Årgång 50, 1967

Första häftet

2603. Låt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ vara stokastiska variabler med väntevärden $E[\xi_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Visa att

$$E[\max(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)] \geq \max(E[\xi_1], E[\xi_2], \ldots, E[\xi_n]).$$

(Från ettbetygsskrivning i matematisk statistik. Insänd av Lennart Råde.)

2604. Funktionen f är reellvärd, har kontinuerlig derivata på intervallet $0 \leq x \leq 1$ och $f(0) = f(1) = 0$. Visa följande påståenden:

a) Om $f(x) \neq 0$ för $0 \leq x \leq 1$, så antar f'/f alla reella värden, då x genomlöper intervallet $0 < x < 1$.

b) Om $|f'(x)| \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, så är

$$\int_0^1 x|f(x)|\,dx \leq 1/8.$$

Kan likhet gälla i sistnämnda relation.

(Torgny Lindvall.)

2605. f är en kontinuerlig funktion på $1 \leq x \leq \infty$ sådan att $\lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{f(x)}{x}\,dx$ existerar. Visa att $\lim_{a\to\infty} \frac{1}{a} \int_1^a f(x)\,dx = 0$.

Enklare matematiska uppgifter

2606. $\{a_n\}_0^\infty$ är en talföljd sådan att $0 \leq a_n \leq 1$ och $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$. Sätt $M_n = [0, a_n] \cup [1, 1 + a_{n-1}] \cup \ldots \cup [n, n + a_0]$. Visa att $\bigcup_{n=1}^\infty M_n = [x\colon 0 \leq x < \infty]$. ($[i, i + a_{n-i}]$ betecknar det slutna intervallet $\{x\colon i \leq x \leq i + a_{n-i}\}$.)

2607. Ange två positiva talföljder $\{a_n\}_1^\infty$ och $\{b_n\}_1^\infty$ sådana att $\sum 1/a_n$ och $\sum 1/b_n$ båda är divergenta men $\sum 1/(a_n + b_n)$ konvergent.

2608. En funktion är deriverbar i x_0 och $f(x_0) = 0$. Visa, att $|f|$ är deriverbar i x_0 om och endast om $f'(x_0) = 0$.

2609. Visa, att om x och y är heltal med $|x| > |y|$, så gäller att $x^2 - y^2 \geq 2|x| - 1$.

2610. Visa, att $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=2}^{n} \exp\left(\frac{1}{k^2 - 1}\right) = e^{3/4}$. ($\exp(x)$ betecknar e^x.)

2611. Visa att $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$.
(Ledning: Beteckna vänsterledet med x och studera xy, där $y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101}$.)

2612. $\{a_n\}_1^\infty$ är en talföljd sådan att $a_n \to 0$, då $n \to \infty$. Sätt $b_n = a_n - a_{n+1}$. Visa att $\sum_1^\infty b_n$ är konvergent och att dess summa är a_1.

2613. För vilka reella tal x gäller

$$|\sin 3x - 4\sin x| \leq 1?$$

(Svar: $-\pi/6 + n\pi \leq x \leq \pi/6 + n\pi$, n heltal)

2614. En stokastisk variabel ξ har täthetsfunktionen f, där $f(x) = ax + b$, $-1 \leq x \leq 1$, a och b reella konstanter, samt $f(x) = 0$, $|x| > 1$. Mellan vilka värden kan a och b variera? Mellan vilka värden kan förväntan $E(\xi)$ och variansen $\sigma^2(\xi)$ variera? (Ledning: Det gäller att $f(x) \geq 0$ och $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.)
(Svar: $-1/2 \leq a \leq 1/2$; $b = 1/2$; $-1/3 \leq E(\xi) \leq 1/3$; $2/9 \leq \sigma^2(\xi) \leq 1/3$)

Andra häftet

2615. A är en matris med n rader och n kolonner, sådan att $A^k = 0$ för något naturligt tal k. Visa att matrisen $E - A$ är inverterbar. (E är enhetsmatrisen med n rader och n kolonner.) *(Bengt Klefsjö.)*

2616. Låt a_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, vara en strikt växande följd naturliga tal, som inte innehåller något primtal och som enbart består av relativt primiska tal (dvs. a_i och a_j har ingen gemensam faktor större än 1 om $i \neq j$). Visa att

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i} < \infty$$

(Paul Erdös i Elemente der Mathematik.)

2617. f är en kontinuerlig reellvärd funktion på $-\infty < x < \infty$ sådan att det för varje x finns något naturligt tal n (som kan bero av x) så att $f_n(x) = x$. Här betecknar f_n den n gånger sammansatta funktionen $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, för $n = 2, 3, \ldots$ och $f_1 = f$. Visa att f är strikt monoton.

