Årgång 45, 1962

Första häftet

2353. Triangeln ABC och punkterna P_1 och P_2 ligger i samma plan. Om triangeln ABC symmetriseras med avseende på P_1 och P_2, uppstår trianglarna $A_1B_1C_1$ och $A_2B_2C_2$. Visa, att skärningspunkterna mellan A_1A_2 och BC, B_1B_2 och AC samt C_1C_2 och AB ligger i rät linje. *(V. Thébault.)*

2354. I en cirkel med radien R och centrum O är inskriven en triangel ABC. Om punkten P ligger på avståndet d från O, så är $PA^2 \sin 2A + PB^2 \sin 2B + PC^2 \sin 2C = 2T(R^2 + d^2) : R^2$. *(X.)*

2355. Sidovinklarna vid spetsen O i en tetraeder $OABC$ är alla räta. Ett klot med centrum på basytan $ABC = T$ tangerar de andra sidoytorna. Visa, att dess radie är $\sqrt{2T} : \sum \sqrt{\tan A}$. *(I. Gunsjö.)*

Enklare matematiska uppgifter

2356. I en cirkel med radien 25 cm råkas två kordor under 90° inom eller utom cirkeln. Den ena kordans segment är 9 cm och 39 cm. Bestäm den andras segment.
(Svar: 13 och 27 cm)

2357. Två sidor i en triangel är 9 cm och 13 cm. Medianen mot den tredje sidan råkar denna i M och den omskrivna cirkeln i N. Beräkna denna sida, när sträckan MN är 2,5 cm.
(Svar: 10 cm)

2358. Visa att

$$\frac{1+2\cos x+2\cos 3x+2\cos 5x}{1+2\cos x+2\cos 2x+2\cos 3x} = 2\cos 2x - 2\cos x + 1.$$

2359. Termerna t_1, t_2, t_3, ... i en aritmetisk serie med $s_n = an^2 + bn$ grupperas så: $t_1|t_2$, $t_3|t_4$, t_5, $t_6|$ osv., så att var och en av följande grupper innehåller en term mer än närmast föregående. Visa, att n:te gruppens termer har summan $an^3 + bn$.

2360. I en rak cirkulär kon inskrives en sfärisk sektor med spetsen i basytans centrum. Sektorns sfäriska yta tangerar konens mantel längs den cirkel, som utgör gräns mellan sektorns sfäriska och koniska yta. Ange konens toppvinkel, då sektorn upptar så stor del som möjligt av konen. Då är också förhållandet mellan sektorns kalott och konens mantel ett maximum.
(Svar: 45,96°)

2361. I en likbent triangel är de lika sidorna a cm och basen x cm. I den kring triangeln omskrivna cirkeln dras en med basen parallell korda, som delas i förhållandet $p : q : p$ av sidorna. Bestäm x, så att kordan blir så stor som möjligt. Visa, att kordan då halverar sidorna.

(Svar: $aq : \sqrt{p(p+q)}$ om $2\sqrt{p(p+q)} > q$ eller $0 < q < p(2+\sqrt{8})$)

2362. Transformera ekvationen $x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + a^2 y = 0$ genom att införa t som oberoende variabel medelst substitutionen $x = e^t$.

(Svar: $\frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 y = 0$)

2363. En ellips tangerar en hyperbel i dess vertices. En tangent, som är parallell med en asymptot, berör ellipsen i T samt skär transversalaxeln i A och hyperbeln i B. Visa, att $AB = BT$.

2364. Om 9 är en upp- och nedvänd 6:a, 8 har två symmetriaxlar och 1 tecknas med ett lodrätt streck, hur många årtal på denna sida om Kristi födelse t.o.m. 1961 är reversibla, dvs kommer att behålla sin mening, när de läses upp och ned? När kommer nästa? (*Mathematics Magazine*)

(Svar: 23; år 6009)

2365. Om polynomet $F(x, y, z) = 2xyz + x^2 + y^2 + z^2 - 1$, går divisionen $F(1-2x^2, 1-2y^2, 1-2z^2) : F(x, y, z)$ jämnt upp. Kvoten?

