Årgång 35, 1952

Första häftet

1793. I en cirkel med centrum O och radien R är inskriven en spetsvinklig triangel ABC, vars höjder råkas i H. Bestäm maximum och minimum för summan av PO och PH, när punkten P genomlöper triangelns omkrets. *(X.)*

1794. Två klot, vilkas radier äro en längdenhet, tangera varandra. A_i och B_i betyda punkter på resp. ytor. A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2, B_2A_3, $\dots$, B_nA_{n+1} äro gemensamma tangenter. Beräkna deras längd, då A_{n+1} sammanfaller med A_1, utan att detta inträffat tidigare: $n = 3, 4, \dots$ *(X.)*

1795. Om motstående sidoytor i en oktaeder äro parvis parallella, så äro de parvis kongruenta och diagonalerna dela varandra mitt itu. Betecknar T arean av en sidoyta och P arean av ett snitt genom två diagonaler, så är $2\sum T^2 = \sum P^2$. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1796. I en liksidig triangel är ett parallelltrapets $ABCD$ inskrivet, så att AB, som är en av de parallella sidorna, ligger utmed en triangelsida. Den sistnämnda, trapetsets höjd, sidorna CD och AB bilda i denna ordning en geometrisk serie. Sök förhållandet mellan trapetsets och triangelns ytor.
(Svar: $(6+2\sqrt{3}) : 27$.)

1797. I parallelltrapetset PQA_1B_1 är $PQ = 2a$, $QA_1 = A_1B_1 = a$ och vinklarna Q och A_1 båda 90°. På sidan PB_1 uppritas utåt parallelltrapetset $PB_1A_2B_2$ likformigt med det förstnämnda, så att PB_1 blir den längsta sidan och vinklarna PB_1A_2 och A_2 båda 90°. På sidan PB_2 uppritas sedan på samma sätt nästa parallelltrapets osv., tills en sida PB_8 kommer att ligga utmed PQ. Bestäm längden av den brutna linjen $QA_1B_1A_2B_2 \dots A_8B_8Q$.
(Svar: $15a(3+\sqrt{2}) : 8$.)

1798. Ekvationen $\sin 2x + a \cot x = 0{,}25$ satisfieras av två vinklar, vilkas skillnad är 90°. Bestäm a och dessa vinklar.
(Svar: $a_1 = -(2+\sqrt{3}) : 4$, $x_1 = 52{,}5° + n \cdot 90°$; $a_2 = -(2-\sqrt{3}) : 4$, $x_2 = 82{,}5° + n \cdot 90°$.)

1799. Från hörnet A i en liksidig triangel ABC i rymden drages en linje AL, som med AB bildar en vinkel 30° och med AC en vinkel 60°. Hur stor vinkel (x) gör AL med BC? Vad blir resultatet om vinklarna

äro β och γ?
(Svar: 68,53°, $\cos x = |\cos\beta - \cos\gamma|$.)

1800. En sfärs yta delas av tre parallella plan i delar, som i ordning förhålla sig som $1:2:3:4$. Angiv förhållandet mellan delarnas volymer.
(Svar: $7:47:108:88$.)

1801. En korda delar en cirkel (radie $= r$) i två segment. I vartdera inskrives en kvadrat med två hörn på kordan och två på cirkeln. Sök summan (y) av dessa kvadraters ytor som funktion av kordans avstånd från cirkelns medelpunkt.
(Svar: $y = 0{,}32(3x^2 + 5r^2)$; $0 \le x \le r : \sqrt{2}$.)

1802. Ett parallelltrapets med konstant yta (B) och den större av de parallella sidorna $= a$ roterar kring denna. Bestäm rotationskroppens volym (V) som funktion av trapetsets höjd (x) och återgiv variationen i ett diagram.
(Svar: $V = \frac{1}{3}\pi(4Bx - ax^2)$; $B : a < x < 2B : a$.)

1803. Kurvorna $y = 9ax^3 + 2bx$ och $y = bx^2 + ax + 5$ ha maximum eller minimum i en gemensam punkt. Bestäm a och b samt upprita kurvorna.
(Svar: $a = -6$, $b = 9$. Den förra har ett maximum, den senare ett minimum i punkten $(\frac{1}{3}; 4)$.)

1804. En rak cirkulär cylinder har bottenperiferierna på var sitt av två varandra tangerande klot med radien r. Bestäm det största värde cylinderns mantelyta kan antaga.
(Svar: $3\pi r^2\sqrt{3}$.)

