Årgång 34, 1951

Första häftet

1739. I varje triangel är $abc : r \geq a^3 : r_a + b^3 : r_b + c^3 : r_c$. *(X.)*

1740. I varje triangel är $\sum(1+\cos A)^2(1-\cos A) \leq \prod(1+\cos A)$. *(X.)*

1741. Sidorna AC och BC i triangeln ABC tangera den inskrivna cirkeln i D resp. E och den utanför sidan AB vidskrivna cirkeln i F resp. G. Visa, att linjerna DG och EF skära varandra inuti triangeln ABC, och att DG delar AB som EF delar BA samt att AB halverar DG endast om $AC = BC$. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1742. I en rätvinklig triangel är den linje som förenar tyngdpunkten med den inskrivna cirkelns medelpunkt parallell med den ena kateten. Visa, att triangeln är egyptisk.

1743. I vilka fyrhörningar råkas diagonalerna och de linjer som förena motstående sidors mittpunkter i en punkt?
(Svar: Endast, om fyrhörningen är en parallellogram.)

1744. Hur förhålla sig sidorna till varandra i en triangel, som begränsas av en halvcirkels radier till inskrivna kvadratens hörn på bågen, den ena förlängd, och dess tangent i det ena hörnet?
(Svar: $5 : 4 : 3$.)

1745. I vilka trianglar är $B - C = 20°$ och $b^2 - c^2 = a^2 : 2$?
(Svar: $A = 43{,}16°$; $B = 78{,}42°$; $C = 58{,}42°$ eller $A = 136{,}84°$; $B = 31{,}58°$; $C = 11{,}58°$.)

1746. I en parallellt stympad pyramid ha basytorna en sammanlagd yta av 5 dm^2. Det plan, som går mitt emellan basplanen, gör ett snitt i pyramiden, som har ytan 2,25 dm^2. Bestäm pyramidens volym, om höjden är 3 dm.
(Svar: 7 dm^3.)

1747. Två (icke nödvändigt cirkulära) koner med höjderna a och b ($a > b$) stå på samma basyta och äro vända åt samma håll (den mindre inuti den större). Ett med basplanet parallellt plan, som går på avståndet x från detta, utskär en sluten kurva i vardera konmanteln. Visa, att den mellan dessa kurvor liggande ringen har maximiyta, när $1 : x = 1 : a + 1 : b$.

1748. Två klotytor med radierna 4 och 3 dm tangera varandra innantill i A. Beräkna radien i den klotyta med centrum i A som delar mel-

lanrummet mellan de två förstnämnda i två volymlika delar.
(Svar: $2\sqrt[4]{74} \approx 5,87$ dm.)

1749. Vilka kurvor av typen $2y = x^3 + ax^2 + bx$ gå genom (1; 2) och tangera x-axeln?
(Svar: $2y = x^3 + 3x^2$; $2y = x^3 + 2x^2 + x$; $2y = x^3 - 6x^2 + 9x$.)

1750. Beräkna abskissan för höjdernas skärningspunkt i den triangel, som bildas av linjerna $x + ky + k^2 = 0$, $x + ly + l^2 = 0$ och $x + my + m^2 = 0$.
(Svar: -1.)

1751. Uttryck derivatan av $x + 3\cot\frac{x}{3} - \cot^3\frac{x}{3}$ i $\cot\frac{x}{3}$.
(Svar: $\cot^4\frac{x}{3}$.)

Andra häftet

1752. Två klot med radierna a och b ligga utanför varandra. För att en linje skall kunna tangera klotytorna i A och B måste dessa punkter tillhöra vissa områden på respktive klot. Vilka äro dessa och hur förhålla sig deras ytor? *(X.)*

1753. Om axeln i en homogen sfärisk sektor, upphängd i en punkt av "kantcirkeln", ställer sig vågrät, vilken är sektorns medelpunktsvinkel? *(N. J.)*

1754. Sök orten för punkter så belägna, att av de normaler, som från dem kunna dragas till parabeln $y^2 = 4ax$, en är bissektris till vinkeln mellan de båda andra. *(I. Gunsjö.)*

Enklare matematiska uppgifter

1755. Man bildar par av hela positiva tal så beskaffade, att kvadraten på det större talet i paret är lika med kuben på det mindre talet. Hur många sådana par finnas i talområdet 1000–100 000?
(Svar: 15.)

