedge BPO$.
(Svar: 45°.)

**1343.** Mot en tangent och en normal i en punkt på en ellips fällas normalerna från medelpunkten. Vilka vinklar bildar tangenten med axlarna, då rektangelytan är störst?
(Svar: 45°.)

**1344.** Tangenten i en punkt på hyperbeln $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ skär konjugathyperbeln i $A$ och $B$. Beräkna ytan av triangeln $OAB$, där $O$ är origo.
(Svar: $ab\sqrt{2}$.)

**1345.** Parabeln $y^2 = 4ax$ och punkterna $A(b; 0)$, $B(-b; 0)$ äro givna. $PQ$ är en mot $x$-axeln vinkelrät korda. Sök orten för skärningspunkten mellan $PA$ och $QB$.
(Svar: $y^2 = 4ax$.)

## Tredje häftet

**1346.** Man bildar punktföljden $A_0, A_1, A_2, \ldots$ sålunda: $A_0$, $A_1$, $A_2$ äro hörnen i en rätvinklig triangel med hypotenusan $A_0A_1$; i fortsättningen är $A_{n+1}$ fotpunkten för normalen mot $A_{n-2}A_{n-1}$ från $A_n$. Visa, att den punkt $P$, mot vilken $A_n$ tenderar, ligger där den linje, som förenar $A_1$ med det fjärde hörnet $Q$ i rektangeln $A_0A_3A_2Q$ skär cirkeln $A_0A_3A_2Q$ för andra gången. *(F. Ehrnst.)*

**1347.** Fyra sfärer tangera ett plan och varandra utantill. Om planets tangeringspunkter behållas, i vilket förhållande skola sfärernas radier ändras, för att sfärerna skola råkas i en och samma punkt? *(N. J.)*

**1348.** En cirkel tangerar en given liksidig hyperbel och går genom dess centrum. Sök orten för cirkelns medelpunkt. *(X.)*

## Enklare matematiska uppgifter

**1349.** Visa, att om i en triangel såväl $a$, $b$ och $c$ som $r$, $r_a$ och $r_b$ bilda aritmetiska serier, så är triangeln egyptisk.

**1350.** Bevisa, att för triangelstorheterna $r$, $r_a$, $r_b$ och $r_c$ gäller $9r \leq r_a + r_b + r_c$.

**1351.** Visa, att ekvationen $\sin x + \cos x + \tan x + \cot x = 0$ saknar reella rötter.

**1352.** I triangeln $ABC$ är $H$ höjdernas skärningspunkt. Visa, att $\overline{BC}^2 + \overline{AH}^2 = 4R^2$.

**1353.** I triangeln $ABC$ är $C = 90°$. Bissektrisen till $A$ skär $BC$ i $B_1$. Bissektrisen till vinkeln $AB_1C$ skär $AC$ i $A_1$. Bissektrisen till vinkeln $B_1A_1C$ skär $B_1C$ i $B_2$. Man fortsätter på samma sätt att draga bissektriserna till vinklarna $A_{n-1}B_nC$ och $B_nA_nC$. Undersök, om de vinklar som dessa bissektriser bilda med $AC$ och $BC$ tendera mot några bestämda gränsvärden och bestäm i så fall dessa.
(Svar: 60°.)

**1354.** I en regelbunden tetraeder med kanten $a$ lägges genom en baskant ett plan, som med basytan bildar en vinkel av 60°. Beräkna snittytans storlek.
(Svar: $\frac{a^2}{2}\left(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\right)$.)

**1355.** Sök på höjden i en given pyramid, vars basyta är en $n$-hörning av godtycklig form, en punkt sådan, att summan av kvadraterna på dess avstånd till pyramidens alla hörn är ett minimum.
(Svar: Avståndet från basytan är $\frac{h}{n+1}$.)

**1356.** Om en cirkel skär kurvan $xy = a^2$ i punkterna $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ och $(x_4; y_4)$ så gäller $x_1x_2x_3x_4 = a^4$.

**1357.** Bestäm $a$ i ekvationen $y = ax^3 - 3x$ så, att kurvan tangerar $y = x + 4$.
(Svar: $a = 16/27$.)

**1358.** I en given cirkel med centrum $O$ drages en fast diameter $AB$ samt en korda $AC$. Radien $OD$ drages parallell med $AC$. Om $\wedge BAC < 60°$, kommer en korda genom $D$ parallell med $AB$ att skära $AC$ i $E$. Bestäm $\wedge BAC$ så, att ytan av den figur som begränsas av $DE$, $EC$ och bågen $CD$ blir så stor som möjligt.
(Svar: 36°.)

