Årgång 37, 1954

Första häftet

1916. Undersök hur rötterna till ekvationen

$$(x^2 - x\tan v)^2 + x^2 - 1 : 4\cos^6 v = 0$$

fördela sig på intervallen $(-\infty, 0)$, $(0, \tan v)$, $(\tan v, \infty)$, då v är en spetsig vinkel. *(X.)*

1917. En kubisk parabel tangerar alla sidor i parallellogrammen $ABCD$, AB och CD i A resp. C. Hur förhålla sig areorna av de ytstycken, i vilka kurvan uppdelar parallellogrammen? *(X.)*

1918. Sök en 8-siffrig heltalskvadrat, i vilken var och en av siffrorna $1, 2, \ldots, 8$ förekommer. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

1919. En triangels största vinkel är 90° större än den minsta. Sidornas mätetal bilda en aritmetisk serie. Beräkna triangelns vinklar.
(Svar: 24,29°, 41,42° och 114,29°.)

1920. I triangeln ABC är vinkeln A 45° och vinkeln B 22,5°. En linje från A träffar BC i D så, att vinkeln ADC är 30°. Visa att sträckan AD är exakt lika med sidan BC.

1921. Kring en sfär med radien r omskrivas två raka cirkulära koner med lika volymer men med olika stora höjder h_1 och h_2. Visa, att $1 : h_1 + 1 : h_2 = 1 : 2r$.

1922. Ett flygplan går parallellt med en meridiancirkel på den konstanta höjden 1 km över jordytan, som antas vara en klotyta med radien 637 mil, och passerar härvid rätt över en person, som observerar planet från en punkt belägen 1 m över marken. Hur lång sträcka av planets bana skulle kunna observeras, om sikten vore fri och man kunde bortse från ljusets brytning och försvagning i atmosfären?
(Svar: 233 km. – Ledning: $\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2}\alpha^2$ för små vinklar.)

1923. Ett ogenomskinligt homogent klot med 30 cm radie ligger på den horisontella ändytan av en vertikal cylindrisk pelare med 39 cm radie och belyses av den i zenit stående solen. Om klotet flyttas ut mot periferin, kommer slutligen ytan av dess skugga på det horisontella underlaget att uppnå ett visst minsta värde. Beräkna detta.
(Svar: 1180 cm^2.)

1924. Till funktionen $y = (x^2 + ax) : (2x + 7)$, där $a \neq 0$, sökes det numeriskt minsta heltalsvärde på a, som ger heltalsvärden åt koordinaterna för funktionskurvans maximi- och minimipunkter.
(Svar: $a = -28$.)

1925. En flod är 400 m bred. En person står på vattenytans nivå i en punkt belägen 200 m från närmaste strand. Om han höjer sig lodrätt över denna punkt, kommer han att i ett visst ögonblick se flodens bredd under maximal synvinkel. Sök denna.
(Svar: 30°.)

1926. Geniom ekvationen $y = ax(y^2 + 1)$ är y bestämd som funktion av x. Bestäm värdet på konstanten a så, att denna funktion satisfierar ekvationen $4(x^2 - 1)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 + 1)^2 = 0$.
(Svar: $a = \pm 0,5$.)

1927. En triangel har ett hörn i första kvadranten, ett på negativa x-axeln och ett på negativa y-axeln. De delar av dess yta, som ligga i andra, tredje och fjärde kvadranterna, äro resp, 3, 6 och 4 ytenheter. Hur stor är den del av ytan, som ligger i första kvadranten? Vad blir svaret, om ytorna äro α, β och γ ytenheter?
(Svar: 9,5, resp $\alpha\gamma(\alpha + 2\beta + \gamma) : (\beta^2 - \alpha\gamma)$ ytenheter. Villkor: $\beta^2 > \alpha\gamma$.)

1928. En ellips, vars storaxel utgör den ena parametern i en hyperbel, går genom hyperbelns ena vertex och tangerar dess asymptoter. Beräkna kurvornas excentriciteter.
(Svar: $\frac{1}{3}\sqrt{8}$ och 2.)