Enklare matematiska uppgifter

2618. Antag att $x \in M_1 \Rightarrow x \in (M_1 \cap M_3) \cup \complement M_2$ och att $\complement M_3 \subset M_2$. Medför detta a) $M_1 \subset M_2$, b) $M_1 \subset M_3$? (Här är M_i delmängder av en viss grundmängd M och $\complement(M_i)$ är komplementet av M_i)
(Svar: a) Nej, b) Ja)

2619. Visa att $\left(\dfrac{1-z}{1+z}\right)^2$, $z \neq -1$, $|z| = 1$, är reellt.

2620. För vilka värden på a är vektorerna $(a, 1, a+1)$ och $(4, a, 3a)$ linjärt beroende?
(Svar: $a = 2$)

2621. En urna innehåller 7 lappar numrerade från 1 till 7. Tre lappar drages utan återläggning. Vad är sannolikheten att det näst lägsta av de dragna numren är 4.
(Svar: 9/35)

2622. Talet a väljes slumpvis i intervallet $0 \le a \le 10$. Vad är sannolikheten att ekvationen $x^2 + ax + 1 = 0$ får reella rötter? (Ledning: Lös ekvationen för att få villkor på a som ger reella rötter.)
(Svar: 4/5)

2623. Visa att ekvationen $\log x - \arctan(x-1) = 0$ har två olika positiva rötter. (Ledning: Studera den funktion som definieras av vänsterledet.)

2624. $\sum_1^\infty a_i$ är en konvergent serie. Undersök om $\sum_{i=1}^\infty (\exp(a_i) - 1)$ är konvergent om
a) $a_i \ge 0$, alla i,
b) a_i har godtyckligt tecken.
(Svar: a) Konvergent, b) Ej nödvändigtvis konvergent)

2625. Bestäm alla två gånger deriverbara funktioner f med $f'(x) > 0$ för alla x och $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, som uppfyller $f''(x)f(x) = \big(f'(x)\big)^2$ för alla x.
(Svar: $f(x) = Ae^{Bx}$, A och B godtyckliga positiva konstanter)

2626. Om talen c_i, $i = 1, 2, \ldots$ uppfyller antingen $0 \le c_i \le 1$ för alla i, eller $c_i \ge 1$ för alla i, och vidare $0 \le p \le 1$, så gäller för alla $n \ge 1$

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - p + pc_i) \le 1 - p + p \prod_{i=1}^{n} c_i.$$

Tredje häftet

2627. Betrakta polynomet $P(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^\nu$, där a_ν är konstanter, $a_n \ne 0$. Låt k vara ett fixt naturligt tal, $k < n$. Beteckna nollställena till den k:te derivatan $P^{(k)}(x)$, med x_μ, $\mu = 1, 2, \ldots, n-k$. Visa att $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{n-k} x_\mu = \frac{k-n}{n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n}$. *(Anders Huszár Jr.)*

2628. En triangel med sidolängderna a, b och c och ytan S är given. Från en punkt i planet drages normalerna mot sidorna. Visa att summan av kvadraterna på normalernas längder är större än eller lika med $4S^2/(a^2 + b^2 + c^2)$. *(Bengt Klefsjö.)*

2629. I den harmoniska serien $\sum_1^\infty 1/n$ strykes all termer $1/n$ för vilka gäller att talet n innehåller *siffran* 9. Är den uppkomna serien konvergent eller divergent?

Enklare matematiska uppgifter

2630. Visa att det inte finns heltal k, m och n sådana att

$$\left[(k+n\sqrt{2})/n\right]^3 = 2.$$

(Ledning: använd att $\sqrt{2}$ är ett irrationellt tal.)

2631. Bestäm de komplexa tal z som uppfyller $|z|^2 - 1 = |z-1|^2$.
(Svar: $\operatorname{Re} z = 1$. Re betecknar realdelen)

2632. Visa att för varje komplext tal $z \neq 0$ är $\operatorname{Re}\left|\dfrac{z^2 - |z|^2}{z}\right| = 0$.

2633. Visa att för varje naturligt tal n gäller att $n! \geq n^{n/2}$. (Ledning: Använd t.ex. att $(1+1/n)^n < 3$.)

2634. Visa att $\dfrac{4|xy|}{1+x^2+y^2} \leq 1$ i området som bestäms av $x^2+y^2 \leq 1$, x och y reella tal. Kan likhet gälla? (Ledning: Använd t.ex. olikheten $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$.)
(Svar: Ja, för $|x| = |y| = \frac{\sqrt{2}}{2}$)

2635. Funktionen f är definierad för alla reella x genom $f(x) = x^a \cdot |x|$ för $x \neq 0$ och $f(0) = 0$. För vilka reella värden på konstanten a är f deriverbar i origo?
(Svar: $a > 0$)