(Ledning: Om x, y och z är cosinerna för en triangels vinklar, är $F(x, y, z) = 0$.)

(Svar: $4F(-x, -y, -z)$)

Andra häftet

2366. Från punkten A dras tangenterna AB och AC till en parabel. Medianen från A i triangeln ABC skär styrlinjen i D. Visa, att punkten D, parabelns vertex V och ortocentrum H i triangeln ABC ligger i rät linje. *(V. Thébault.)*

2367. Kordan AB i kurvan $y = x^4 - x^2$ har sin mittpunkt på linjen $x = 0,5p$, $p > 0$.Bestäm enveloppen för linjen AB. *(X.)*

2368. Beräkna $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sqrt{1+x^2}}$. *(X.)*

Enklare matematiska uppgifter

2369. Om talen $1 : a$, $1 : b$ och $1 : c$ bildar en aritmetisk serie, gäller detsamma om talen $(-a+b+c)^2$, $(a-b+c)^2$ och $(a+b-c)^2$.

2370. I varje triangel ABC är $bc - 4Rr = AI^2$, där I är centrum för den i triangeln inskrivna cirkeln.

2371. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel. ED är den korda, som halverar sidorna AB och AC. Visa, att $\cos \wedge EAD = -\cos B \cdot \cos C$.

2372. I en likbent triangel är den inskrivna virkelns radie 2 cm och avståndet från ortocentrum till basen 3 cm. Beräkna sidorna.
(Svar: 8 cm, $6\frac{2}{3}$ cm, $6\frac{2}{3}$ cm)

2373. Den största diagonalvinkeln i ett regelbundet $(2n+1)$-sidigt hörn är 60°. Beräkna hörnets sidovinkel.
(Svar: $180° : (2n+1)$)

2374. Från punkten $(1; 0)$ dras en tangent till kurvan $y = x^3 + ax$. Sök orten för kontaktpunkten, när storheten a varierar.
(Svar: $y = 2x^3(x-1)$)

2375. Kurvan $4x^2y = (x+a)^2$ skär sin vågräta asymptot under 45°. Bestäm konstanten a.
(Svar: ± 8)

2376. Från brännpunkterna F och F_1 till ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ $(a^2 > b^2)$ fälles normalerna n respektive n_1 mot en tangent. Brännpunktsradierna från F och F_1 till kontaktpunkten är r respektive r_1. Visa, att $n^2 = b^2r : r_1$ och $n_1^2 = b^2r_1 : r$ och $2 : r = 1 : a + p : n^2$, när parametern är $2p$.

2377. I en likbent triangel ABC är omkretsen $4a$. Basens ena ändpunkt A ligger i origo, medan den andra B rör sig på positiva x-axeln. Sök orterna för hörnet C samt för de in- och vidskrivna cirklarnas centra I, I_a, I_b och I_c.
(Svar: Orten för C är parabeln $y^2 = -4a(x-a)$ för $0 < x < a$, för I $y^2 = x^2(a-x) : a$ för $0 < x < a$, för I_a linjen $x = 2a$ för $0 < |y| < 2a$, för I_b parabeln $y^2 = -2ax$ för $-2a < x < 0$ samt för I_c $y^2 = ax^2 : (a-x)$ för $0 < x < a$.)

2378. Två räta linjer bildar 60° med varandra. En cirkel med radien R har sitt centrum på den ena linjen och tangerar den andra. Visa, att bland de cirklar som tangerar de båda linjerna och cirkeln finnes två, vilkas radier har det aritmetiska mediet R, och två, vilkas radier har det geometriska mediet R.
(Använd cosinusteoremet på triangeln PCO, där P är linjernas skärningspunkt, C medelpunkt för cirkeln med radien R och O medelpunkten för någon av de sökta cirklarna.)

