Årgång 38, 1955

Första häftet

1970. I varje triangel är $16R^2 = r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 + a^2 + b^2 + c^2$. *(I. Gunsjö.)*

1971. En punkt P ligger i första axelvinkeln inom ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, vars högra (vänstra) brännpunkt är F (F_1). Linjerna FP och F_1P skära, utdragna över P, ellipsen i Q och Q_1. Visa, att $PQ > PQ_1$. *(X.)*

1972. Sidan i en kvadrat är n längdenheter, där n är ett helt tal. Den är indelad i n^2 ytenheter, men innehåller därjämte ett stort antal ($= y$) kvadrater av olika storlek. Den givna kvadraten är medräknad. Vi tänker oss figuren lagd med tändstickor, av vilka n st. ingår i den största kvadratens sida. Då åtgår inalles x tändstickor. Sök sambandet mellan variablerna x och y. *(Y. Ekedahl.)*

Enklare matematiska uppgifter

1973. Konstanterna a, b och c är så valda, att ekvationen $c^2(x^2+x)^2 = 4a^2x^3$ satisfieras av värdet $x = (a+b) : (a-b)$, där $a \neq b \neq 0$. Lös ekvationen. Konstanten c får icke förekomma i svaret.
(Svar: $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = (a+b) : (a-b)$; $x_4 = (a-b) : (a+b)$; ($c^2 = a^2 - b^2$))

1974. Vinkeln A i en kvadrat $ABCD$ delas i tre lika delar av linjerna AE och AF. Punkterna E och F ligga på varsin av kvadratsidorna CB och CD. Hur stor del av kvadraten utgör ytan av triangeln AEF?
(Svar: 1/3.)

1975. Lös ekvationen $1 + 2\sin^2 x + 4\sin^4 x + 8\sin^6 x + \cdots = 2\sin 2x$.
(Svar: $x = 22{,}5° + n \cdot 180°$.)

1976. Ytan av en rektangel $ABCD$ delas i tre lika delar av två räta linjer genom A. Hur stor del av diagonalen BD ligger mellan dessa linjer? (Uppgiften löses lämpligen med analytisk geometri.)
(Svar: 1/5.)

1977. I vartdera hörnet av en kvadrat avskäres en likbent triangel så, att återstoden blir en regelbunden åttahörning. Förenas vartannat hörn i denna, erhålles en ny kvadrat. Hörnen i den sistnämnda avskäres så, att en ny åttahörning bildas, osv. i oändlighet. Visa att summan av alla åttahörningarnas ytor är dubbelt så stor som ytan av den ursprungliga kvadraten.

1978. $ABCD$ är en kvadrat och E en godtycklig punkt på sidan DA eller dess förlängning utanför A. På AB:s förlängning utanför B väljes punkten F så, att $BF = DE$, varefter F förenas med E. Från C fälles normalen CG mot EF. Visa, med analytisk geometri eller på annat sätt, att normalens fotpunkt ligger på diagonalen BD.

1979. En regelbunden sexsidig pyramid och ett regelbundet sexsidigt prisma ha lika stora basytor, lika stora volymer och lika stora totala ytor. Baskanterna äro 10 cm. Beräkna sidokanterna.
(Svar: Pyramidens sidokant är $\sqrt{532} = 23,07$ cm, prismats $\sqrt{48} = 6,93$ cm.)

1980. En regelbunden tresidig pyramid inskrives i en given klotsektor vars toppvinkel är 90°. Pyramidens topp faller i kalottens mittpunkt och de övriga hörnen på klotsektorns koniska yta. Sök förhållandet mellan pyramidens maximivolym och klotsektorns volym.
(Svar: $\left(\sqrt{12} + \sqrt{6}\right) : 18\pi = 0,105$.)

1981. Kurvan $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ går genom punkterna (3; 3) och (0; 3). Den senare är en maximipunkt. Den ekvation, som man erhåller genom att sätta derivatan = 0, har utom $x = 0$ två rötter. Dessa äro så beskaffade, att summan av deras kvadrater är 9. Beräkna konstanterna a, b och c.
(Svar: $a = 0$; $b = -9$; $c = 3$.)

1982. Medianen till en katet i en rätvinklig triangel bildar vinkeln v med hypotenusan. Angiv det största värde v kan anta samt triangelns vinklar i detta fall.
(Svar: $\tan v = \frac{1}{4}\sqrt{2}$, $v = 19{,}48°$, vinklarna 54,74° och 35,26°.)

