# Årgång 54, 1971

## Första häftet

## Matematiska uppgifter

**2822.** Bestäm alla reella tal $x$ sådana att

$$|x-1|^2 - 3|x-1| + 2 < 0$$

(Svar: $\{x \in \mathbb{R}:\ -1 < x < 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}:\ -2 < x < 3\}$)

**2823.** Visa att om $x > y > 1$ så är $xy - 1 > x - y > \ln(x/y)$.

**2824.** Undersök om punkterna $(1, 2, 0)$, $(2, 0, -1)$, $(-1, 3, 0)$ och $(4, 2, 1)$ ligger i ett plan. (Parallellkoordinatsystem.)
(Svar: Ja, punkterna ligger i ett plan)

**2825.** Vektorn $\overline{u}_1$ med koordinaterna $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ är given. Bestäm två vektorer $\overline{u}_2$ och $\overline{u}_3$ så att $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3$ är en ortonormerad bas för vektorerna i rummet. (Ortonormerad bas.)
(Svar: T ex $\overline{u}_2 = (0, 1, 0)$ och $\overline{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$)

**2826.** Matrisen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ är given. Visa att det finns tal $c_0$, $c_1$, $c_2$ som inte alla är noll och som uppfyller $c_2A^2 + c_1A + c_0E = O$, där $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ och $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**2827.** I en äldre lärobok har vi hittat följande: »Funktionen $f$ är strängt växande och deriverbar. Då är differenskvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} > 0 \tag{1}$$

för alla $h \neq 0$, eftersom täljaren och nämnaren har samma tecken. Ur (1) får vi genom att låta $h \to 0$, att

$$f'(x) > 0\text{»}$$

Är slutsatsen i den sista meningen riktig? Om inte, förklara var felet ligger, gärna genom att ge ett exempel.

**2828.** Med en randpunkt till en icke-tom punktmängd $M$ i planet menas en punkt $a$ sådan att varje cirkel med medelpunkt i $a$ innehåller en punkt som tillhör $M$ och en punkt som inte tillhör $M$. Mängden av randpunkter till $M$ betecknas med $r(M)$.

a) Visa att för godtyckliga icke-tomma mängder $A$ och $B$ i planet gäller att $r(A \cup B) \subseteq r(A) \cup r(B)$.

b) Ge exempel på att $r(A \cup B)$ kan vara en äkta delmängd till $r(A) \cup r(B)$, dvs att $r(A \cup B) \neq r(A) \cup r(B)$.

**2829.** De stokastiska variablerna $X$ och $Y$ är så beskaffade att $P(X \neq 0) = P(Y \neq 0) < a$. Visa att $P(X + Y \neq 0) < a$.

**2830.** Låt $f$ vara en kontinuerlig icke-negativ funktion sådan att $\int_0^\infty f(x)\,dx$ är konvergent. Visa att det finns en talföljd $(x_k)_{k=1}^\infty$ sådan att $x_k \to \infty$ och $f(x_k) \to 0$ då $k \to \infty$.
(Svar: T ex $(x_k)_{k=1}^\infty$ där $f(x_k) = \inf_{k-1 \le x \le k} f(x)$)

**2831.** Att $\langle G, *\rangle$ är en grupp innebär att

1) $*$ är en associativ kompositionsregel på $G$
2) det finns ett element $e \in G$ så att $e * g = g * e = g$ för alla $g \in G$ (kallas neutralt element)
3) till varje $g \in G$ finns ett element $g^{-1} \in G$ så att $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ ($g^{-1}$ kallas invers till $g$ med avseende på $*$)

Antag nu att gruppen $\langle G, *\rangle$ är ändlig, dvs $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ är en ändlig mängd. Antag vidare att $\langle H, *\rangle$ är en undergrupp till $\langle G, *\rangle$. Sätt $H * g_j = \{h * g_j : h \in H\}$ för $j = 1, 2, , \dots, n$. (Observera att $H * g_j$ inte behöver vara en grupp.)