1929. En parabel med vertex O och parametern AB skäres av en cirkel i punkterna O och A. Visa, att om denna cirkel skär parabeln även i C och D, så är CD parallell med OB. Allmänt gäller: Om a är en asymmetriaxel till ett kägelsnitt, på vilket A, B, C, D äro fyra koncykliska punkter, så är a parallell med en av bissektriserna till vinklarna mellan AB och CD.

Andra häftet

1930. En rät linje d, som vrider sig kring punkten D på den kring triangeln ABC omskrivna cirklen, skär BC, CA, AB i A_1, B_1, C_1. Normalerna mot d i A_1, B_1, C_1 råka respektive normalerna i D mot DA, DB, DC i tre punkter, vilka ligga på en rät linje, som går genom en fast punkt. *(V. Thébault.)*

1931. Man drager två parallella obegränsade tangenter till en kubisk parabel P och mellan dem en parallell sekant l. Orten för mittpunkterna av de tre sträckor P avgränsar på l utgör, när l intager alla lägen, en kurva P_1. Sök förhållandet mellan areorna av de ytstycken i vilka P_1 och P dela det område som begränsas av tangenterna och mellanliggande yterbågar av P. *(X.)*

1932. En godtycklig talföljd c_1, c_2, c_3,... är given. Beräkna x_n enligt rekursionsformlerna $x_1 - c_1 = 0$, $x_n - c_n = \sum_{p=1}^{n-1} c_{n-p} \cdot x_p$, $n = 2, 3, \ldots$ Man finner ett polynom i c_1, c_2, ... c_n. Giv en förklaring av antalet olika termtyper däri. Beräkna speciellt x_n, då $c_n = a^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$ *(R. Johnsson.)*

Enklare matematiska uppgifter

1933. Bestäm en femsiffrig primtalskvadrat så, att dess siffror i omvänd ordning bilda en numeriskt mindre femsiffrig primtalskvadrat.
(Svar: $311^2 = 96721$.)

1934. I en aritmetisk serie med heltalstermer är den sjunde termen en sjundedel av den sjuttiosjunde. En term i serien är 100. Bestäm dess ordningsnummer.
(Svar: 2 eller 12.)

1935. Visa, att ekvationen $a \sin x + b \cos x + c = 0$ har reella rötter endast om $a^2 + b^2 \geq c^2$.

1936. Om höjderna i triangeln ABC utdragas, råka de den kring triangeln omskrivna cirkeln i punkterna A_1, B_1, C_1. Sök förhållandet mellan ytorna av trianglarna $A_1B_1C_1$ och ABC.
(Svar: $8 \cdot |\cos A \cos B \cos C|$.)

1937. Ekvationerna för en triangels sidor äro $3411x + 5191y - 11417 = 0$, $4435x + 7239y - 10393 = 0$, $7574x - 3787y + 15451 = 0$. Sök ekvationen för höjden mot den sistnämnda sidan.
(Svar: $x + 2y + 1 = 0$.)

1938. Visa, att linjerna $(m-1)x - (m+1)y + m^2 - 1 = 0$, $(n+1)x - (n-1)y - n^2 + 1 = 0$, $x + y - mn + 1 = 0$ råkas i samma punkt (eller sammanfalla).

1939. Kurvorna $y = ax^n$ och $y = bx^m$ (m och n olika positiva heltal) antagas råka varandra i en utanför origo belägen punkt. Tangenter dragas till kurvorna i denna punkt. Visa att förhållandet mellan deras vinkelkoefficienter är oberoende av a och b.

1940. Diskutera kurvan $y = 2^{\frac{x+1}{x-1}}$.
(Svar: Asymptoter: $x = 1$ (då $x \to 1+$), $y = 2$. Slutpunkt i $(1; 0)$ (då $x \to 1-$).)

1941. Bestäm den vinkel under vilken kurvorna $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$ och $x^2 + x - y = 0$ skära varandra.
(Svar: 63,43°.)

1942. Konstruera axlarna till ett kägelsnitt, som har ena fokus i en given punkt A, tangerar två givna linjer och vars konjugataxel (ev. förlängd) går genom en given punkt B.
Ledning: en ort för centrum är mittpunktsnormalen till A_1A_2, då A_1 och A_2 äro projektionerna av A på de givna linjerna, en annan cirkeln med AB som diameter.

