Årgång 40, 1957

Första häftet

2082. I punkterna 0, v, $2v$, … nv på enhetscirkeln placeras massorna $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ resp. Hur långt från cirkelns medelpunkt ligger tyngdpunkten för detta massystem? *(X.)*

2083. Trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$ äro inskrivna i samma cirkel. Deras sidor tangera samma parabel. Det finns en i triangeln ABC inskriven parabel med brännpunkten i A_1. Visa, att dess diametrar äro parallella med B_1C_1. *(X.)*

2084. För $a^2 < 64$ bilda kurvorna $y = 5x^4 - 24x^2 + 16$ och $y = a(x^3 - 4x)$ en av tre öglor sammansatt figur. Vilket samband råder mellan dess ytor? *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2085. Talen a, b, $a + 2b + c$ bilda i denna ordning en geometrisk serie. Visa, att talen a, b, c även göra det.

(efter Theon från Smyrna, 2:a årh. e.K.)

2086. I en serie är $t_n = n^2 + an + b$, i en annan är $t_n = n^2 + An + B$. Man önskar att den förra serien skall bestå av samma termer som den senare med undantag av ett visst antal termer, varmed den förra inledes. Visa, att detta är möjligt, om $A - a$ är ett positivt jämnt tal och $A^2 - a^2 = 4(B - b)$.

2087. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - 3 = 4(x + y + z) \\ y + 5 = 6(x + y + z) \\ z - 2 = 7(x + y + z) \end{cases}$$

(Svar: $x = 3; y = -5; z = 2$)

2088. Centrum för den kring en triangel omskrivna cirkeln är O, centra för triangelns in- resp vidskrivna cirklar är I, I_a, I_b, I_c. Visa, att den största av trianglarna OII_a, OII_b, OII_c har lika stor yta som de övriga tillsammans.

2089. Om $\tan(45° + x) = a$, beräkna värdet av $2\tan 2x + \tan(45° - x)$.
(Svar: a)

2090. Medianen från hörnet A i triangeln ABC bildar med sidorna AB och AC vinklarna 15° resp 30°. Visa, att medianen bildar 45° med sidan BC.

2091. I ett regelbundet tresidigt hörn är sidovinkeln α och kantvinkeln β. Visa, att $\dfrac{1}{\cos\beta} - \dfrac{1}{\cos\alpha} = 1$.

2092. En rät linje genom punkten $(12,0)$ skär räta linjen $2x + y - 4 = 0$ i A och linjen $4x - 3y + 12$ i B. Visa, att y-axeln är den ena bisektrisen till vinkeln AOB, där O är origo.

2093. Beräkna avståndet mellan de punkter på den trigonometriska cirkeln, som motsvarar lösningarna till ekvationen

$$\cos x + \sin x + \frac{1}{2}\sqrt{6} = 0.$$

(Svar: Radien)

2094. Medelpunkten till en cirkel ligger på omkretsen till en cirkel med radien R. Den förstnämndas periferi halverar den senares yta. Bestäm radien.

(Svar: 1,159R. Man får $\sin\alpha - \alpha\cos\alpha = \pi/2$, om α är medelpunktsvinkeln för den halverande bågen.)

2095. Ange sambandet mellan vinklarna A, B, C, för att likheten

$$\frac{\tan A + \tan C}{\tan B + \tan C} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

skall gälla.

(Svar: $A - B = n \cdot 180°$ eller $A + B + C = n \cdot 180°$)

2096. En rät linje skär kurvan $y = ax^2 + bx + c$ i punkterna A och B. Tangenterna i dessa punkter ha vinkelkoefficienterna k_1 och k_2. Sök vinkelkoefficienten för AB.

(Svar: $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$)

2097. Tangenten i en punkt P på kurvan $y = ax^2 + bx$ skär y-axeln i Q. Sök orten för mittpunkten på PQ.

(Svar: Tangenten i origo)

2098. En rät linje skär kurvan $y = ax^3 + bx$ i origo samt i A och B. En linje parallell med AB tangerar kurvan i P och skär den i Q. Visa att $AB : PQ = 2 : \sqrt{3}$.