a) Visa att varje element i $G$ tillhör $H * g_j$ för något $j = 1, 2, , \dots, n$.
b) Visa att om $g_{j_p} * g_{j_q}^{-1} \in H$ så är $H * g_{i_p} = H * g_{i_q}$ och om $g_{j_p} * g_{j_q}^{-1} \notin H$ så är $H * g_{i_p} \cap H * g_{i_q} = \emptyset$.
Antag att $H * g_{j_1}, H * g_{j_2}, \dots, H * g_{j_k}$ är de mängder ur $H * g_1, H * g_2, \dots, H * g_n$ sådana att $g_{j_p} * g_{j_q}^{-1} \notin H$ för $j_p \neq j_q$. Av a) och b) följer att $H * g_{j_1}, H * g_{j_2}, \dots, H * g_{j_k}$ är en klassindelning av $G$, dvs en uppsättning parvis disjunkta mängder vars union är $G$.
c) Visa att $H$ och $H * g_{j_p}$ har lika många element genom att visa att funktionen $f : h \curvearrowright h * g_{j_p}$ är omvändbar och har hela $H * g_{j_p}$ som värdemängd.
d) Visa Lagranges sats: Antag att $\langle H, *\rangle$ är en undergrupp till den ändliga gruppen $\langle G, *\rangle$ och att $o(H)$ och $o(G)$ betecknar antalet element i $H$ respektive $G$. Då gäller att $o(G)$ är delbart med $o(H)$.
e) Antag att $\langle G, *\rangle$ är en grupp med $o(G) = p$, där $p$ är ett primtal och att $\langle H, *\rangle$ är en undergrupp till $\langle G, *\rangle$. Visa att $H = \{e\}$ eller $H = G$. ($e$ betecknar det neutrala elementet i $\langle G, *\rangle$.)
f) Antag att $\langle G, *\rangle$ är en ändlig grupp. Visa att om $g \in G$ så finns ett minsta positivt heltal $n$ så att $g^n = e$, där $g^n = g * g * g * \ldots * g$. Visa att $\langle \{e, g, g^2, \dots, g^n\}, *\rangle$ är en undergrupp till $\langle G, *\rangle$, den cykliska undergruppen som alstras av $g$. Visa att $o(G)$ är delbart med $n$.

g) Visa att varje grupp $\langle G, *\rangle$ med $o(G) = p$, där $p$ är primtal är cyklisk, dvs $G = \{e, g, g^2, \ldots, g^{p-1}\}$ för något $g \in G$.

# Andra häftet

## Matematiska uppgifter

**2832.** Visa att om $n$ är ett heltal så är $3n+2$ aldrig kvadrat på ett heltal. *(Latinlinjen, 1930.)*

**2833.** Lös ekvationen $\dfrac{{}^a\log(8x^3+7)}{{}^a\log(2x+1)} = 3.$ *(Latinlinjen, 1932.)*
(Svar: $x = 1/2$)

**2834.** Bestäm det exakta förhållandet mellan de båda periodiska decimalutvecklingarna $0{,}045\,45\,45\ldots$ och $0{,}054\,054\,054\ldots$ *(Latinlinjen, 1932.)*
(Svar: $37/44$)

**2835.** Lös ekvationen $(z+1)^5 = z^5+1$. *(Reallinjen, 1938.)*
(Svar: $0, -1, -\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$)

**2836.** Man bildar alla möjliga bråk i vilka täjaren är mindre än nämnaren samt täljaren och nämnaren är några av talen $1, 2, 3, \ldots, n$. Beräkna summan av dessa bråk. *(Reallinjen, 1934.)*
(Svar: $\frac{n(n-1)}{4}$)

**2837.** I en given rätvinklig triangel, i vilken en vinkel är 30°, har man inskrivit en likbent, rätvinklig triangel, så att den räta vinkelns spets faller på den givna triangelns hypotenusa. Vidare är de båda trianglarnas hypotenusor parallella. Beräkna förhållandet mellan trianglarnas areor. *(Latinlinjen, 1932.)*
(Svar: $\frac{7\sqrt{3}+12}{6}$)

**2838.** Sträckan $AA_1$ med längden $a$ är given. $A_2$ är mittpunkt på sträckan $AA_1$, $A_3$ är mittpunkt på sträckan $A_1A_2$, $A_4$ är mittpunkt på sträckan $A_2A_3$ osv. Punkterna $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ närmar sig obegränsat en viss punkt då $n \to \infty$. Beräkna denna punkts avstånd från $A$. *(Latinlinjen, 1939.)*
(Svar: $2a/3$)

