Årgång 42, 1959

Första häftet

2193. Tre cirklar med radierna r_1, r_2 och r_3 skär varandra under räta vinklar två och två. Hur stor är ytan av den triangel, som har sina hörn i cirklarnas centra? *(X.)*

2194. G är tyngdpunkten till tetraedern $ABCD$. Kantlinjerna BC, CA och AB betecknas med respektive a, b och c och de motstående kanterna med respektive a_1, b_1 och c_1. Visa, att $\sum(a^2 - a_1^2)^2 = 4\left\{4\sum GA^4 - \left(\sum GA^2\right)^2\right\}$. *(V. Thébault.)*

2195. Cirkelbågen $ABCD$ delas av punkterna B och C i tre lika delar. Om man uppritar den cirkelbåge AD, som ligger på samma sida av kordan AD och tangerar kordan AB, kan det inträffa att den av dessa bågar bildade ”månskäran” har samma yta som femhörningen $ABCDE(A)$, där E är skärningspunkten mellan linjerna AC och BD. Sök villkoret härför. *(Efter Hippokrates, 5:e årh. f. Kr.)*

Enklare matematiska uppgifter

2196. Före räknemaskinernas tid brukade man i engelska banker ersätta den ofta förekommande divisionen $N : 7300$ (räntan på N pund för en dag då räntefoten är 5% och ett år 365 dagar) med $N + N : 3 + N : 30 + N : 300) : 10\,000$, där termerna kan erhållas genom huvudräkning.Hur stort procentuellt fel uppkom därigenom?
(Svar: 0,01% för stort värde.)

2197. Talet 7921 är en jämn kvadrat. Visa, att det tal som uppstår, när n nollor inskjutes dels mellan 1 och 2, dels mellan 2 och 9 samt n nior mellan 9 och 7, varjämte n nior tillfogas i början av talet, är en jämn kvadrat.

2198. Förenkla uttrycket $b^2 : \left[a - a^2 : \{a + b^2 : (a - b^2 : a)\}\right]$.
(Svar: a.)

2199. Kring en kvadrat med sidan a omskrives två likbenta trianglar med lika ytor men olika höjder h och k. Visa, att $1/h + 1/k = 1/a$.

2200. I en rak kon är toppvinkeln 90°. Två generatriser bildar 80° med varandra. Hur stor vinkel bildar de, om mantelytan utbredes i ett plan?
(Svar: 92,45°.)

2201. Räta linjen $3x + 4y = 0$ är normal och tangent till kurvan $y = ax^3 + bx^2 + cx$ i de punkter, vilkas abskissor är 0 resp. 2,5. Ange kurvans ekvation.

(Svar: $3y = x(x-1)(x-4)$.)

2202. I vilket förhållande delar y-axeln den yta, som begränsas av x-axeln och kurvan $y = \sin x + \cos x$ inom intervallet $-\pi/4 \le x \le 3\pi/4$?

(Svar: $(3-\sqrt{8}) : 1$.)

2203. Projektionerna av en punkt P på kurvan $y = ax^n$ är X på x-axeln och Y på y-axeln. Rektangeln $OXPY$, där O är origo, delas av kurvan i ett visst förhållande. Ange detta om $n > 0$.

(Svar: $1 : n$.)

2204. En variabel tangent till parabeln $y^2 = x$ skär parabeln $2y^2 = x + 2y$ i punkterna A och B. Sök orten för mittpunkten av AB.

(Svar: Den inom parabeln belägna delen av linjen $x - 2y + 1 = 0$.)

2205. Från en punkt P på kurvan $y(x^2+1) = 1$ drages linjer som tangerar kurvan i punkterna A och B med abskissorna x_1 och x_2. Visa, att $x_1 x_2 = -1$.

Andra häftet

2206. I en följd av $2n+1$ konsekutiva hela tal är summan av de $n+1$ första talens kvadrater lika med summan av de n återstående kvadrater. Bestäm första talet i följden. *(X.)*

2207. I triangeln ABC är sidan BC given till längd och läge. Medianen mot BC och ytterbisektrisen till vinkeln A är lika långa. Sök orten för punkten A. *(V. Thébault.)*

2208. I en cirkel $(O; R)$ är AB en diameter och n en normal till AB. Dessa element är givna. En variabel linje genom A, som skär cirkeln på nytt i P, råkar n i S, så att dess normal i denna punkt skär cirkeln i Q (och Q_1). Sök orten för mittpunkten av kordan PQ.

