Årgång 46, 1963

Första häftet

2405. På fokalaxeln till en hyperbel, vars ena brännpunkt är F, finns en punkt K så belägen, att $|PK^2 : PF - PF|$ har ett konstant värde, när P genomlöper kurvan. Sök Läget av K. *(X.)*

2406. Avstånden från en punkt på en cirkel till hörnen av en inskriven liksidig triangel är u, v och w. Beräkna $u^2+v^2+w^2$ och $u^4+v^4+w^4$, om cirkelns radie är R. *(X.)*

2407. Undersök antalet reella rötter till ekvationen $a^x = x$ för olika positiva värden på konstanten a. *(I. Gunsjö.)*

Enklare matematiska uppgifter

2408. I ekvationen $ax^2 + bx + c = 0$ är den ena roten lika med kvadraten på den andra. Visa att $a^2c + ac^2 + b^3 = 3abc$.

2409. De vidskrivna cirklarnas medelpunkter i en triangel är A, B och C. I cirklarnas kontaktpunkter med triangelsidorna dras normaler mot respektive sidor. Visa, att normalerna råkas i centrum för cirkeln genom A, B och C.

2410. I varje triangel ABC är $4R = 2p : \sin A - r : \sin^2 \frac{1}{2} A$.

2411. En cylinder är inskriven i ett klot. Ett med basytorna parallellt plan P delar den zon av klotytan, som ligger mellan dessa ytor, i två delar, K_1 och K_2. Den mellan klotytan och cylindermanteln liggande cirkelringen i P har ytan A. Bestäm klotets yta.
(Svar: $K_1 \cdot K_2 : A$)

2412. Basen i en likbent triangel är parameter i en ellips med konstant yta π ytenheter. Triangelns spets är belägen i ellipsens centrum. Bestäm maximum för triangelytan.
(Svar: $\frac{1}{2}$ ytenheter)

2413. I en triangel är en sida given till längd och läge. Höjden mot denna halveras av en annan höjd. Sök orten för det tredje hörnet.
(Svar: En ellips med excentriciteten $1 : \sqrt{2}$, vars lillaxel är den givna sidan.)

2414. Tangenten i punkten P på kurvan $y = kx^n + l$, $kl \neq 0$, $n \neq 0, 1$, skär x-axeln i T. Q är projektionen av P på x-axeln. Beräkna $OT : TQ$, när sträckan TQ är extremum.
(Svar: $(n-2) : 1$, förutsatt att extremum existerar och $n > 0$.)

2415. Normalen i P till parabeln $4y = 12 - x^2$ skär kurvan på nytt i Q och x-axeln i N. Var ligger N, då a) $|x_P - x_N|$ är maximum, b) arean av

det segment PQ avskär av parabeln är minimum, c) $|x_P - x_Q|$ är minimum.
(Svar: I alla fallen origo.)

2416. Visa, att koefficienten för $x^n y^n$ i utvecklingen $(x+y)^{2n}$ är ett jämnt tal. (Ledning: Använd Pascals triangel)

2417. Utför multiplikationen $(1+x^{m_1})(1+x^{m_2})(1+x^{m_3})\dots(1+x^{m_n})$ då $m_r = 2^{r-1}$, $r = 1, 2, 3, \dots, n$.
(Svar: $1+x+x^2+\dots+x^{2^n-1}$.)
(Ledning: Förläng med $1-x$.)

Andra häftet

2418. Vilka ellipser delar varandra i tre lika stora delar? *(N. J.)*

2419. En parabel och en punkt P på dess axel är givna. En linje genom P skär parabeln i A och B. Den på AB som diameter uppritade cirkeln råkar parabeln ytterligare i C och D. Visa, att CD går genom en annan fix punkt på axeln, när AB vrider sig kring P. *(X.)*

2420. I varje triangel är $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq p^2$. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2421. Rötterna till ekvationen $ax^2+bx+c=0$ är x_1 och x_2. När bildar a, x_1, b, x_2 och c en aritmetisk serie?
(Journal de mathématiques élémentaire.)
(Svar: 1) $a=2$, $b=0$, $c=-2$; 2) $a=-2$, $b=0$, $c=2$; 3) $a=-0{,}5$, $b=\frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{20})$, $c=\frac{1}{2}(-9\pm\sqrt{80})$.)

2422. Om $x-y=2$ och $x^3-y^3=14$, beräkna $x^4+x^2y^2+y^4$.
(Svar: 35)

2423. Upplös $(ac-bd)^2+(ad+bc-bd)^2-(ac-bd)(ad+bc-bd)$ i faktorer.
(Svar: $(a^2-ab+b^2)(c^2-cd+d^2)$)

2424. En aritmetisk serie består av de successiva udda talen från och med 5. Beräkna $\sum_{n=1}^{\infty} 1 : s_n$, där s_n betyder summan av de n första termerna.
(Svar: $25 : 48$)
(*Ledning:* Man får $s_n = n(4+n)$ och $\sum_1^\infty 1 : s_n = \frac{1}{4}\sum_1^\infty\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)$.)