1983. Ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ och cirkeln $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ skära varandra i fyra punkter, vkilka utgöra hörn i en kvadrat. Sök ellipsens excentricitet.
(Svar: $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.)

1984. En rät linje genom inflexionspunkterna på kurvan $x^2y - x + y = 0$ bildar jämte kurvans normaler i inflexionspunkterna två kongruenta trianglar. Beräkna vinklarna i dessa trianglar.
(Svar: 59,04°, 52,12°, 68,84°.)

Andra häftet

1985. Sök och konstruera orten för de punkter som äro så belägna, att de jämte maximi- och minimipunkterna till kurvan $y = x^3 - 3ax$ bilda liksidiga trianglar, när a antar olika positiva värden. *(I. Gunsjö.)*

1986. I parallellogrammen $ABCD$ är $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$. En cirkel genom A och C avskär på linjerna AB och AD segmenten $AB_1 = x$ och $AD_1 = y$, vilka räknas positiva åt B resp. D till från A räknat. Visa, att $c^2 = bx + dy$. *(X.)*

1987. Det finnes i allmänhet åtta cirklar, som tangera en given cirkel och två givna icke parallella räta linjer. Sök tyngdpunkten för de sexton kontaktpunkterna på linjerna. Sök även tyngdpunkten för de åtta centra, när linjerna äro vinkelräta. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

1988. Lös ekvationen $\tan x \cdot \tan 2x + \tan a \cdot \tan 2a + 2 = 0$, där a är en konstant.

(Svar: $90° \pm a + n \cdot 180°$.)

1989. Lös ekvationen

$$(1-\sin x)^{-1} + (1-\sin x)^{-2} + (1-\sin x)^{-3} + \cdots = -2\cot x.$$

(Svar: $x = 300° + n \cdot 360°$.)

1990. Bestäm storleken av den term i serien 42, 39, 36, ..., som är $1/14$ av summan av alla de föregående termerna.

(Svar: 18 eller -105.)

1991. I en given sfärisk sektor med toppvinkeln $2v$ inskrives en regelbunden tresidig pyramid, så att pyramidens topp faller i kalottens mittpunkt och de övriga hörnen på sektorns koniska yta. Beräkna pyramidens maximivolym.

(Svar: $\frac{1}{27}\sqrt{3} \cdot r^3 \tan^2 v$, där r är sektorns radie; $2v \leq 96{,}38°$.)

1992. Första derivatan av funktionen $f(x) = \sqrt{1-x^3}$ är för ett visst x-värde medelproportional till funktionen själv och dennas andra derivata. Bestäm detta x-värde.

(Svar: $-\sqrt[3]{2}$.)

1993. Sök koordinaterna för de punkter på hyperbeln $8x^2 - y^2 = 72$, vilkas avstånd från den på x-axelns negativa del belägna brännpunkten är lika stort som avståndet mellan brännpunkterna.

(Svar: $(5; \pm 8\sqrt{2})$ och $(-7; \pm 8\sqrt{5})$.)

1994. Till cirkeln $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 144 = 0$ drages en sekant, som går genom origo O. Sekanten skär cirkeln i punkterna A och B. Sök koordinaterna för en punkt C på cirkeln så belägen, att sträckan CO är medelproportional till sträckorna AO och BO.

(Svar: $(9{,}6; -7{,}2)$ och $(-9{,}6; 7{,}2)$.)

1995. Genom ena ändpunkten av en parameter till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ drages en diameter. Dennas konjugatdiameter skär ellipsen i punkterna A och B. Visa att — om storaxeln $2a$ varierar medan lillaxeln $2b$ är konstant — A och B röra sig så, att de hela tiden ligga på var sin av två med y-axeln parallella linjer.

(Svar: De delar av linjerna $x = \pm b$, för vilka $-b < y < b$.)

1996. På ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ väljes punkten P så, att kurvans tangent i P går genom fokus till ellipsen $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$. Visa att normalen i P till den förstnämnda ellipsen går genom den senares fokus. Möjlighetsvillkor?
(Svar: $a \geq b\sqrt{2}$.)

1997. Ändpunkterna för två konjugathyperblars parameterkordor i första kvadranten äro A och B. Diametrarna genom A och B äro konjugatdiametrar. Angiv excentriciteterna.
(Svar: $\sqrt{2}$.)

1998. Kurvorna $y = x^2$ och $y = a + bx - x^2$ tangera varandra. Den senare går genom punkten $(-1; -7)$. Bestäm konstanterna a och b.
(Svar: $a_1 = -2$, $b_1 = 4$; $a_2 = -18$, $b_2 = -12$.)