**1359.** En föränderlig parabel har sin axel utefter negativa $y$-axeln och går genom punkten (2; 3) samt skär $x$-axeln i $A$ och $B$. Parabelns vertex är $C$. Bestäm triangelytans $ABC$:s minimivärde.
(Svar: $9\sqrt{3}$ ytenheter.)

**1360.** Den utdragna parametern i en hyperbel skär ena asymptoten i $P$. En linje genom $P$ parallell med den andra asymptoten är normal till hyperbeln. Beräkna dennas excentricitet.
(Svar: $\frac{\sqrt{7}}{2}$.)

**1361.** En cirkel med centrum $(c; 0)$ går genom parameterns ändpunkter i parabeln $y^2 = 4ax$ och skär dessutom parabeln i två andra punkter.

För vilket värde på $c$ blir dessa punkters sammanbindningslinje diameter i cirkeln?
(Svar: $c = 5a$.)

## Fjärde häftet

**1362.** I en konvex fyrsiding kan en cirkel inskrivas. Sök relationerna mellan radierna i de tolv cirklar, som tangera tre men i allmänhet ej fyra av sidorna. *(N. J.)*

**1363.** En cirkel, två punkter $P$ och $Q$, sträckan $k$ samt vinkeln $\alpha$ äro givna. Att konstruera punkterna $A$ och $B$ på cirkeln så, att $AB = k$ och vinkeln mellan $PA$ och $QB$ är $\alpha$. *(X.)*

**1364.** Konstruera ett kägelsnitt, då man känner en tangent med dess tangeringspunkt, en brännpunkt samt en punkt på kurvan. *(C. E. Fröberg.)*

# Enklare matematiska uppgifter

**1365.** Bestäm exakta värdet av

$$\left(4-\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)\left(6-2\sqrt{5}+\sqrt{50-22\sqrt{5}}\right).$$

(Svar: 4.)

**1366.** Lös ekvationssystemet

$$\left.\begin{aligned} x+y&=z^2\\ x+z&=y^2\\ y+z&=x^2 \end{aligned}\right\}.$$

(Svar: $x_1 = y_1 = z_1 = 0$; $x_2 = y_2 = z_2 = 2$.)

**1367.** Visa, att ekvationen $\tan^3 x + a\tan^2 x + b\tan x + a = 0$ satisfieras av tre vinklar, som kunna ingå i en och samma triangel.

**1368.** Bevisa formeln $T = r_b \cdot r_c \cdot \tan\dfrac{A}{2}$.

**1369.** Bestäm sidan $a$ i en triangel, då man känner ytan $T$, vinkeln $A$ och medianen $m_a$.
(Svar: $a = 2\sqrt{m_a^2 - 2T\cot A}$.)

**1370.** Medianerna mot två sidor i en triangel äro vinkelräta mot varandra. Den tredje sidan $= a$ och motstående vinkel $= A$. Visa, att triangelns yta är $a^2\tan A$.

**1371.** I $\triangle ABC$ sammanbindes $A$ med en punkt $D$ på $BC$. Vid figurens rotation kring $AB$ alstra trianglarna $ABD$ och $ACD$ kroppar, vilkas volymer förhålla sig som $1:8$. Hur förhålla sig volymerna av de kroppar, som samma trianglar alstra vid rotation kring $AC$?
(Svar: $5:4$.)

**1372.** En triangel med ytan 12 enheter har sin tyngdpunkt i origo. Ena sidan går genom $(1; \frac{1}{2})$ och delas av de positiva koordinataxlarna i tre lika delar. Bestäm det motstående hörnets koordinater.
(Svar: $(-4; -\frac{2}{3})$ eller $(-\frac{4}{3}; -2)$.)

**1373.** Kring en rektangel med sidorna 6 cm och 8 cm är en cirkel omskriven. Visa, att produkten av avstånden från en punkt på cirkeln till två motstående sidor är lika med produkten av avstånden till de två andra sidorna och även lika med produkten av avstånden till diagonalerna.

**1374.** Upprita på diametern $AB$ i en cirkel med radien $r$ en rektangel $ABCD$, vars andra sida $= r\sqrt{2}$. $P$ är en godtycklig punkt på cirkeln. $PC$ och $PD$ skära $AB$ i $E$ och $F$ respektive. Visa, att $AE^2 + BF^2 = 4r^2$.

**1375.** Genom $A(a; 0)$ och $B(b; 0)$ dragas två linjer med vinkelkoefficienten $k$ och genom $C(c; 0)$ och $D(d; 0)$ två linjer med vinkelkoefficienten $k_1$. Visa, att diagonalerna i den erhållna parallellogrammen skära $x$-axeln i punkter, vilkas lägen äro oberoende av $k$ och $k_1$.