Andra häftet

2099. En cirkel och en punkt P på dess tangent i A äro givna. Genom P drages en linje l, som skär cirkeln i B och C. Sök orten för skärningspunkten mellan l och en inre eller yttre bisektris till vinkeln BAC. *(X.)*

2100. Beräkna
$$\frac{(a+c)(a+d)(a+e)(a+f)}{(b+c)(b+d)(b+e)(b+f)}$$
då alla faktorer i täljare och nämnare äro $\neq 0$ samt $\sum a = 0$, $\sum a^3 = 0$ utsträckta över $a, b, \ldots, f$. *(Examensuppgift i Cambridge.)*

2101. Det i tetraedern $ABCD$ inskrivna klotet med centrum I tangerar sidoytorna ABC, ABD, ... i resp D_1, C_1 .... Visa, att ytorna ABC, ABD, ... äro proportionella mot volymerna av pyramiderna $IA_1B_1C_1$, $IA_1B_1D_1$, ... *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2102. Från punkten $(0,6)$ dragas tangenter till parabeln $y^2 = 12x$. Hur stor är den yta, som ligger mellan tangenterna och kurvan?
(Svar: 12 ytenheter)

2103. Den yta som begränsas av koordinataxlarna, kurvan $y(2x+3) = 1$ och linjen $x = a \quad (a > 0)$ får rotera kring x-axeln. Beräkna den därvid uppkomna kroppens volym V samt bestäm $\lim_{a\to\infty} V$.
(Svar: $a\pi/3(2a+3)$; $\pi/6$)

2104. Kurvan $y = ax^4 - b$ (a och b positiva konstanter) råkar x-axeln i punkterna A och B. Kurvans tangenter i A och B råkas i C. I vilket förhållande delas ytan av triangeln ABC av kurvbågen AB?
(Svar: 3:2)

2105. Konstruera kurvan $y = x^3 + x^2 + 4$ för $y \geq 0$. Undersök därefter variationen hos den yta T, som begränsas av kurvan, x-axeln och två med y-axeln parallella linjer med inbördes avståndet en längdenhet.
(Svar: $T = x^3 + 2{,}5x^2 + 2x + 4\frac{7}{12}$, Max.= $4\frac{1}{12}$ för $x = -1$. Min.= $4\frac{7}{108}$ för $x = -\frac{2}{3}$. Gränsmin.= $2\frac{7}{12}$ för $x = -2$. Summan av max och min är lika för de båda kurvorna.)

2106. Den yta, som ligger mellan en parabels parameter och kurvan, får rotera i ordning kring parabelaxeln, parametern och vertextangenten. Ange förhållandet mellan de tre därvid uppkomna rotationskropparnas volymer.
(Svar: 15:16:24)

2107. Två punkter P och Q på en parabel äro belägna på samma sida om axeln. Linjen OP, där O är vertex, avskär ett segment, som halveras av linjen OQ. Sök maximum för vinkeln POQ.
(Svar: 6,61°.)

2108. Bestäm andragradspolynomet $f(x)$, så att kurvan $xy = f(x)$ får linjen $2x - y - 3 = 0$ till asymptot och en minimipunkt med ordinatan 1. Upprita kurvan.
(Svar: $f(x) = 2x^2 - 3x + 2$)

2109. I en ellips är storaxeln AB och lillaxeln CD. Mittpunktsnormalen till linjen AC delar CD i förhållandet 4:1 från C räknat. Bestäm excentriciteten.
(Svar: $\sqrt{66}/11$)

2110. Två punkter P och Q äro belägna på den del av kurvan $x^2y = x - 1$ som ligger ovanför x-axeln. P_1 och Q_1 äro respektive projektioner på x-axeln. Ange koordinaterna för P och Q, då den yta som begränsas av kurvan, x-axeln och linjerna PP_1 och QQ_1 har sitt största värde, om P_1Q_1 är en längdenhet.
(Svar: Abskissorna är $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$ och $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Ordinatorna är $\sqrt{5}-2$. Deras likhet inses utan räkning.)

2111. En cirkel med centrum O och radien r samt en punkt P på avståndet $2r$ från O äro givna. Genom P drages sekanterna PAB och PCD, som bilda lika vinklar med centrallinjen. Angiv maximum för ytan av fyrhörningen $ABCD$.
(Svar: $1{,}767r^2$, när vinkeln $APC = 38{,}34°$.)

Tredje häftet

2112. Lös ekvationssystemet

$$x + y + z = \frac{ax + by + cz}{a + b + c} = \frac{a^2x + b^2y + c^2z}{(a + b + c)^2} = -xyz.$$

(X.)