2425. Beräkna $\sin x : \cos x + \sin 2x : \cos^2 x + \sin nx : \cos^n x$.
(Svar: $[\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x] : \cos^n x \sin x$)

(*Ledning:* $t_1 = \cos x : \sin x - \cos 2x : \cos x \sin x$, $t_2 = \cos 2x : \cos x \sin x - \cos^3 x : \cos^2 x \sin x$, $\ldots$, $t_n = \cos nx : \cos^{n-1} x \sin x - \cos(n+1)x : \cos^n x \sin x$.)

2426. För vilka kurvor är tangentens ordinata i origo omvänt proportionell mot kontaktpunktens ordinata?
(Svar: Man får ekvationen $y^2 - xyy' = k$, som kan skrivas $\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{x^2}\right) = -\frac{2k}{x^3}$, varav $y^2 = Cx^2 + k$, dvs kägelsnitt med axlarna OX och OY)

2427. På sidan AB i triangeln ABC väljes punkten D så, att trianglarna ABC och CBD är likformiga (A homolog med C). Visa, att den linje som förenar fotpunkterna för höjderna från B i dessa trianglar är vinkelrät mot AB.

2428. Vad kan man visa om derivatorna av funktionen

$$6(\sin^{10} x + \cos^{10} x) - 15(\sin^8 x + \cos^8 x) + 10(\sin^6 x + \cos^6 x)?$$

(Svar: Att alla är 0)

2429. Om linjerna $L \equiv ax + by + c = 0$, $L_1 \equiv a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ och $L_2 \equiv a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$ bildar en triangel, skall den punkt på $L = 0$ bestämmas, i vilken funktionen $L_1 L_2$ har extremum.
(Svar: I mittpunkten)

2430. Punkterna A och B ligger på x- resp y-axeln. O är origo. Undersök variationen hos ytan av triangeln OAB, när fotpunkten av höjden från O mot AB genomlöper linjen $x = a$.
(Svar: Minimum $\frac{8}{9}a^2\sqrt{3}$, då vinkeln $A = 60°$)

Tredje häftet

2431. Beräkna $\sum_{1}^{n} \operatorname{arccot} 2r^2$. *(X.)*

2432. Vilken vinkel skall en normalkorda i en given parabel bilda med axeln för att det avskurna segmentet vid ett varvs rotation kring kordan skall genomfara minimivolym? *(X.)*

2433. Trianglarna ABC och $A_1B_1C_1$ ligger symmetriskt med avseende på en punkt. Tre parallella linjer genom A, B och C skär respektive B_1C_1, C_1A_1 och A_1B_1 i A_2, B_2 och C_2, som då påstås ligga i rät linje. *(V. Thébault.)*

Enklare matematiska uppgifter

2434. Bestäm de polynom av andra graden som satisfierar ekvationen $f(x)f(-x) = f(x^2+1)$.
(Svar: $x^2 - x + 1$ och $x^2 + x + 2$)

2435. Om $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ och $g(x) = (e^x - e^{-x}) : (e^x + e^{-x})$, är $g'(x) = \left(1 : f'(x)\right)^2$.

2436. Ekvationen $ax^2 + 2bxy + cy^2 = d$ betyder en ellips, om $ac - b^2 > 0$ och a, c och d har samma tecken. Sök ekvationen för den diameter, som halverar kordor parallella med x-axeln. Använd resultatet för att finna ellipsens yta.
(Svar: $ax + by = 0$. Ytan $|\pi d| : \sqrt{ac - b^2}$)
(*Ledning:* Ytan av den parallellogram, som uppritas på två konjugatdiametrar, är konstant.)

2437. Förenkla $F(a,b,c) = (a+b+c)^3 - (-a+b+c)^3 - (a-b+c)^3 - (a+b-c)^3$.
(Svar: $24abc$)
(*Ledning:* $F(0,b,c) = F(a,0,c) = F(a,b,0) = 0$.)

2438. En cirkel tangerar en liksidig hyperbel med transversalaxeln $2a$ i en topp och skär den i punkterna A och B. Sök avståndet från cirkelns centrum till linjen AB.
(Svar: a)

2439. En likbent triangel har basen AB på x-axeln och spetsen i den fixa punkten $C\,(0; -a)$. Vilken kurva tangerar triangelns variabla höjder?
(Svar: $x^2 = 4ay$)

2440. Från punkten $P\,(a; b)$ dras två mot varandra vinkelräta linjer. Den ena skär x-axeln i A, den andra y-axeln i B. Sök orten för den punkt, som delar AB innantill i förhållandet $m : n$ från A räknat.
(Svar: Räta linjen $(m+n)(amx + bny) = mn(a^2 + b^2)$)

2441. Genom vilka punkter går tre tangenter till kurvan $y = x^3$ som med x-axeln bildar spetsiga vinklar med summan 180°?
(Svar: Punkter på linjen $y = x$ med $|x| \geq 1$)
(*Ledning:* Tangentens k-ekvation är $y = kx \pm \sqrt{4k^3} : 3\sqrt{3}$. Är $(p; q)$ den efterfrågade punkten, erhålles $4k^3 - 27(pk - q)^2 = 0$. Använd formeln $\tan\alpha \cdot \tan\beta \cdot \tan\gamma = \tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma$.)