1999. Man har $f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x$. Beräkna $f^{(4)}(0)$.
(Svar: 392.)

2000. Diagonalen i en kvadrat är lillaxel till en ellips, som skär kvadratsidornas förlängningar under räta vinklar. Bestäm excentriciten.
(Svar: $\sqrt{6} : 3$.)

Tredje häftet

2001. I triangeln ABC tangera de vidskrivna cirklarna resp. sidor i A_1, B_1, C_1. Om cirklarnas ytor äro i aritmetisk serie, gäller detsamma om de cirklar, som ha radierna AA_1, BB_1 och CC_1. *(X.)*

2002. Mittpunkterna på sidorna AB, BC, CD, DA av den i en cirkel O inskrivna konvexa fyrhörningen $ABCD$ äro resp. A_1, B_1, C_1, D_1. Härled ett linjärt, homogent samband mellan produkterna $AB \cdot OC_1$, $BC \cdot OD_1$, $CD \cdot OA_1$, $DA \cdot OB_1$. *(V. Thébault.)*

2003. Lös ekvationen $1 : (ab + a + 1) + 1 : (bx + b + 1) + 1 : (ax + x + 1) = 1$. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2004. Om $x + y = a_1$, $x^2 + y^2 = a_2$, $x^3 + y^3 = a_3, \ldots x^n + y^n = a_n \ldots$, och $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, så är $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Kan även utsträckas till negativa heltalsvärden på n.

2005. I en konvergent oändlig geometrisk serie är första termen $\sin x$, andra termen $\sin 2x$ och summan $-\sin 3x$. Bestäm exakta värdet av x.
(Svar: $252° + n \cdot 360°$, $108° + n \cdot 360°$.)

2006. Genom punkten $(a; a^2)$ på kurvan $y = x^2$ kan man draga en eller tre normaler till kurvan. Visa detta och angiv för vilka värden på a den ena eller den andra av de båda möjligheterna inträffar.
(Svar: En normal om $a^2 < 2$, tre skilda om $a^2 > 2$, gränsfall om $a^2 = 2$.)

2007. Från punkten (3; 3) kunna två tangenter dragas till kurvan $4y = x^2 + 4$. Sök dessa tangenters ekvationer och beräkna ytan av den triangel, som begränsas av tangenterna och kordan mellan tangeringspunkterna.
(Svar: $x - y = 0$; $2x - y - 3 = 0$. Ytan är $0,5$ ytenh.)

2008. På kurvan $ay = x^2$ röra sig två punkter A och B så, att skillnaden mellan deras abskissor hela tiden är konstant $= c$. Kurvans tangenter i A och B skära varandra i punkten P. Visa, att även ytan av triangeln ABP är konstant och angiv ytans storlek.
(Svar: $c^3/4a$.)

2009. Sidan AB i triangeln ABC är given till längd och läge, medan sidorna BC och AC variera. Sök orten för punkten C, om sambandet $a^2 - b^2 = \frac{1}{2}c^2$ gäller.
(Svar: En normal till AB, som delar AB i förhållandet 1:3.)

2010. Från högra brännpunkten i ellipsen $m^2x^2 + a^2y^2 = a^2m^2$ fälles normalen mot tangenten i punkten $(0; m)$. Sök orten för normalens fotpunkt, när storheten a är konstant men m antar olika positiva värden.
(Svar: Den del av cirkeln $x^2 + y^2 = a^2$, som faller i första kavdranten om $m < a$, den del av y-axeln, för vilken gäller $y > a$, om $m > a$.)

2011. Kateterna i en rätvinklig triangel äro $2x$ cm och kx cm samt hypotenusan hx cm. Mätetalet för triangelns yta mätt i cm^3 är lika stort som mätetalet för omkretsen i cm. Beräkna k och h som funktioner av x, upprita motsvarande kurvor samt angiv för vilka siffervärden på x uppgiften är möjlig.
(Svar: $k = 4(x-1) : (x^2 - 2x)$; $h = (2x^2 - 4x + 4) : (x^2 - 2x)$, $x > 2$.)

2012. I ett upptill öppet kärl, som invändigt har formen av en liksidig cylinder med lodrät axel, nedlägges en stålkula och vatten påfylles, tills kulan nätt och jämnt täckes. Hur förhåller sig för ett givet kärl klotets yta S till cylinderns basyta B, när den erforderliga vattenmängden är störst?
(Svar: $S = 2B$.)