2113. Två cirklar O och O_1 tangera en rät linje i A resp. A_1 ($A \neq A_1$). Om den med linjen parallella tangenten till O skär O_1 i Q och $AA_1 = A_1Q$, vad vet man då ytterligare om cirklarna?

(V. Thébault.)

2114. Två varandra skärande räta linjer och en punkt H utanför båda äro givna. Sök orten för en punkt, vars spegelbilder i de givna linjerna ligga i rät linje med punkten H.

(Journal de mathématiques élémentaires.)

Enklare matematiska uppgifter

2115. Den korda AB, som förenar de till vinklarna 150° och 275° hörande punkterna på den trigonometriska cirkeln, skäres i C av den korda, som förenar de till 73° och 185° hörande punkterna. Beräkna $AC : CB$.

(Svar: $1 : 3,708$)

2116. I triangeln ABC tangerar den inskrivna cirkeln sidorna AB, BC, CA i resp. C_1, A_1, B_1. Genom dessa punkter dragas linjer parallella med rep. CI, AI, BI, där I är centrum för cirkeln. Visa, att linjerna råkas i samma punkt.

2117. Två cirklar med radierna 1 cm och 2 cm tangera varandra utantill i punkten A. En liksidig triangel har ett hörn i A och av de övriga hörnen ett på vardera cirkeln. Beräkna sidan.

(Svar: $\frac{1}{7}\sqrt{84} = 1,309$ cm)

2118. Genom mittpunkten av en radie i ett halvklots plana yta lägges normalplanet till radien. Bestäm förhållandet mellan totala begränsningsytorna av de kroppar , i vilka halvklotet delas av normalplanet.

(Svar: $(61\pi + \sqrt{108}) : (29\pi - \sqrt{108}) = 2,503$)

2119. En triangels sidor förhålla sig som 11:10:5. Visa, att medianen mot den mellersta sidan delas i förhållandet 1:2:1 av den inskrivna cirkelns periferi.

2120. En rätvinklig triangel har den räta vinkelns spets i $(4,0)$, ett hörn på y-axeln och konstant yta = 20 ytenheter. Sök orten för det tredje hörnet.

(Svar: $(x-4)^2 + (y \pm 5)^2 = 25$)

2121. En rätvinklig triangel är inskriven i ellipsen $2x^2 + y^2 = 1$ med kateterna parallella med axlarna. När triangeln roterar kring hypotenusan, uppkommer en dubbelkon. Sök hypotenusan, när volymen är så stor som möjligt.

(Svar: $\frac{1}{3}\sqrt{9+\sqrt{297}} = 1,707$. Volymen $= \frac{8}{3}\pi x^2 y^2 / \sqrt{x^2+y^2} =$ $\frac{8}{3}\sin^2 v \cos 2v / \cos v$, om ett hörn (x, y) ligger i första kvadranten och $\sin v = x$.)

2122. I en punkt P på en parabel dras tangenten. Denna skär axeln i A. En linje genom A vinkelrät mot tangenten råkar vertextangenten i B. Den spetsiga vinkeln mellan tangenten och axeln är u och vinkeln APB är v. Visa, att $\tan u \cdot \tan v = 0,5$.

2123. Genom sambanden $x = t^2 + t$, $y = t^2$, definieras y som funktion av x. En godtycklig tangent till motsvarande kurva råkar koordinataxlarna i A och B. Sök och upprita orten för mittpunkten av sträckan AB.

(Svar: Hyperbeln $y(8x+1) + 8x^2 = 0$)

2124. Storaxeln till en ellips sammanfaller med parametern till en parabel och lillaxelns ena ändpunkt ligger i parabelns vertex. Hur stor är ytan mellan kurvornas tre gemensamma tangenter? Parabelns parameter är $4a$.
(Svar: $2a^2\sqrt{2}$)

2125. Diskutera kurvan $y(x-1) = x^n$, där n är ett udda heltal större än 1.
(Svar: Asymptot: $x = 1$. Minimipunktens abskissa $= n/(n-1)$. Terrasspunkt i origo.)

2126. Hyperbeln $x^2 - 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$ och en ellips ha gemensamma parameterkordor. Sök ellipsens yta.
(Svar: $10\pi\sqrt{5} = 70{,}25$ ytenheter)

2127. Bestäm största avståndet mellan en punkt på kurvan $x^3 - x^2y + 10x - y = 0$ och dess asymptot.
(Svar: $\frac{9}{4}\sqrt{2}$)

Fjärde häftet

2128. P är en punkt på den kring den liksidiga triangeln ABC omskrivna cirkeln. Räta linjerna PA, PB, PC skära BC, CA, AB i punkterna A_1, B_1, C_1 resp. Visa, att $PA \cdot PB \cdot PC = PA_1 \cdot PB_1 \cdot PC_1$.
(Sats av Steiner.)