1805. En triangel har ett hörn A i origo, ett annat B i punkten $(1; 1)$ och sidan AC utmed x-axeln. Sök orten för skärningspunkten P mellan mittpunktsnormalen till sidan AC och bissektrisen till vinkeln ABC.
(Svar: Den undre grenen av den liksidiga hyperbeln $x^2 - y^2 - 2xy + 2y = 0$. Geometriskt: Bissektriserna till $\angle APB$ och dess yttervinkel äro parallella med bissektriserna till $\angle BAC$, som äro fixa.)

1806. En punkt A på kurvan $y = ax^3 + bx$, där konstanterna a och b ha olika tecken och $|b| > \sqrt{3}$, sammanbindes med origo O. Sträckan OA har nollvärde, maximivärde och minimivärde, då vinkeln mellan OA och x-axeln är resp. α, β, γ. Visa att $\alpha = \beta + \gamma$.

Andra häftet

1807. I triangeln ABC är vinkeln B dubbelt så stor som vinkeln C och medianen AB lika stor som sidan BC. Att konstruera en dylik triangel, när längden av sidan AB är given. *(X.)*

1808. Det finnes 24 plan i en parallellepiped, som gå genom ett hörn och centra i två sidoytor, som ej innehålla hörnet i fråga. Hur stor del av parallellepipedens volym upptager det konvexa område kring dess centrum, som dessa 24 plan avgränsa? *(X.)*

1809. Punkterna (x, y, z), (x, z, y), (y, z, x), (z, y, z), (z, x, y), (y, x, z), där $x < y < z$, i ett rätvinkligt koordinatsystem utgöra hörnen till en sexhörning, som är inskriven i en cirkel. Beräkna sexhörningens yta. *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1810. I två geometriska serier $t_1, t_2, t_3, \ldots$ och $T_1, T_2, T_3, \ldots$ är $t_n = T_\alpha$ och $t_n^2 = T_\beta$. Sök x i likheten $t_n^3 = T_x$. Möjlighetsvillkor?
(Svar: $2\beta - \alpha$; $\beta > \alpha/2$.)

1811. Lös ekvationen $1 + \sin x + \cos x + \cot x = 0$.
(Svar: $135° + n \cdot 180°$, $270° + n \cdot 360°$.)

1812. Två tangenter till prabeln $2y = 2 - x^2$ bilda med x-axeln en liksidig triangel. Beräkna dess yta.
(Svar: $25\sqrt{3} : 12$ ytenheter.)

1813. AB är diameter i en halvcirkel med radien r, P en punkt på bågen och Q dess projektion på tangenten i B. Bestäm minimivärdet av $(PA)^2 + (PQ)^2$.
(Svar: $3r^2$.)

1814. I triangeln ABC är $AB = BC = a$. Den inskrivna cirkeln tangerar AC i M och AB i N. Bestäm maximivärdet av ytan av triangeln AMN, när sidan AC varierar.
(Svar: $a^2\sqrt{3} : 9$.)

1815. Parabeln $y = ax^2 + bx + c$ skär x-axeln i två punkter. Visa, att om tangenterna till kurvan i dessa punkter äro vinkelräta mot varandra, så är $b^2 - 4ac = 1$. Gäller omvändningen?
(Svar: Ja ($a \neq 0$).)

1816. Maximi- och minimipunkterna till kurvan $y = ax^4 + bx^2$ ($a > 0$, $b < 0$) utgöra hörn i en triangel med ytan a ytenheter. Visa, att minimipunkterna, oavsett värdena på konstanterna a och b, ligga på var sin sida av två parallella linjer. Angiv deras ekvationer.
(Svar: $x = \pm 1$.)

1817. Var på x-axeln ser man cirklarna $x^2+y^2=4$ och $(x-10)^2+(y-5)^2=25$ under lika stora synvinklar?
(Svar: $(3\frac{1}{3}; 0)$ och $(-7\frac{1}{7}; 0)$.)

1818. I cirkeln $x^2+y^2=r^2$ dragas flera parallella kordor. AB är en sådan korda och P är en punkt på kordan eller dess förlängning. Sök orten för P, om $PA\cdot PB=a^2$, där a är en given sträcka.
(Svar: $x^2+y^2=r^2\pm a^2$.)