2013. En likbent triangel med konstant omkrets roterar kring ena benet. Sök förhållandet mellan basen och sidan, när rotationskroppens volym är så stor som möjligt.
(Svar: $\sqrt{17} - 3$.)

2014. I triangeln ABC är vinkeln A 120°, sidan AC 2 cm och bisektrisen från hörnet C 3 cm. Beräkna exakta värdet av triangelytan.
(Svar: $2{,}2\sqrt{3}+2{,}4\sqrt{2}$ cm^2.)

Fjärde häftet

2015. För vilka konstanter a, b, c, och d är identiskt

$$x^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)?$$ *(N. J.)*

2016. På sidorna i en vid A rätvinklig triangel uppritas utåt liksidiga trianglar ABC_1, BCA_1 och CAB_1. Visa, att om triangeln $A_1B_1C_1$ är rätvinklig vid C_1, så är $\tan^2 C + \tan^2 A_1 = 1$. *(I. Gunsjö.)*

2017. I ekvationen

$$A_1 \cot(x-\alpha_1) + A_2 \cot(x-\alpha_2) + \ldots + A_n \cot(x-\alpha_n) = 0$$

äro $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alla positiva; storheterna $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ äro olika och ligga mellan 0 (inklusive) och π (exklusive). Visa, att ekvationen har n st distinkta rötter $x_1, x_2, \ldots, x_n$ belägna i nämnda intervall. Beräkna $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ på en multipel av π när. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2018. Ett tal, vars alla siffror utom den första äro lika, fördubblas, varvid ett tal erhålles, vars siffror utom den sista äro lika. Vilket är det förstnämnda talet?
(Svar: 1666…6, 2777…7, 3888…8 och 4999…9.)

2019. Lös ekvationen

$$\tan x + \tan^2 x + \tan^3 x + \cdots = \tan 2x - \tan^2 2x + \tan^3 2x - \ldots$$

(Svar: $n \cdot 180°$; $15° + n \cdot 180°$.)

2020. I en triangel är $r_a = 4r = a$. Beräkna vinklarna.
(Svar: $A = 73{,}74°$, $B = C = 53{,}13°$.)

2021. I en triangel ABC är $A = 60°$, $a = 5$ cm och $T = \sqrt{3}$ cm^2. Beräkna sidorna b och c.
(Svar: $\frac{1}{2}\left(\sqrt{37} \pm \sqrt{21}\right)$ cm.)

2022. I en regelbunden tetraeder med kanten a bortskäres med ett plan parallellt med en sidoyta en topptetraeder, vars begränsningsyta är lika stor som den kvarvarande stympade tetraederns totala begränsningsyta. Sök det nämnda planets avstånd till tetraederns spets.
(Svar: $2a/3$.)

2023. Ett plan lägges genom ett hörn av en oregelbunden tetraeder, så att två kanter delas i förhållandet 1:2. Angiv i vilket förhållande tetraederns volym delas av planet.

(Svar: 1:8 eller 2:7 eller 4:5.)

2024. En regelbunden oktaeder och en kub ha samma kantlängd och gemensam medelpunkt. Kuben avskär lika stor volym av oktaedern vid varje hörn. Beräkna förhållandet mellan de delar av kuben och de delar av oktaedern, som ligga utanför kropparnas gemensamma del.

(Svar: $\frac{1}{3}\left(25+16\sqrt{2}\right)=15,88$.)

2025. I en rätvinklig triangel bildar medianen mot den ena kateten vinkeln α med hypotenusan och den sökta vinkeln x med den andra kateten. Man får då två värden på x, om $\sin\alpha < \frac{1}{3}$. Visa – med eller utan räkning – att $x_1 + x_2 + \alpha = 90°$. (Se uppgift 1982 i marshäftet 1955.)

2026. Angiv återstående sida i de trianglar, i vilka två sidor äro 4 cm och $3\sqrt{3}$ cm samt en vinkel 30°.

(Svar: I första kongruensfallet blir tredje sidan $\sqrt{7}$ cm, i det fjärde $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{23}\right)$ cm, om den större sidan står mot 30°, och $\frac{1}{2}\left(9\pm\sqrt{37}\right)$ cm, om den mindre står mot 30°.)

2027. Beräkna för $x = 0$ tredje derivatan av y med avseende på x för funktionssambandet $x^2 - 2xy + 3x + y - 2 = 0$.

(Svar: 12.)