(Journal de mathématiques élémentaires.)

Enklare matematiska uppgifter

2209. Rötterna till ekvationen $ax^2 + bx - a = 0$ är x_1 och x_2. Visa att $(x_1^2+1)/x_1 + (x_2^2+1)/x_2 = 0$. ($a \ne 0$.)

2210. Uppdela $(1-x^2)(1-y^2) - 4xy$ i faktorer.

(Svar: $(1 - xy + x + y)(1 - xy - x - y)$.)

2211. I två likformiga trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ är $a + b_1 = 12$, $a_1 + b = 13$ och $a + b = 15$. Bestäm längdskalan.

(Svar: $a : a_1 = 3 : 2$.)

2212. En cirkelsektors medelpunktsvinkel är 90°. En rektangel med två hörn på bågen är inskriven i sektorn. Visa, att förhållandet mellan rektangelsidorna är 1:2, om diagonalen och radien är lika långa.

2213. En triangels sidor är 56 cm, 39 cm och 35 cm. Visa, att den största vinkeln är exakt 60° mer än den minsta.

2214. En punkts avstånd till den räta linjen $y = x$ är medelproportional till avstånden till koordinataxlarna. Sök orten för punkten.
(Svar: Räta linjerna $y = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)x$.)

2215. En rörlig korda i parabeln $y^2 = 4ax$ har den konstanta projektionen $2l$ på styrlinjen. Sök orten för kordans mittpunkt; visa, att kordan tangerar denna ort samt att den avskär ett segment med konstant yta av den givna parabeln.
(Svar: Parabeln $y^2 + l^2 = 4ax$.)

2216. I en likbent triangel med given sida och varierande bas inskrives en kvadrat, så att två hörn faller på basen. Bestäm triangelns toppvinkel så, att kvadratens sida blir så stor som möjligt.
(Svar: 76,88° ($\tan \frac{1}{2}\alpha = 1 : \sqrt[3]{2}$).)

2217. Parablerna $y = -x^2 + 6x - 5$ och $y = x^2 - 6x + 11$ skär y-axeln i A resp B. Kurvorna råkas i en punkt P med abskissan 2. Beräkna ytan APB.
(Svar: $13\frac{1}{3}$ ytenh.)

2218. Två klot tangerar varandra i punkten O. Avståndet mellan deras medelpunkter är a. Ett mot centrallinjen vinkelrätt plan, som skär kloten, lägges på avståndet b från O. Bestäm den volym, som från O räknat, inneslutes av kloten och planet.
(Svar: πab^2 volymsenh. – Man får $v = \int_0^b 2\pi ax\,dx$. Samma resultat erhålles, om kloten skär varandra i planet p och b är avståndet mellan p och ovannämnda plan.)

Tredje häftet

2219. Från hörnen A, B och C i en triangel fälles mot en rät linje normalerna AA_1, BB_1 och CC_1. På dessa bestämmes punkterna A_2, B_2, C_2 så, att $A_1A_2 : A_1A = B_1B_2 : B_1B = C_1C_2 : C_1C = k$ till storlek och tecken. Visa, att normalerna från A_2, B_2, C_2 mot BC, CA, AB råkas i samma punkt. *(X.)*

2220. I cirkeln med medelpunkten O är inskriven en regelbunden 26-hörning, $A_0A_1 \ldots A_{25}A_0$. Om O_1 och O_2 är spegelbilderna av O i diagonalerna A_0A_{24} och A_1A_5, så är sträckan O_1O_2 lika lång som sidan i en i cirkeln O inskriven liksidig triangel. *(V. Thébault.)*

2221. En rät linje L skär kurvan $y = f(x) = a_0x^n + \cdots + a_n$ i n distinkta punkter. Vinkelkoefficienterna för kurvtangenterna i dessa punkter och för L är $k_1, \ldots, k_n$ respektive k. Visa att $\sum_1^n 1/(k_r - k) = 0$.