2129. En cirkel med centrum C och radien R samt en punkt $O \neq C$ ej belägen på cirkeln äro givna. En rörlig linje genom O skär cirkeln i A och B. På linjen avsättes $\overrightarrow{ON} = m \cdot \overrightarrow{OA} + n \cdot \overrightarrow{OB}$ (m och n konstanter, $m \neq n$). Sök enveloppen för normalen i N mot linjen. *(X.)*

2130. I parallelltrapetset $ABCD$ äro BC och AD parallella. P är en punkt utanför AB. Linjerna CQ och DQ äro parallella med AP resp. BP. Visa, att P ligger lika långt från CD som Q från AB, då bägge avstånden mätas i trapetsbasernas riktning. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2131. Ett tal börjar med n ettor, därefter kommer $n+1$ tvåor och sist en femma. Visa att talet är en jämn kvadrat.

2132. Kateterna i en rätvinklig triangel äro 1 cm och 2 cm. En cirkel går genom den räta vinkelns spets och delar hypotenusan i tre lika delar. Ange cirkelns radie.
(Svar: $\sqrt{170}/18 = 0{,}724$ cm)

2133. Ange u som funktion av z, när $u = \sin^2[x+y) + \sin^2(x-y)$ och $z = \cos 2x \cos 2y$.
(Svar: $u = 1 - z$)

2134. Lös ekvationen

$$\frac{(1-\cos 6x)(1-\cos x)}{(1-\cos 2x)(1-\cos 3x)} = 0,25.$$

(Svar: $\pm 41{,}41° + n \cdot 360°$; $\pm 75{,}52° + n \cdot 360°$.)

2135. I en regelbunden tresidig pyramid äro baskanterna 1 cm och höjden h cm. En punmkt P på höjden förenas med tetraederns hörn. Ange summan (= y cm) av P:s avstånd till hörnen som funktion av P:s avstånd (= x cm) till basytan och studera funktionen.
(Svar: $y = h - x + \sqrt{9x^2+3}$. Om $0 < x \le \frac{1}{12}\sqrt{6}$ avtar y från $h + \sqrt{3}$, då $x = 0$, till $\sqrt{3+9h^2}$, då $x = h$. Om $h > \frac{1}{12}\sqrt{6}$ avtar y från $h + \sqrt{3}$ till ett minimum $h + \frac{2}{3}\sqrt{6}$ för $x = \frac{1}{12}\sqrt{6}$, för att sedan växa till $\sqrt{3+9h^2}$.)

2136. Bestäm konstanterna a, b, c så, att kurvan $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$ får en terrasspunkt i $(1,0)$.
(Svar: $a = -8/3$, $b = 2$, $c = -1/3$)

2137. Om $x = z - \cos z$ och $y = z + \cos z$, så är $4(y'')^2 = y'(1+y')^4$.

2138. Kurvan $y = (x-1)(x-a)$ skär axlarna i A, B och C. Tangenterna till kurvan i dessa punkter bilda en triangel. Sök orten för dess tyngdpunkt, när a varierar.
(Svar: $y = -3(x - \frac{2}{3})^2$.)

2139. Två av konjugatdiametrarna till en ellips, vars axlar äro parallella med koordinataxlarna, falla utefter linjerna $8x - y - 10 = 0$ och $x + 2y + 3 = 0$. Ena brännpunkten ligger på linjen $x - y = 0$. Ange ellipsens ekvation.
(Svar: $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 12$.)

2140. Genom två fasta punkter dras linjer parallella med var sin av två konjugatdiametrar i en given ellips. Orten för dessa linjers skärningspunkt är en annan ellips. Visa, att dess excentricitet är lika stor som den givna ellipsens.

2141. I en parabel drages en korda genom brännpunkten F. Diametern genom kordans mittpunkt M skär parabeln i punkten P. Visa, att triangeln PFM är likbent.

2142. I ett parallelltrapets ligga de icke parallella sidorna s_1 och s_2 på linjerna l_1 och l_2. Om cirkeln med diametern s_1 tangerar l_2, så tangerar cirkeln med diametern s_2 linjen l_1.