2442. Två klot med diametrarna d_1 och d_2 har en bikonvex lins med tjockleken D gemensam. Sök förhållandet mellan volymerna av de två områden som begränsas av en zon och en kalott på kloten samt var sitt av de mot huvudaxeln vinkelräta tangentplanen till L.
(Svar: $(d_1 - D)^2 : (d_2 - D)^2$)

2443. Beräkna S_n i den serie, där $t_n = (2n+1)\cos n\pi : n(n+1)$.
(Svar: $(-1)^n : (n+1) - 1$)
(*Ledning:* $t_n = [1 : n + 1 : (n+1)] \cdot (-1)^n$.)

Fjärde häftet

2444. I parabeln $y^2 = 4ax$ drages kordorna AA_1, BB_1 och CC_1 vinkelrätt mot axeln, som de skär i fokus F, B_0 och C_0 respektive så, att $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{B_0C_0}$, där O är vertex. Sök ett samband mellan den yta, som AA_1 och CC_1 jämte mellanliggande parabelbågar avgränsar, och den yta, som bågen BOB_1 överfar vid rotation kring OB_0.
(efter Fermat.)

2445. Vilken likytig tetraeder inskriven i en given sfär har den största totala ytan? En tetraeder kallas likytig, när motstående kanter är lika långa. *(V. Thébault.)*

2446. Om $s_n = x^n + y^n + z^n$ och $s_1 = s_3 = 1$, vilka värden har s_5, s_7, s_9,...
(X.)

Enklare matematiska uppgifter

2447. Beräkna summan av de 6-siffriga telefonnummer, i vilka inga nollor och inga siffror över tre förekommer.
(Svar: Det finns 3^6 sådana nummer. Summan är $3^5(1+2+3)(1+10+10^2+\ldots+10^5) = 161\,999\,838$)

2448. Beäkna sannolikheten för att vid ett kast med tre tärningar få a) en etta, en tvåa och en trea, b) ögonsumman 5, c) ögonsumman 16.
(Svar: 1/36 i alla fallen)

2449. Vilken är den största gemensamma divisorn till

$$f(n) = n^2(n^2-1)(n^2-4)(n^2-9) \quad \text{för } n = 4, 5, 6, \ldots?$$

(Svar: $4 \cdot 7!$)

2450. I den konvexa fyrhörningen $ABCD$ är vinkeln A 90°. Med BD som längdenhet har AB, BC, CD och DA mätetalen x, x, x och $\sqrt{x}$ respektive. Visa, att vinkeln C är 108°.

2451. Man betraktar likbenta parallelltrapets med given omkrets, i vilka en av de lika sidorna är medelproportional till de parallella sidorna. Mellan vilka gränser ligger förhållandet mellan den kortare och längre av de parallella sidorna? Har diagonalen några extremvärden?
(Svar: $3-\sqrt{8}$ och 1. Nej)

2452. I en regelbunden fyrsidig pyramid $O(ABCD)$ med basytan $ABCD$ och höjden h cm är M centrum för den kring pyramiden omskrivna sfären. Ange volymen av pyramiden $M(ABCD)$ som funktion av dess höjd x cm och åskådliggör funktionen grafiskt.
(Svar: Faller M inom pyramiden, är funktionen $\frac{2}{3}x(h^2-2hx)$, där $0 < x < \frac{1}{2}h$. Maximum $\frac{1}{12}h^3$ för $x = \frac{1}{4}h$. Faller M utanför, är funktionen $\frac{2}{3}x(h^2+2hx)$, där $x > 0$)

2453. I ekvationen $v \cdot p^{1,4} = C$ är C en konstant. Om storheten v ökar med 10%, med hur många procent minskas p?
(Svar: 6,6%)

2454. I triangeln ABC dras bisektrisen till vinkeln C. Den skär AB i E. På linjen BC tages punkten D åt B till så, att $CD = CA$. Visa, att de inverterade värdena av ytorna ABC, $CAED$ och CAD bildar en aritmetisk serie.

2455. Tangenten i P på ellipsen $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ skär x-axeln i A och y-axeln i B. Hur lång är PB, om $AP = b$?
(Svar: a)

2456. A och B är två punkter på en parabel. Kordorna AA_1 och BB_1 är parallella med tangenterna i B respektive A. Visa, att ytorna av de segment dessa kordor avskär är lika.