(N. J.)

Enklare matematiska uppgifter

2222. I den rätvinkliga triangeln ABC är AM och AH resp. median och höjd mot hypotenusan BC. Från H fälles normalen HN mot AM. Visa, att figuren innehåller fem sträckor, av vilka tre är aritmetiska, geometriska och harmoniska medier till de två återstående. – Om $1/a - 1/b = 1/b - 1/c$ är b harmoniskt medium till a och c.

(Efter Pappos, omkring 300 år e. K.)

(Svar: AM, AH och AN är respektive aritmetiskt, geometriskt och harmoniskt medium till BH och HC. Pappos uppger sig ha fått denna uppgift av en anonym matematiker. Själv kunde han inte finna det harmoniska mediet.)

2223. Medelpunkterna till tre lika cirklar, som skär varandra två och två, är ekvidistanta punkter på en rät linje. Denna figur innehåller (på flera sätt) fem sträckor, av vilka tre är aritmetiska, geometriska och harmoniska mediet till de återstående, sedan man tillfogat en rät linje utom centrallinjen.

(Svar: Centrallinjen för cirklarna I, II, III, skär III i P och Q, M är centrum för den mellersta, II, G ena skärningspunkten mellan I och III, A mellan II och III. Linjen AM skär III på nytt i H. Då är MA, MG och MH de tre medierna till PM och MQ.)

2224. För vilka värden på a har ekvationen

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{a-1}{a}\right)^2 = \frac{x}{x+1} + \frac{a-1}{a}$$

en dubbelrot? Vilken är dubbelroten?

(Svar: $a_1 = \sqrt{8} - 2$, $a_2 = -(\sqrt{8} + 2)$; 1.)

2225. Beräkna $\sqrt{a^4b^3 + a^3b^4}$, om a och b är rötterna till ekvationen $133x^2 + 397x - 589 = 0$.

(Svar: 2,212.)

2226. I en likbent triangel är omskrivna cirkelns radie 2 cm och avståndet från höjdernas skärningspunkt till basen 3 cm. Bestäm ytan.

(Svar: $21\frac{1}{3}$ cm^2)

2227. I triangeln ABC är vinkeln A 90°. Höjden från A råkar BC i H och bisektrisen från B råkar AC i E. Visa, att sidorna bildar en geometrisk serie, om HE är parallell med AB.

2228. Om kurvan $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ har en maximi- och en minimipunkt, så går linjen $3f'''(y' - f) + f'f'' = 0$ genom dessa punkter och centrum. – Ledning: Visa först, att ekv. är linjär i x och y.

2229. Från en rörlig punkt P på den räta linjen $x = -3$ drages tangenter till parabeln $y^2 = 4x$. Tangenterna råkar vertextangenten i A och B. Sök orten för medelpunkten till cirkeln PAB.

(Svar: Linjen $x + 1 = 0$. – Om normalen från fokus F mot den givna linjen (som kan vara godtycklig) råkar denna i N, är orten mittpunktsnormalen till FN med undantag av punkter, som hör till P inom parabeln.)

2230. En likbent triangel med toppvinkeln α är inskriven i en cirkel. En transversal genom cirkelns medelpunkt delar det ena benet i förhållandet $m : n$ från basen räknat. I vilket förhållande delas det andra benet (från basen räknat)?

(Svar: $(2\cos\alpha - m/n) : 1$. – Om i en likbent triangel en transversal t delar de lika sidorna och höjden i förhållandena f_1, f_2 och f_h, så är $f_1 + f_2 = f_h$. Går t genom den omskrivna cirkelns centrum, så är $f_h = 2\cos\alpha$.)