Tredje häftet

2379. Givna är en cirkel, kordan AB och punkten C på denna. Att draga kordorna XX_1 och YY_1 genom C så, att XY och BX_1 blir parallella med respektive AB och YY_1. *(X.)*

2380. I varje triangel ABC är

$$2\sin^2 A : (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C) + \cot A : (\cot A + \cot B + \cot C) = 1.$$

(X.)

2381. En triangel ABC och en punkt P i triangelns plan är givna. Visa, att om cirklarna med diametrarna PA och BC är ortogonala och likaså cirklarna med diametrarna PB och CA, detta även gäller för cirklarna med PC och AB som diametrar. Visa motsvarande sats om P ligger utanför planet ABC och cirkel ersätts med sfär.

(V. Thébault.)

Enklare matematiska uppgifter

2382. Två cirklar råkas under räta vinklar. Cirklarnas gemensamma tangenter berör den ena cirkeln i A och B, den andra i C och D. Visa, att avståndet mellan de parallella linjerna AB och CD är lika med avståndet mellan skärningspunkterna.

2383. Sidorna i en konvex fyrhörning tangerar alla en cirkel och hörnen ligga på en annan cirkel med tre gånger så lång radie. Två vinklar i fyrhörningen är komplementvinklar. Beräkna dessa.
(Ledning: Utdrag två sidor, så erhålles en rätvinklig triangel.)
(Svar: 25,95° och 64,05°)

2384. I en halvcirkel är diametern $AB = 2r$. Hur lång är den korda AP, som vid rotation kring den mot AB vinkelräta radien i cirkeln alstrar en stympad konmantel med maximal yta?
(Svar: $2r\sqrt{3}/3$)

2385. I en regelbunden tresidig pyramid med basytan ABC och spetsen D är P tyngdpunkten. Om linjerna PA, PB och PC är vinkelräta två och två, så tangerar samma klot med centrum i P såväl pyramidens basyta som dess sidokanter.

2386. Bestäm $f(-2) - f(-3)$, om $f'(x) = 24(x^2+1) : (x^2-1)^2$.
(Svar: 7)

2387. Bestäm ett polynom $f(x)$ av femte graden så, att $f(x)+1$ blir delbart med $(x-1)^3$ och $f(x)-1$ delbart med $(x+1)^3$.
(Ledning: $f'(x)$ innehåller faktorn $(x^2-1)^2$.)
(Svar: $-\frac{1}{8}(3x^5 - 10x^3 + 15x)$)

2388. Bestäm minimivärdet av funktionen $px^2 + qy^2$ då $px + qy = k$. Storheterna p, q och k är positiva.
(Ledning: Man har $(px^2 + qy^2)(p + q) = (px + qy)^2 + pq(x - y)^2$.)
(Svar: Minimivärdet är $k^2 : (p + q)$ för $x = y = k : (p + q)$)

2389. Om tangenter med riktningskoefficienten $-A : B$ drages till kägelsnitten $Ax^2 + By^2 = C$, så ligger kontaktpunkterna på linjen $y = x$.

2390. Rötterna till ekvationen $k^3 + 3ak^2 + 3bk + c = 0$ är riktningskoefficienter för tre linjer, av vilka en är ena bisektrisen till vinkeln mellan de andra. Beräkna den förstnämndas riktningskoefficient.
(Ledning: Är k den sökta storheten, erhålles $(k_1 - k) : (1 + kk_1) = (k - k_2) : (1 + kk_2)$. Då $k_1 + k_2 = -3a - k$ och $kk_1k_2 = -c$, fås $k^3 + 3ak^2 - 3k - 3a - 2c = 0$ osv.)
(Svar: $-(a + c) : (b + 1)$)

2391. En normal till en ellips delar bägge axlarna innantill i förhållandet $3 : 2$. Vilken är ellipsens excentricitet?
(Svar: $0,5$)

Fjärde häftet

2392. Med a, b och c betecknas tre olika, icke negativa tal. Visa, att $a : (b - c) + b : (c - a) + c : (a - b) \neq 0$. *(X.)*