1756. För uppritning av en viss oregelbunden n-hörning måste 31 bestämningselement vara givna. Beräkna n.
(Svar: 17.)

1757. Tre positiva tal bilda en aritmetisk serie. Deras summa är 99, deras största gemensamma divisor är 3 och minsta gemensamma dividend 3465. Vilka äro talen?
(Svar: 21, 33 och 45.)

1758. Under sista kriget har man ibland praktiserat följande metod för att spara cigarretter. Man röker 2/3 av varje cigarrett. Av stumparna gör man nya cigarretter med tobaken från tre stumpar i varje. Hur många cigarretter måste man minst förfoga över från början för att på detta sätt kunna röka tre cigarretter dagligen under en månad på 28 dagar?
(Svar: 57 st.)

1759. I en plan skärm finnes en kvadratisk spalt $ABCD$ med sidan a. På förlängningen av diagonalen CA åt A till är en punkt E så belägen, att $AE = a\sqrt{2}$. En i kvadratens plan kring E vridbar, plan ogenomskinlig skärm är försedd med en rätlinig rand, riktad genom E och större än $2a\sqrt{2}$, som i utgångsläget är parallell med AD. Genom att vrida denna skärm en vinkel v från utgångsläget kan spalten helt eller delvis täckas. Angiv den obetäckta spaltytan som funktion av v.
(Svar: $a^2\left(3-2\tan v-0,5\cot v\right)$ för $0,5 < \tan v < 1$ och $a^2\left(2\cot v+0,5\tan v-2\right)$ för $1 < \tan v < 2$.)

1760. I en amperemeter var visarens vridningsvinkel (räknad från nollläget) proportionell mot strömstyrkan. Den från 0 till 20 A graderade skalan utgjordes av en cirkelkvadrant. Om man hade indelat denna båges korda i lika stora delar från 0 till 20, hade man fått en skala, oriktig överallt utom i tre punkter. (Avläsningen tänkes ske på skärningspunkten mellan kordan och den tunna visaren.) Antag, att visaren gör ett utslag på α radianer. Hur stor är differensen mellan den på kordan och den på bågen avlästa strömstyrkan? För vilket värde blir differensen ett maximum? För vilken verklig strömstyrka ger en avläsning på kordan det största felet?
(Svar: $20\sin\alpha/(\sin\alpha+\cos\alpha)-40\alpha/\pi$. Ur ekvationen $\sin 2\alpha = 0,5(\pi-2)$ fås $\alpha_1 = 17{,}4°$ och $\alpha_2 = 72{,}6°$. För 3,87 och 16,13 A.)

1761. En halvcirkel med diametern $AB = 2$ cm är given. Genom bågens mittpunkt M drages en linje, som skär AB i C, så att $\angle MCB = 60°$. Sök radierna i de två cirklar, som tangera AB, MC och bågen.
(Svar: $(3\sqrt{2}-4)$ cm och $\frac{1}{3}\sqrt{2}$ cm.)

1762. Uttryck i grader den vinkel, x radianer,för vilken $\sin(\sin x) = 0,5$.
(Svar: $13{,}57°$ och $148{,}43° + n\cdot 360°$.)

1763. Angiv ekvationerna för de linjer genom $(-1; 3)$ som med linjen $x-3y = 1$ bilda likbenta trianglar.
(Svar: $3x+y = 0$; $x+2y-5 = 0$; $2x-y+5 = 0$.)

1764. Linjen $x-3y = 0$ vrides kring origo 45° i negativ led, varvid punkten $P(3; 1)$ intar ett nytt läge Q. Angiv koordinaterna för Q.
(Svar: $\left(2\sqrt{2}; -\sqrt{2}\right)$.)