Fjärde häftet

2231. I ena ändpunkten B av en parabelkorda AB drages kurvans tangent. En godtycklig diameter skär kordan i O, parabeln i P och tangenten i T. Med AB parallella linjer genom P och T skär diametern genom A i A_1 respektive A_2. Diametern genom B skär A_1P i B_1. Visa, att ytorna $AOTA_2(A)$ och $ABB_1A_1(A)$ är lika stora. *(X.)*

2232. Sidornas mittpunkter i triangeln ABC är A_1, B_1, C_1 så att A_1 ligger på BC. På sidornas mittpunktsnormaler avsättes A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 proportionella mot a, b, c och riktade alla ut ur triangeln eller alla inåt. Normalen genom A mot B_2C_2 skär A_1A_2 i A_3. På samma sätt erhålles B_3 och C_3. Visa, att $A_1A_3 : B_1B_3 : C_1C_3 = a : b : c$.

(V. Thébault.)

2233. I sagan om Tors besök hos jättarna fick Tor som bekant utan att han visste om det göra ett försök att lyfta Midgårdsormen. Om vi förutsätter, att ormen räckte runt jorden, så att den bet i sin stjärt, hur högt lyfte Tor ormen, om den tänjdes en meter. Jordens omkrets är 637 mil. *(I. Gunsjö.)*

Enklare matematiska uppgifter

2234. Sök exakta värdet av den reella roten till ekvationen

$$2x^3 + x^2 - 3x + 3 = 0.$$

(Svar: $-3 : (\sqrt[3]{19} - 1)$. – Multiplicera båda leden med 9.)

2235. Lös ekvationssystemet:

$$x^2 + xy + y^2 = 7, \quad x^2 + xz + z^2 = 13, \quad y^2 + yz + z^2 = 19.$$

(Svar: x, y och z är resp. ± 1, ± 2, ± 3 eller $\pm 5 : \sqrt{3}$, $\mp 1 : \sqrt{3}$, $\mp 7 : \sqrt{3}$.)

2236. I varje triangel ABC är $a : AH \pm b : BH \pm c : CH = abc : AH \cdot BH \cdot CH$, om H är ortocentrum. Övre tecken för A spetsig, undre för A trubbig, om A är största vinkeln.

2237. Vilket av bråken $\sqrt{6,5} : (\sqrt{63} - \sqrt{11,25})$ och $3,4 : (\sqrt{112} - \sqrt{20})$ är störst?

(Svar: Det senare; kvoten är $10\sqrt{26} : 51$.)

2238. Visa, att summan av de inverterade värdena av det största och det minsta av fyra godtyckliga konsekutiva positiva hela tal är större än summan av de mellerstas inverterade värden.

2239. I triangeln ABC, där $AB : AC = \sqrt{3} : 1$, utdrages sidan BC. På förlängningen tages punkterna D och E, så att $BC = CD = DE$. Visa, att $AE : AD = \sqrt{3} : 1$.

2240. Bestäm de exakta värden, som termerna $3\sin x$, $4\cos x$ och $2 : \cos x$ var för sig antar för våren på x, som satisfierar ekvationen $3\sin x + 4\cos x = 2 : \cos x$.

(Svar: $\pm 1,2\sqrt{5}$, $\pm 0,8\sqrt{5}$ och $\pm 2\sqrt{5}$ eller $\pm 0,6\sqrt{5}$, $\mp 1,6\sqrt{5}$ och $\mp\sqrt{5}$.)

2241. Hur stor är vinkeln mellan sidoyta och bottenyta i en regelbunden fyrsidig pyramid, där den inskrivna och den omskrivna sfären har samma medelpunkt?

(Svar: 65,53°.

– För baskantvinkeln v i en regelbunden n-sidig pyramid med koncentriska in- och omskrivna klot gäller $\cos v = \cos(\pi/n) : (1 + \cos(\pi/n))$ dvs. $\sin \frac{1}{2} v \cdot \cos \frac{\pi}{2n} = 0,5$.)

2242. Vilka värden kan avståndet mellan vertex och närmaste brännpunkt anta i en ellips, där parametern är 1 cm?

(Svar: Mellan 0,25 och 0.5 cm.)

2243. Avståndet mellan foci i en ellips är större än lillaxeln. En cirkel uppritas med lillaxeln som diameter. En tangent till cirkeln går genom ena fokus skär lillaxeln i P och Q. Visa att PQ är lika med halva storaxeln.