2393. Beräkna det exakta värdet av $\tan \frac{3}{7}\pi - 4 \sin \frac{1}{7}\pi$. *(X.)*

2394. I triangeln ABC med ytan T uppritas cirklar med AB och AC som diametrar. De skär centrallinjen i D, E, F och G i denna ordning. Ange sambandet mellan T^2 och $DE \cdot DG \cdot EF \cdot FG$. Skriv med hjälp av detta upp Herons formel. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2395. Förenkla uttrycket $|a| - |b| + \big|a + 2b + |a|\big| - \big|2a + b - |b|\big|$.
(Svar: $a + b$, som om de lodräta strecken saknades)

2396. Termerna t_1, t_2, t_3, … i en geometrisk serie med kvoten k grupperas så: $t_1, |t_2, t_3|, |t_4, t_5, t_6|$ osv., så att var och en av följande grupper innehåller en term mer än närmast föregående. Ange förhållandet mellan summan av n:te gruppens termer och summan av seriens n första termer.
(Svar: $k^{\frac{1}{2}n(n-1)}$)

2397. Från en punkt A på en cirkel med radien r dras tre linjer som råkar cirkeln i C_1, C_2 och C_3 och en diameter (eller dess förlängning) i respektive D_1, D_2 och D_3. Om sträckorna C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 utan att vara radie har längden r, är $C_1C_2C_3$ en liksidig triangel. (Ledning: Drag radierna till C_1, C_2 och C_3.)

2398. Mellan två tangentplan till en rotationskon med toppvinkeln $2v$ är vinkeln för den öppning i vilken konen ligger 2α. Bestäm toppvinkeln $2x$ i den kon som dessa plans skärningslinje genererar.
(Svar: $\sin x = \sin v : \sin\alpha$)

2399. Den i en sfärisk sektor inskrivna sfären har sitt centrum i det plan som delar sektorn i en kon och ett segment. Bestäm sektorns toppvinkel 2α.
(Svar: 114,13°. Ekvationen $\sin^3\alpha + 2\sin^2\alpha = 2$ löses grafiskt)

2400. En sfärisk sektor delas i tre volymlika delar av plan vinkelräta mot sektorns symmetrilinje. Undersök för vilka värden på toppvinkeln 2α, som inget, ett eller båda planen skär genom sektorns koniska del.
(Svar: Förhållandet f mellan volymerna av konen och sektorn är $\frac{1}{2}\cos\alpha(1+\cos\alpha)$. För $f = \frac{2}{3}$ är $2\alpha = 81{,}36°$; för $f = \frac{1}{3}$ är $2\alpha = 125{,}56°$. I dessa fall är konens basplan ett av de delande planen; det andra skär konen resp. segmentet. I övrigt är svaren: Två plan, om $0° < 2\alpha < 81{,}36°$; ett, om $81{,}36° < 2\alpha < 125{,}56°$; inget, om $125{,}56° < 2\alpha < 180°$)

2401. Diametern till kordan AB i en parabelskär kurvan i C. Visa, att de av kordorna AB och BC avskurna segmenten är lika stora och $\frac{1}{6}$ av triangelytan ABC.

2402. Förhållandet mellan den största och minsta sidan i en triangel är x. Den tredje sidan är medelproportional till de övriga. Ange den mot denna stående vinkeln v som funktion av x. Bestäm definitionsområde och värdeförråd.
(Svar: $\cos v = \frac{1}{2}(x + 1/x - 1)$; värdeförråd $0° < v < 60°$; definitionsmängd: $1 < x < \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$)

2403. Kurvan $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 12$ tangerar linjen $x = 4$ i $(4; -2)$ och linjen $y = 4$ i $(-2; 4)$. Bestäm konstanterna A, B och C.
(Svar: $A = B = C = 1$)

2404. Punkterna A och B ligger på x- respektive y-axeln. O är origo. Sök orten för mittpunkten till AB, när fotpunkten av höjden från O mot AB alltid ligger på linjen $x = a$.
(Svar: $y^2 = ax^2 : (2x - a)$, minimipunkt i $(a; a)$, maximipunkt i $(a; -a)$ och inflexion i $(2a; \pm 2a/\sqrt{3})$)