2636. Beräkna $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^n}$ för de reella x för vilka gränsvärdet existerar.
(Svar: 0 för $|x| < 1$, $1/2$ för $x = 1$, 1 för $|x| > 1$)

2637. a är ett reellt tal och $P = (a, 2a)$ är en punkt med koordinater a och $2a$ i ett visst koordinatsystem. För vilka värden på a ligger P inuti eller på randen av triangeln med hörn i punkterna $(-2, 3)$, $(3, 4)$ och $(1, 1)$.
(Svar: $5/8 \leq a \leq 17/9$)

2638. För vilka reella värden på a är ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + az = 1 \\ 2x + ay + z = 5/2 \\ (a-1)x + 6z = 2 \end{cases}$$

lösbart? För vilka reella a finns entydig lösning?
(Svar: Lösbart för $a \neq -2$. Entydig lösning för $a \neq 0$, 3 och -2)

Fjärde häftet

2639. f är en reellvärd, begränsad och kontinuerligt deriverbar funktion på $(-\infty, \infty)$ sådan att $f(x) + f'(x) \leq 1$ för alla x. Visa att $f(x) \leq 1$ överallt. *(Torgny Lindvall.)*

2640. f är en reellvärd funktion på $(-\infty, \infty)$. Visa att mängden av punkter på $(-\infty, \infty)$, där f har strikta maxima, är numrerbar.

2641. M_1 är mängden av punkter i det öppna intervallet $0 < x < 1$ och M_2 mängden av punkter i det slutna intervallet $0 \leq x \leq 1$. Bevisa att det finns en $1-1$ motsvarighet mellan M_1 och M_2, dvs en omvändbar funktion från hela M_1 till hela M_2.

Enklare matematiska uppgifter

2642. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ är givna tal och $s_k = \sum_1^k a_i$ för $k = 1, 2, \ldots, n$. Visa att $2\sum_1^n s_i a_i = \sum_1^n a_i^2 + s_n^2$.

2643. Funktionen f är reellvärd och kontinuerlig i origo och

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = A > 0.$$

a) Visa att f är deriverbar i origo och bestäm $f'(0)$.
b) Visa att $\lim_{x\to+0}(f(x))^x$ existerar och beräkna gränsvärdet.

(Ledning: $(f(x))^x = \exp\{x \log f(x)\}$ om $f(x) > 0$.)

(Svar: A respektive 1)

2644. Lös ekvationen $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

(Svar: -1; $\pm i$)

2645. f är en reellvärd funktion definierad i ett öppet intervall I som innehåller origo. Vidare är f deriverbar i origo med $f(0) = 0$ och $f'(0) = 1$. För varje $x \in I$ finns ett öppet intervall $I(x)$ som innehåller origo, så att

$$f(x+y) = [f(x) + f(y)]/[1 - f(x)f(y)]$$

för alla $y \in I(x)$. Visa att f är deriverbar och att $f'(x) = 1 + \left(f(x)\right)^2$ för $x \in I$. (Ledning: Bilda $(f(x+y) - f(x))/y$.)

2646. Visa att i föregående uppgift $f(x) = \tan x$, $x \in I$.

2647. Låt S vara klassen av 2×2 matriser av typen $\begin{pmatrix} n & 2n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, där n är ett heltal skilt från noll.

1. Visa att S är sluten under matrismultiplikation, dvs. att $M_1 \in S$ och $M_2 \in S$ medför att $M_1 \cdot M_2 \in S$.

2. Visa att S har ett neutralt element vid matrismultiplikation, dvs. att det finns en matris $E \in S$ så att

$$M \cdot E = E \cdot M = M$$

för alla $M \in S$.
3. Har varje element i S en invers i S vid matrismultiplikation, dvs. finns det, för varje $M_1 \in S$, ett element $M_2 \in S$, så att $M_1 \cdot M_2 = M_2 \cdot M_1 = E$, där E är ett neutralt element?

(Svar: 2. $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ är neutralt element.

3. Nej. Om vi vid definitionen av S hade betraktat rationella tal $n \neq 0$ istället för heltal, hade svaret varit ja)

2648. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är reella tal med medelvärde m, dvs $m = \frac{1}{n} \sum_1^n x_i$.

1. Visa att $\sum_{i=1}^n (x_1 + a) = 0$, a reellt, om och endast om $a = -m$.
2. Bevisa att $\sum_1^n (x_i - m)^2 < \sum_1^n (x_i - a)^2$ för alla reella $a \neq m$.
3. Gäller det för varje val av $\{x_i\}_1^n$ att

$$\sum_1^n |x_i - m| \leq \sum_1^n |x_i - a|$$

för alla reella a?

(Svar: 3. Nej. Ex.: $n = 3$, $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = -1$, $a = 1$)