Tredje häftet

1765. P är en punkt inom triangeln ABC, så vald att $a^2 \cdot \overline{AP}^2 = b^2 \cdot \overline{BP}^2 + c^2 \cdot \overline{CP}^2$. Uttryck vinkeln BPC i vinkeln A ($A < 90°$). *(X.)*

1766. I triangeln ABC dragas bissektriserna AD och BE. Visa, att sträckan DE till sin storlek ligger mellan AE och BD och att den är lika med en av dem (och då med båda) endast om AC och BC äro lika. *(N. J.)*

1767. En gemensam tangent till en triangels omskrivna cirkel och en vidskriven cirkel tangerar den förra i A, den senare i B. Tangenten till den vidskrivna cirkeln i den skärningspunkt med den omskrivna, som ligger närmast den gemensamma tangenten, skär denna i S. Beräkna $AS : SB$. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

1768. I en aritmetisk serie är summan av de p första termerna p enheter mindre än än summan av de p därpå följande. Hur mycket är summan av de n första termerna mindre än summan av de n därpå följande?
(Svar: $n^2 : p$.)

1769. Vinkelkoefficienterna för de från ett triangelhörn utgående sidorna och medianen äro i nämnd ordning $\frac{1}{2}$, 1, och $\frac{2}{3}$. Bestäm triangelns vinklar.
(Svar: 18,44°, 26,56° och 135°.)

1770. Om en transversal skär sidorna AB och AC i triangeln ABC så, att den avskurna triangelns omkrets och yta äro resp. $\frac{1}{m}$ och $\frac{1}{n}$ av motsvarande storheter hos den givna triangeln, så är transversalens längd $\frac{1}{m} \cdot p + \frac{m}{n} \cdot (a - p)$. Visa detta.

1771. I en triangel dela de linjer, som från den omskrivna cirkelns medelpunkt dragas till triangelns hörn, triangelytan i tre delar, vilka förhålla sig som $3 : 4 : 5$. Bestäm triangelns vinklar.
(Svar: 45°, 63,44° och 71,56°.)

1772. I en spetsvinklig triangel dela de linjer, som från den omskrivna cirkelns medelpunkt dragas till triangelns hörn, triangelytan i tre delar, vilka förhålla sig som de positiva talen $m : n : p$. Bestäm förhållandet mellan triangelns sidor.
(Svar: $\sqrt{m(-m+n+p)} : \sqrt{n(m-n+p)} : \sqrt{p(m+n-p)}$.)

1773. Lös ekvationen $\sin 2x + \tan x = 2$.
(Svar: $45° + n \cdot 180°$.)

1774. I en liksidig kon med bottenradien r inskrives en rak cylinder och därovan ett klot, vilket senare alltså är inskrivet i toppkonen. Bestäm cylinderns bottenradie, om summan av cylinderns och klotets volymer skall bli så stor som möjligt.
(Svar: $\frac{18}{23}r$.)

1775. I en rak kon med bottenradien r inskrives en rak cylinder och ytterligare en cylinder stående på den förra. Hur stora bottenradier skola cylindrarna ha, om summan av deras volymer skall bli ett maximum?
(Svar: $\frac{18}{23}r$ och $\frac{12}{23}r$.)

1776. Triangeln ABC har sidan BC:s mittpunkt i (4; 0) och tyngdpunkten på x-axeln. På sidan AB är punkten $D(0;2)$ så belägen, att $AD : DB = 2 : 1$. Triangelytan är 30 ytenheter. Bestäm hörnens koordinater.
(Svar: $(-6; 0)$, $(3; 3)$, $(5; -3)$ eller $(14; 0)$, $(-7; 3)$, $(15; -3)$.)

1777. En triangels tyngdpunkt ligger i $(4; -2)$. En sida, som är 10 längdenheter, faller på linjen $3x - 4y + 21 = 0$. Bestäm triangelytan.
(Svar: 75 ytenheter.)

1778. De för hyperblerna $b^2x^2 - a^2y^2 = \pm a^2b^2$ och cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$ gemensamma punkterna utgöra hörn i en regelbunden sexhörning. Bestäm hyperblernas excentriciter.
(Svar: $\frac{1}{5}\sqrt{40}$ och $\frac{1}{3}\sqrt{24}$.)

