Årgång 51, 1968

Första häftet

2649. a) A och B ”spelar cigarr”, vilket som bekant tillgår på följande sätt. Omväxlande placerar de inbördes lika, jämntjocka cigarrer på ett rektangulärt bord, varvid varje ny cigarr måste placeras så att den ej helt eller delvis övertäcker redan utplacerade cigarrer. Den som först inte kan finna plats för ytterligare en cigarr har förlorat. Visa att den som placerar den första cigarren alltid kan spela så att han måste vinna.

b) En dödsdömd probabilist får av skarprättaren en sista chans att klara livhanken på följande sätt. Han får två lika lådor och 20 kulor, av vilka tio är svarta och tio är vita. Han skall placera kulorna på något sätt i de båda lådorna. Sedan tar skarprättaren på måfå en kula ur en låda. Om denna kula är svart, blir probabilisten avrättad, i annat fall blir han frisläppt. På vilket sätt bör han lämpligen fördela kulorna i de båda lådorna? *(Rudolf Tabbe.)*

2650. P är en punkt inuti triangeln ABC med ytan T. Genom P dras transversaler parallella med sidorna. Dessa transversaler avskär av triangeln tre parallelltrapetser, vars sammanlagda yta är S. Visa att $S \leq \frac{5T}{3}$. *(Arne Pleijel.)*

2651. a, b och k är positiva heltal. k är ett primtal; a och b är relativt prima. Visa att

$$\sum_{i=0}^{a-1} k^i \quad \text{och} \quad \sum_{i=0}^{b-1} k^i$$

är relativt prima. *(Ulf Persson.)*

Enklare matematiska uppgifter

2652. Undersök hur många lösningar ekvationssystemet

$$\begin{cases} (a-1)x + 2ay + 2 = 0 \\ 2ax + (a-1)y - a + 1 = 0 \end{cases}$$

har för olika värden på den reella konstanten a.

(Svar: Entydig lösning utom då $a = -1$ eller $a = 1/3$. Oändligt många lösningar för $a = -1$. Ingen lösning för $a = 1/3$. Jämför den geometriska tolkningen av skärningen mellan två linjer)

2653. Finns det i binomialutvecklingen av

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{18},\ x>0,$$

någon term av formen $a\cdot\dfrac{1}{x}$, där a är en konstant?
(Svar: Ja)

2654. Hur många tal finns det mellan 100 000 och 999 999 som innehåller exakt fyra 4-or?
(Svar: 1170)

2655. Visa att $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\dfrac{1}{2}$. (Vänsterledet betecknar gränsvärdet, då $N\to\infty$, av produkten av de $N-1$ faktorerna $1-\frac{1}{n^2}$, $n=2,3,\dots,N$.)

2656. För vilka reella tal a finns det strikt positiva tal x_i, $i=1,2,\dots$, så att

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_i=1 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty?$$

(Ledning: det måste gälla att $x_i\to 0$ då $i\to\infty$.)
(Svar: $a>0$)

2657. Visa, att kvadraten på varje udda (respektive jämnt) heltal kan skrivas som skillnaden mellan kvadraterna på två heltal, av vilka det ena är en (respektive två) enheter större än det andra.

2658. Visa, att kvadraten på alla heltal med en femma som sista siffra kan skrivas som skillnaden mellan kvadraterna på två heltal, av vilka det ena är 5 enheter större än det andra.

2659. Man vet att $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin x}{x}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$. Visa att $\int_0^{\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\,dx=\dfrac{\pi}{2}$. (Ledning: Integrera t ex den senare integralen partiellt.)

2660. Låt μ_1, μ_2 och ν vara parvis oberoende slumpvariabler. Sätt $\xi=\mu_1+\nu$ och $\eta=\mu_2+\nu$. Visa att $\mathrm{Kov}[\xi,\eta]=\mathrm{Var}[\nu]$. ($\mathrm{Kov}[\xi,\eta]=E[(\xi-E[\xi])\cdot(\eta-E[\eta])]$; $\mathrm{Var}[\nu]=\mathrm{Kov}[\nu,\nu]$: E betecknar matematisk förväntan.)