1819. Sträckan AB:s ändpunkter äro $A(a; 0)$ och $B(-a; 0)$ $(a>0)$. Angiv orten för en punkt P så beskaffad, att $(PA)^2+(PB)^2=n\cdot(PQ)^2$, där Q är projektionen av P på x-axeln. Möjlighetsvillkor?
(Svar: Hyperbeln $b^2x^2-a^2y^2=-a^2b^2$, om $b=a\sqrt{2:(n-2)}$, $c=\sqrt{n:2}$ och $n>2$.)

1820. P är en rörlig punkt på linjen $x+y+b=0$ och N dess projektion på x-axeln. Q är en fast punkt på linjen $y=b$. Härled orten för tyngdpunkten till triangeln PQN och angiv särskilt Q:s läge och ortkurvans ekvation för det fall att denna går genom origo.
(Svar: $Q(0; b)$; $x+2y=0$.)

Tredje häftet

1821. Visa, att kurvan $y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5$ har ett centrum, om två av dess dubbeltangenter är parallella. *(X.)*

1822. Hörnen A, B och C i en given triangel tagas till centra i tre cirklar, vilkas radier äro proportionella mot resp höjder, h_a, h_b och h_c. Sök orten för cirklarnas radikalcentrum. *(X.)*

1823. *Konstruera* de spetsiga vinklar, som satisfiera ekvationen $\sin x+\cos x=n\sin x\cos x$. Angiv möjlighetsvillkoret. *(S. B.)*

Enklare matematiska uppgifter

1824. Från en punkt P utanför en cirkel dragas två sekanter, PAB och PA_1B_1. Punkterna A, B A_1, B_1 ligga på cirkeln. Bestäm förhållandet mellan sträckorna AA_1 och BB_1, om $PA:AB=1:n$ och $PA_1:A_1B_1=n:1$.
(Svar: $\sqrt{n}:(n+1)$.)

1825. En vid A rätvinklig triangel ABC med ytan y är inskriven i en cirkel med radien R. Tangenterna i A, B och C skära varandra i D och E, varvid fyrhörningen $BDEC$ med ytan Y uppkommer. Visa, att $yY=2R^4$.

1826. Från origo äro dragna tre linjer l_1, l_2 och l_3 med vinkelkoefficienterna $1, 2$ och $-5,5$ respektive. Visa, att den spetsiga vinkeln mellan l_2 och l_3 är dubbelt så stor som den spetsiga vinkeln mellan l_1 och l_2.

1827. Lös ekvationen $\sin x : (\cos x + \tan x) = \cot x$.
(Svar: $90° + n \cdot 120°$, $270° + n \cdot 360°$.)

1828. Tre godtyckliga vinklar x, y och z äro givna. Man bildar den cykliska produkten $\prod[\cos(3y+z) + 2\sin y \sin z]$, som består av den utskrivna faktorn och de två, som fås ur denna genom cyklisk permutation av x, y och z. Visa, att produkten är symmetrisk. Visa motsvarande för $\prod[\cos(3y+z) + 2\cos y \cos z]$.
(Svar: Den första kan skrivas $\prod\cos(y+z)(2\cos 2y - 1)$ och den andra $\prod\cos(y+z)(2\cos 2y + 1)$.)

1829. En rektangel är inskriven i cirkeln C_1. Cirkeln C_2, koncentrisk med C_1, skär rektangelsidorna i två punkter vardera. När dessa förenas två och två med linjer parallella med rektangelns sidor, bilda föreningslinjerna en ny rektangel, vars omskrivna cirkel är C_3. Visa, att cirkelringarna mellan C_1 och C_2 och mellan C_2 och C_3 äro likytiga.

1830. Mellan variablerna$x$, y och v gälla sambanden $x = \sin v + \cos v$, $y = \sin^3 v + \cos^3 v$. Uttryck y som funktion av x och upprita kurvan för de värden på x, som äro möjliga.
(Svar: $2y = 3x - x^3$; $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$.)

1831. Den ena parametern i en hyperbel är parameter i en parabel, vars vertex ligger i hyperbelns medelpunkt. Beräkna vinkeln mellan kurvorna.
(Svar: 22,5°.)

1832. I parabeln $y^2 = 4ax$ dragas två mot varandra vinkelräta kordor genom parabelns brännpunkt. Angiv det minsta möjliga avståndet mellan dessa kordors mittpunkter.
(Svar: $4a$. – Om kordornas mittpunkter äro M_1 och M_2, F är fokus samt N_1, N_2, S resp. projektioner på styrlinje, så är $M_1M_2 \ge N_1N_2 \ge 2FS = 4a$.)