1779. Man har $x\sqrt{y} + y = 1$. Uttryck y' i x.
(Svar: $x - (x^2+2) : \sqrt{x^2+4}$.)

Fjärde häftet

1780. Sök enveloppen för styrlinjen till en parabel, som går genom en given punkt och tangerar en given linje i en given punkt. *(X.)*

1781. En regelbunden dodekaeder och en regelbunden ikosaeder ha lika stora totala ytor. Beräkna förhållandet mellan ytorna av deras rätvinkliga projektioner, då strålarna i bägge fallen är parallella med en huvuddiagonal. *(X.)*

1782. Beräkna exakta värdet av ytan till en triangel, vars hörn dela enhetscirkelns omkrets i förhållandet $1:3:9$. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1783. I en oändlig konvergent geometrisk serie är produkten av de tre första termerna 1. Vilket är det minsta värde seriens summa kan antaga?

(Svar: 4.)

1784. I triangeln ABC är vinkeln A dubbelt så stor som vinkeln B. På AB tages punkten D så, att $AD : DB = 1 : 3$. Bestäm vinklarna i triangeln ABC, om triangeln BDC är likformig med denna.

(Svar: 30°, 60° och 90°.)

1785. I triangeln ABC drages medianen BM. Beräkna triangelns vinklar, om vinkeln C är dubbelt så stor som vinkeln A och vinkeln BMA är tre gånger så stor som vinkeln A.

(Svar: 39,03°, 62,91° och 78,06°.)

1786. Visa, att $(1+\sin^4 x+\cos^4 x) : (1+\sin^8 x+\cos^8 x)$ har samma värde för alla x.

1787. En triangel ABC har ytan T och omkretsen $2p$. Genom punkterna $(a; 0)$, $(b; 0)$ och $(c; 0)$ i ett rätvinkligt koordinatsystem dragas linjer med vinkelkoefficienterna $\tan\frac{1}{2}A$, $\tan\frac{1}{2}B$ och $\tan\frac{1}{2}C$. Visa, att dessa linjer råkas i samma punkt. Bestäm dennas koordinater.

(Svar: $(p; r)$.)

1788. Ett regelbundet tresidigt prisma har sina basytor i en klotskivas plana ytor, som befinna sig på var sin sida om klotets medelpunkt, den ena dubbelt så långt från medelpunkten som den andra. Prismats ena basyta är inskriven i den mindre av klotskivans plana ytor. Sök förhållandet mellan prismats höjd och baskant, då prismats volym är så stor som möjligt.

(Svar: $\sqrt{6} : 4$.)

1789. I en rak cirkulär kon inskrives ett klot. Ett andra klot placeras ovanpå det första, så att det tangerar konens mantel och det första klotet. Ett tredje klot placeras på samma sätt ovanpå det andra osv. i oändlighet. Bestäm exakta värdet av sinus för konens halva toppvinkel. om summan av alla klotens volymer är 8 gånger så stor som det första klotets volym.

(Svar: $\left(2-\sqrt[3]{7}\right) : \left(2+\sqrt[3]{7}\right)$.)

1790. I triangeln ABC äro vinklarna A och B resp 60° och 90° samt sidan $BC = a$. På sidorna AB, BC och CA tagas punkterna P, Q och R resp., så att triangeln PQR blir liksidig. Sök förhållandet mellan ytorna av trianglarna PQR och ABC som en funktion av $BQ(=x)$. Undersök funktionen med angivande av eventuella maxima och minima. Ange även de gränser mellan vilka PQ kan variera.

(Svar: $y = (7x^2-4ax+a^2) : 2a^2$. Minimum är $\frac{3}{14}$ för $x = \frac{2}{7}a$; $a : \sqrt{7} \le PQ \le a : \sqrt{3}$.)

1791. Genom origo O drages en variabel korda OA i kurvan $y = x^2$. Tangenten i P är parallell med OA och skär koordinataxlarna i B och C. Visa, att förhållandet mellan ytorna av trianglarna OAP och OBC är oberoende av punkten A:s läge.

1792. I punkten A (1; 1) på kurvan $y = x^2$ dragas tangenten och normalen. Den senare linjen skär kurvan i P. Tangenten och normalen i P skära den förstnämnda tangenten i B och C. Visa, att $AB = AC$.