Andra häftet

2661. Visa att

$$\sum_{n=0}^{p}\frac{\binom{p}{n}}{q+n}\cdot(-1)^n=\frac{1}{q\cdot\binom{p+q}{q}}$$

om p och q är positiva heltal. *(Ö.)*

2662. f_1 och f_2 är två reellvärda funktioner på $(-\infty,\infty)$ med egenskapen att om $f_i(x_0) > a$ där x_0 och a är godtyckliga reella tal och $i = 1$ eller 2, så finns ett öppet intervall som innehåller x_0 sådant att $f_i(x) > a$ för alla x i det öppna intervallet. Visa att om $f = f_1 + f_2$ är kontinuerlig, så är f_1 och f_2 kontinuerliga.

2663. $[a_i]_1^\infty$ är en given talföljd. Visa att $\sum_1^\infty x_i$ och $\sum_1^\infty a_i x_i$ konvergerar samtidigt för alla val av $[x_i]_1^\infty$ om och endast om

$$\sum_2^\infty |a_i - a_{i-1}| < \infty \quad \text{och} \quad \lim_{i\to\infty} a_i \neq 0.$$

Enklare matematiska uppgifter

2664. Visa att

$$\frac{\sum_1^n (-1)^\nu \cdot \nu!}{(-1)^n \cdot n!} \to 1 \quad \text{då } n \to \infty.$$

2665. Låt x vara större än 0. Visa att

$$(-1)^n (n!)^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \left[(\log x)^{1-\nu} \cdot \prod_{\mu=1}^{\nu} \log x^{-\mu} \right] \to \log x$$

då $n \to \infty$. (Ledning: Använd föregående uppgift.)

2666. Lös ekvationssystemet

$$\binom{n}{k-1} = \frac{1}{2}\binom{n}{k} = \frac{1}{3}\binom{n}{k+1}.$$

där n och k är positiva heltal.
(Svar: $n = 14$, $k = 5$)

2667. Talen $1, 2, 3, \ldots, n$ placeras i olika punkter på en cirkels periferi. Man går sedan runt cirkeln och bildar alla produkter av intilliggande tal. Summan av dessa n produkter betecknas med S. Bestäm maximum av S för varje fixt $n > 1$.
(Svar: $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 - 11n + 18)$)

2668. Funktionen f är definierad för $x > 0$. Där är $f(x)/x$ avtagande. Visa att $f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2)$ för alla $x_1 > 0$ och $x_2 > 0$.

2669. Funktionen f är kontinuerligt deriverbar på $0 \leq x \leq 1$ och $f(0) = f(1) = 0$. visa att det finns ett x, $0 < x < 1$, sådant att $f(x) = f'(x)$.

2670. Man väljer talen x och y på måfå i $(0,1)$. Bestäm sannolikheten för att

a) $|x - y| \leq 1/2$

b) $|x-y| = 1/2$.

(Svar: a) 3/4; b) 0)

2671. f är en monotont växande positiv funktion för $x > 0$. g är den inversa funktionen till h, där $h(x) = x^{2/3} \cdot f(x)$. Visa att

$$g(ax) \leq a^{2/3} g(x) \quad \text{för } a \geq 1.$$

2672. M och N är ändliga mängder med m respektive n element. Betrakta funktioner från M till N, vars definitionsområde är hela M.

a) Hur många olika sådana funktioner finns det?

b) Hur många funktioner finns det som har inverser?