1943. Räta linjen $y = x$ skär kurvan $xy = 1$ i A i tredje kvadranten och kurvan $y(x+1)^2 = x^2 + 1$ i B. De senare råkas i C. Beräkna ytan av triangeln ABC.
(Svar: En ytenhet. Ledning: Visa, att $x_B \cdot x_C = 1$.))

Tredje häftet

1944. Om a, b, c äro sidorna i en triangel och $x + y + z = 0$, så är uttrycket $a^2yz + b^2xz + c^2xy$ aldrig positivt. *(B. Svenonius.)*

1945. Två fasta tangenter till en given parabel råkas i punkten A. Av två rörliga tangenter t och t_1 råkar t de fasta i B och C. Projektionerna av B och C på t_1 äro B_1 resp. C_1. Visa, att förhållandet mellan projektionerna av BB_1 och CC_1 på linjerna AC och AB resp. är konstant, när t och t_1 variera. *(X.)*

1946. De räta linjer, som förena hörnen A, B, C, D i en tetraeder med en godtycklig punkt P skära motstående sidoytors plan i A_1, B_1, C_1, D_1 resp. Visa att föreningslinjerna mellan mittpunkten A_2 på AA_1 och mittpunkterna B_2, C_2, D_2 på BB_1, CC_1, DD_1 skära planet BCD i B_3, C_3, D_3 resp., så belägna, att trianglarna B_3CD, C_3DB, D_3BC äro likytiga. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

1947. Genom den inskrivna cirkelns medelpunkt i en triangel drages parallellt med en sida (längd = a) en transversal av längden l. Bestäm omkretsen av den erhållna topptriangeln.
(Svar: $al : (a - l)$.)

1948. Genom medelpunkterna för den inskrivna cirkeln och för den vid sidan BC i triangeln ABC vidskrivna cirkeln drages med BC parallella transversaler av längderna l resp. l_a. Visa att a) $r_a : r = a : (2l - a)$, b) omkretsarna av de parallelltrapets, för vilka sidan BC är gemensam, äro $(2l + a)$ och $(2l_a + a)$.

1949. Ett parallelltrapets $ABCD$ med AB parallell med DC är omskrivet kring en cirkel. Skillnaden mellan de icke parallella sidorna är 10% av omkretsen och skillnaden mellan trapetsets trubbiga vinklar A och B är 35°. Beräkna trapetsets vinklar.
(Svar: Den största vinkeln är 139,89°.)

1950. I triangeln ABC är M tyngdpunkten och N mittpunkten av BC. Vinklarna MBN och BMN är 90° resp. 45°. Beräkna vinklarna i triangeln ABC.
(Svar: $A = 19{,}44°$; $B = 123{,}69°$; $C = 36{,}87°$.)

1951. I en triangel, vars sidor bilda en aritmetisk serie, förhålla sig två vinklar som 1 : 2. Bestäm triangelns vinklar.
(Svar: 41,41°; 82,82°; 55,77° eller 49,35°; 98,70°; 31,95°.)

1952. Bestäm med hjälp av två lämpligt valda trianglar koefficienterna x och y i formeln $xR = r_a + r_b + r_c + yr$, samt visa därefter, att den erhållna formeln gäller allmänt.
(Svar: $x = 4$; $y = -1$.)

1953. Lös ekvationen $4\sin x \cos 2x \sin 3x = 1$.
(Svar: $\pm 30° + n \cdot 180°$; $22{,}5° + n \cdot 45°$.)

1954. Produkten av alla termerna i en geometrisk serie med kvoten 2 är 2^{10}. Produkten av de två sista termerna är 2^{19}. Sök termantalet.
(Svar: 20.)

1955. I den givna triangeln ABC med höjderna h_a, h_b, h_c fällas från en punkt P på medianen AM (= m) normaler mot triangelsidorna. Sök summan (= y) av de tre normalernas längder som funktion av PM (= x) samt upprita i ett koordinatsystem funktionen för intervallet $0 \le x \le m$.
(Svar: $2my = (2h_a - h_b - h_c)x + m(h_b + b_c)$.)

1956. Till kurvan $y = ax^3 + bx$ drages origotangenten och den linje, som förenar kurvans maximi- och minimipunkter. Bestäm vinkeln mellan dessa linjer, om den förstnämnda är bisektris till första och tredje (eller andra och fjärde) axelvinkeln.
(Svar: 11,31°.)