1833. Genom ekvationen $\sin xy = ax$, där a är en konstant, definieras y som funktion av x. Beräkna värdet av $x^2 + (y + xy')^{-2}$.
(Svar: $1 : a^2$.)

Fjärde häftet

1834. I triangeln ABC är I den inskrivna cirkelns medelpunkt. Visa, att $IA + IB + IC \le 2(R + r)$. *(G. Danielsson.)*

1835. Förkorta bråket

$$\frac{(\sin\alpha\sin\beta+\sin\beta\sin\gamma+\sin\gamma\sin\alpha)\sin(\alpha+\beta+\gamma)-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

(X.)

1836. Bestäm genom att betrakta tripler av hörn i en regelbunden dodekaeder den vinkel i en triangel som står mot en sida av längden $a\sqrt{2}$, om de övriga sidorna äro: 1) a och diagonalen i en regelbunden femhörning med sidan a, 2) a och diagonalen i ett regelbundet pentagram med sidan a, 3) diagonalen i en regelbunden femhörning och ett regelbundet pentagram, båda med sidorna a. (I pentagrammet $ABCDE(A)$ kallas den linje, som förenar två icke successiva hörn (AC och AD t. ex.) diagonal; AB och BC äro sidor). *(N. J.)*

Enklare matematiska uppgifter

1837. I en obegränsad aritmetisk serie bilda de första, femte och trettonde termerna en geometrisk serie. Visa, att denna, hur långt den än fortsättes, endast innehåller termer ur den aritmetiska och angiv sambandet mellan en sådan terms ordningsnummer i den geometriska (n) och i den aritmetiska (N) serien.
(Svar: $N = 2^{n+1} - 3$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.)

1838. Visa, att för alla positiva n uttrycket

$$\frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{1}{8}\cdot(-1)^n + \frac{2}{9}\cos\frac{2}{3}n\pi$$

är ett helt tal.

1839. Visa, att i varje triangel produkten av avstånden mellan den inskrivna cirkelns medelpunkt och de vidskrivna cirklarnas medelpunkter är $= 16R^2r$.

1840. Höjderna i en triangel betecknas med h_1, h_2 och h_3, avstånden från höjdernas skärningspunkt till hörnen med s_1, s_2 och s_3. Visa, att $s_1 : h_1 + s_2 : h_2 + s_3 : h_3 = 2$.

1841. I triangeln ABC drages medianen AD. Visa, att

$$\tan\angle ADB = 2\sin B\sin C : \sin(B-C).$$

1842. Sidorna i en viss triangel kunna skrivas ac, bc och $a^2 - b^2$ och i en annan triangel ac, bc och c^2. Den senare triangeln är rätvinklig med hypotenusan c^2. Visa, att de båda trianglarna kunna inskrivas i samma cirkel.

1843. I triangeln ABC är $AB = 10$ cm. Höjden mot BC är 8 cm och medianen till AC är 9 cm. Beräkna triangelns vinklar.

(Svar: $A = 64{,}14°$, $B = 53{,}13°$, $C = 62{,}73°$ eller $A = 37{,}25°$, $B = 126{,}87°$, $C = 15{,}88°$.)

1844. En likbent triangel har sin spets på x-axeln, basens ena hörn på linjen $x - y + 1 = 0$ och tyngdpunkten i origo. Vilken är den minsta omkrets triangeln kan ha?

(Svar: 3,6 längdenheter.)

1845. Inuti en kvadrat $ABCD$ väljes en godtycklig punkt P. Genom P drages parallellt med kvadratens sidor linjer, som skära AB i E, BC i F, CD i G och DA i H. Visa, att linjerna EF, GH och AC råkas i en punkt (eller äro parallella). Satsen gäller för en parallellogram med godtyckligt läge för P.

1846. Kurvan $y = x^2 + 5x + c$ skär x-axeln i punkterna A och C, y-axeln i B. Minimipunkten är D. Bestäm konstanten c så, att i fyrhörningen $ABCD$ sidan AB blir parallell med sidan CD.

(Svar: $c = \frac{75}{16}$. Om parabeln är $y = x^2 + bx + c$ blir svaret $c = \frac{3}{16}b^2$.)

1847. En rektangel med sidorna 1 cm och 2 cm roterar ett varv kring en av diagonalerna. Bestäm den uppkomna rotationskroppens yta och volym.

(Svar: $71\pi\sqrt{5} = 12{,}47$ cm^2 och $103\pi\sqrt{5} : 240 = 3{,}015$ cm^3.)