(Svar: a) n^m; b) Inga om $n < m$, annars $\frac{n!}{(n-m)!}$)

Tredje häftet

2673. En reell funktion f är kontinuerlig och uppfyller $f(x) + f(x^2) = 0$ för alla reella x. Bestäm f. *(Torgny Lindvall.)*

2674. Antag att f och g är två funktioner, som är kontinuerliga, avtagande och positiva för $x \geq 0$ och sådana att integralerna $\int_0^\infty f(x)\,dx$ och $\int_0^\infty g(x)\,dx$ divergerar. Låt $h = \min(f, g)$ vara den funktion som definieras av att $h(x) = \min(f(x), g(x))$. Kan det gälla att $\int_0^\infty h(x)\,dx$ konvergerar?

2675. $P_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ är ett polynom av grad n med reella koefficienter och med koefficienten 1 framför x^n-termen. Dessutom gäller

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = 0, \quad \text{om } n \neq m.$$

Visa att för varje n

$$\inf \int_{-1}^{1} (x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n)^2\,dx = \int_{-1}^{1} \left(P_n(x)\right)^2 dx,$$

där inf tages över alla reella tal a_ν.

Enklare matematiska uppgifter

2676. Bestäm konstanten c så att funktionen f definierad på $(-\infty, \infty)$ av

$$f(x) = \begin{cases} c/x^4 & \text{för } x \geq 1 \\ 3/4 & \text{för } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{för } x < 0 \end{cases}$$

blir frekvensfunktion för en sannolikhetsfördelning.
(Svar: $c = 3/4$)

2677. En viss typ av radiorör har den i föregående uppgift givna fördelningen för sin livstid (mätt i 100 tim). Beräkna medelvärde och standardavvikelse för den sammanlagda livstiden för 10 rör av denna typ. (Rörens livstider antages oberoende av varandra.)
(Svar: $7\frac{1}{2}$ och $\sqrt{10}$)

2678. På mängden av alla heltal definieras en kompositionsregel $\circ$ genom

$$a \circ b = a + b - 2.$$

a) Är den associativ (dvs gäller $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$)?
b) Har den ett neutralt element (dvs finns det ett element e så att $a \circ e = e \circ a = a$ för alla a)?
c) Har varje element a en invers (dvs finns det ett element a^{-1} så att $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$, där e är ett neutralt element)?

(Svar: a) Ja; b) Ja, $e = 2$; c) Ja, $a^{-1} = 4 - a$)

2679. Visa att summan av kuberna på tre på varandra följande naturliga tal är delbar med 9.

2680. Visa att

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1 + x^2}\, dx = -\int_1^\infty \frac{\log x}{1 + x^2}\, dx.$$

2681. En funktion f uppfyller differentialekvationen

$$f''(x) + g(x) f'(x) + h(x) f(x) = 0$$

i ett öppet intervall J. Vidare är $h(x) < 0$ för $x \in J$. Visa att f ej kan ha ett strängt positivt maximum i intervallet J.

2682. Visa, att för varje $\alpha > 0$ gäller

$$n^{n+\alpha} > (n+1)^n$$

då n är tillräckligt stort.

2683. $(x_i)_1^\infty$ är en följd av reella tal sådana att $x_i \to A$ då $i \to \infty$. Vi sätter, för alla i,

$$x_i^{(1)} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \text{ och } x_i^{(j)} = \frac{x_i^{(j-1)} + x_{i+1}^{(j-1)}}{2} \text{ för } j = 2, 3, \ldots$$

Visa att $\lim_{j\to\infty} x_i^{(j)} = A$ för alla i.

2684. Mellan n stycken punkter är enkelriktade ”vägar” givna så att man endast kan röra sig i en riktning på varje väg. Vägnätet har den egenskapen att om man lämnar en punkt så kommer man aldrig tillbaka till samma punkt. Vilket är det största antal vägar ett sådant system kan ha?
(Svar: $\frac{n(n-1)}{2}$)

Fjärde häftet

2685. Låt f och g vara reellvärda, kontinuerliga funktioner i intervallet $0 \le x \le 1$. Antag att f är växande och g avtagande. Visa att

$$\int_0^1 f(x)g(x)\,dx \le \int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx.$$