Fjärde häftet

1957. I ett rätvinkligt koordinatsystem är O origo och A en fast punkt på x-axeln. En variabel cirkel genom A och O skär y-axeln i B. Tangenterna till cirkeln i A och O råkas i C. Sök orten för mittpunkten av den på BC liggande kordan. *(X.)*

1958. I den givna triangeln ABC skär en med BC parallell transversal sidorna AB och AC i E och F resp., som ligga mellan A och resp. sidors mittpunkter. Linjerna EI parallell med AC och FJ parallell med AB skära BC i I resp. J. Hur ändras tyngdpunkten för ytan av trapetset $EFIJ$, då EF varierar på angivet sätt? *(X.)*

1959. Om a, b, c, äro olika stora, relativt prima, positiva heltal, vilkas kvadrater i nämnd ordning bilda en aritmetisk serie, så äro talen $2b-a-c$ och $2b+a+c$ antingen bägge jämna kvadrater eller också äro deras hälfter det. Detsamma gäller om $2b+a-c$ och $2b-a+c$. *(Y. Ekedahl.)*

Enklare matematiska uppgifter

1960. Bestäm sådana heltalsvärden på koefficienterna p, q, r i ekvationen $x^3+px^2+qx+r=0$, att rötterna bli p, q, r.

(Svar: $p_1=q_1=r_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$, $r_2=0$; $p_3=1$, $q_3=-1$, $r_3=-1$.)

1961. I triangeln ABC drages medianerna AM, BN och CR. Visa, att $\sin\angle BAM\cdot\sin\angle ACR\cdot\sin\angle CBN=\sin\angle CAM\cdot\sin\angle BCR\cdot\sin\angle ABN$.

1962. En regelbunden sexhörnings yta delas i förhållandet $1:3$ av en transversal, som går genom ett hörn. Hur lång är transversalen?

(Svar: $1{,}75\,a$, om sidan är a.)

1963. Den inskrivna cirkelns medelpunkt i en triangel delar två bisektriser i förhållandena $4:3$ och $2:1$ från hörnen räknat. Angiv förhållandet mellan triangelns sidor.

(Svar: $5:7:9$.)

1964. I en rätvinklig triangel är den inskrivna cirkelns medelpunkt I, dess radie r. Höjden mot hypotenusan delar triangeln i två delar, i vilka de inskrivna cirklarnas medelpunkter äro I_1 och I_2. Hur stor är radien i cirkeln genom I, I_1 och I_2?

(Svar: r.)

1965. Förhållandet mellan basradierna i en parallellt stympad, rak kon är x ($x\geq 1$). Förhållandet mellan konens volym och volymen av en rak cylinder med samma höjd och en basradie, som är medeltalet av konens basradier, är y. Visa att y alltid är mindre än ett visst tal och bestäm $\lim_{x\to\infty} y$.

(Svar: $y<4/3$; $\lim_{x\to\infty} y=4/3$.)

1966. I en rätvinklig triangel är den inskrivna cirkelns radie r. En rektangel med två hörn på hypotenusan inskrives. Därvid uppstår utanför rektangeln tre trianglar, i vilka de inskrivna cirklarnas radier äro r_i ($i=1,2,3$). Visa, att $0{,}5r^2\leq\sum r_i^2<r^2$.

1967. Sök och konstruera orten för minimipunkterna till kurvan $y = x^3 - 3ax^2 + 5$, när a varierar.

(Svar: $y_{\text{min}} = 5$ för $x = 0$, om $a < 0$ och $y_{\text{min}} = 5 - 4a^3$ för $x = 2a$, om $a > 0$. Härav orten $y = 5 - \frac{1}{2}x^3$ för $x > 0$.)

1968. Triangeln ABC, som är likbent och rätvinklig vid A, är given till storlek och läge. Punkterna D och E dela BC harmoniskt. Sök orten för den kring triangeln ADE omskrivna cirkelns medelpunkt, när förhållandet vari BC delas varierar.

(Svar: En rät linje genom A parallell med BC.)

1969. Två parabler ha samma vertex och samma axel. Från en punkt på den ena parabeln drages tangenten till den andra. Visa, att förhållandet mellan deras vinkelkoefficienter är konstant.