För vilka f och g gäller likhet? *(Torgny Lindvall.)*

2686. Antag att f är en reell funktion definierad i $(-\infty, \infty)$ sådan att

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{och} \quad f(xy) = yf(x) + xf(y)$$

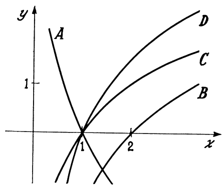
för alla reella x och y (jämför deriveringsoperatorn). Visa att $f(\xi) = 0$ för alla reella algebraiska tal ξ. (Ett reellt, algebraiskt tal ξ är ett reellt tal som är rot till någon algebraisk ekvation med heltalskoefficienter.)

2687. $(f_n)_1^\infty$ är en följd av reella, kontinuerliga funktioner på $0 \le x \le 1$. Kan det gälla att

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ irrationellt} \\ 1, & x \text{ rationellt?} \end{cases}$$

Enklare matematiska uppgifter

2688. Funktionen $x \curvearrowright {}^2\log x$ åskådliggörs av en av kurvorna $A - D$. Vilken?
(Svar: Rätt kurva är C)



2689. Följande mängder är givna:

$$M_1 = \{z; |\mathrm{Re}\, z| + |\mathrm{Im}\, z| = 3\}$$
$$M_2 = \{z; \mathrm{Re}\, z \text{ och } \mathrm{Im}\, z \text{ är heltal}\}$$
$$M_3 = \left\{z; \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$M_4 = \left\{z; 0 < \arg(z - 3i) < \frac{\pi}{2}\right\}$$
$$M_5 = \{z; |z - 3i| < 2\}$$

Bestäm
a) $M_1 \cap M_2 \cap M_3$
b) $M_2 \cap M_3 \cap M_4$
c) $M_2 \cap M_4 \cap M_5$
(Svar: a) $\emptyset$; b) $\emptyset$; c) $\{1+4i\}$)

2690. Bestäm $\dfrac{f'(1)}{f(1)}$ om $f(x) = \displaystyle\prod_{n=2}^{50} \left(1-\frac{x}{n}\right)^{x/n}$.
(Svar: $\frac{1}{50} - 1 + \sum_2^{50} \frac{1}{n} \log\left(1-\frac{1}{n}\right)$)

2691. Visa att för varje heltal $n \geq 1$ gäller

$$\binom{2n}{n} < 4^n < (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

2692. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är en matris med reella element a, b, c och d sådan att $MX = XM$ för alla matriser $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ med reella element. Visa att $M = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, där a är ett godtyckligt reellt tal.

2693. Visa att det finns positiva konstanter c_1 och c_2 sådana att

$$\frac{c_1}{n} \leq \sum_n^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{c_2}{n}$$

för alla positiva heltal n.

2694. För en talföljd $(a_n)_0^\infty$ gäller att $a_n = |a_{n-1} - a_{n-2}|$ för $n \geq 2$, a_0 och a_1 givna. Visa, att om a_0 och a_1 är heltal, så finns oändligt många n sådana att $a_n = 0$.

2695. Antag att f är en kontinuerligt deriverbar, växande funktion och att $f(1) = 1$. Antag vidare att $f(x)/x$ är avtagande för $x \geq 1$. Visa att $f(x) \leq 1|(2-x)$ för $1 \leq x < 2$.
Ledning: Betrakta likheten

$$\int_1^x f(t)\,dt = \left[tf(t)\right]_1^x - \int_1^x tf'(t)\,dt.$$

2696. Funktionen f är reell, definierad för $x > 0$, deriverbar i 1 och dessutom gäller för alla $x, y > 0$ att $f(xy) = f(x) + f(y)$. Visa att $f(x) = C \ln x$, där C är en reell konstant.
Ledning: Härled en differentialekvation som f satisfierar genom att använda att $f(1) = 1$ och

$$\frac{f(xy) - f(x)}{xy - x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{f(y) - f(1)}{y - 1}.$$