**2839.** Man betraktar den rotationskropp som uppkommer, då en likbent parallelltrapets roterar kring den längsta av de båda parallella sidorna. Vilket är det största värde som, denna rotationskropps volym kan anta, om den sida, kring vilken rotationen sker, har konstant längd lika med $a$, samt de övriga sidorna väljes så att

den likbenta parallelltrapetsens omkrets är konstant lika med $3a$? *(Reallinjen, 1934.)*
(Svar: $\frac{\pi a^3}{3}$)

**2840.** På ett horisontellt bord ligger fyra klot, vartdera med radien 8 cm, ordnade så att deras medelpunkter bildar en kvadrat med sidan 16 cm. Ovanpå dessa klot lägges ett femte som tangerar de övriga och vars radie är 25 cm. Hur högt över bordet ligger dess medelpunkt? *(Reallinjen. 1935.)*
(Svar: 39 cm)

**2841.** Visa att i varje triangel är

$$a\sin A - b\sin B = c\sin(A-B)$$

om $a$, $b$ och $c$ beteckanr längderna till de sidor som står emot vinklarna $A$, $B$ respektive $C$. *(Reallinjen, 1936.)*

**2842.** Låt $p(x)$ vara ett polynom av graden 3 med reella koefficienter som har lokalt minimum i $(a, p(a))$ och lokalt maximum i $(b, p(b))$. Bevisa attt inflexionspunkten till kurvan $y = p(x)$ är mittpunkt på sammanbindningslinjen mellan $(a, p(a))$ och $(b, p(b))$. *(Reallinjen, 1939.)*

**2843.** Ange i så enkel form som möjligt lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - ay + a^2z - a^3 = 0 \\ x - by + b^2z - b^3 = 0 \\ x - cy + c^2z - c^3 = 0 \end{cases}$$

där $a$, $b$ och $c$ är givna, sinsemellan olika, konstanter. *(Latinlinjen. 1935.)*
(Svar: $x = abc$, $y = ab + bc + ac$, $z = a + b + x$)

## Tredje häftet

## Matematiska uppgifter

**2844.** Tänk på ett tal. Addera därtill det tal som är en enhet större än det Du tänkte på. Addera 9 till det erhållna resultatet, dividera därefter med 2 och subtrahera slutligen det ursprungliga talet.
Du fick svaret 5, inte sant? Hur kan jag veta det?

**2845.** Låt $C_1$ och $C_2$ vara två cirklar vars radier har längderna $r_1$ resp $r_2$. Antag att $C_1$ och $C_2$ skär varandra under rät vinkel samt att $C_1$ skär sammanbindningslinjen mellan cirklarnas medelpunkter i

mittpunkten av en radie till $C_2$. Bestäm förhållandet $r_1/r_2$.
(Svar: 4/3)

**2846.** Låt $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ vara ett udda antal givna positiva hela tal och låt $y_1, y_2, \ldots, y_{2n+1}$ vara samma heltal uppräknade i någon annan ordning. Visa att produkten $(x_1-y_1)(x_2-y_2)\ldots(x_{2n+1}-y_{2n+1})$ alltid är jämn.

**2847.** Vad är sannolikheten att i ett tresiffrigt slumptal siffran i mitten betecknar ett större tal än vad första och sista siffran betecknar? Exempel på sådana tal är 582 och 073.
(Svar: $(1^2+2^2+\ldots+9^2)/10^3 = 0,285$)

**2848.** Bestäm heltalsdelen av $\lg(10^n+1)\cdot\lg(10^n-1)$ för varje heltal $n \geq 2$. (Med heltalsdelen av $x$ menas det heltal $m$ som uppfyller $m \leq x < m+1$.)
(Svar: $n^2-1$)

**2849.** Funktionen $f$ har kontinuerlig derivata för $x \geq 0$. Vidare gäller att $\int_0^\infty f(x)\,dx$ och $\int_0^\infty f'(x)\,dx$ båda är konvergenta. Visa att $f(x) \to 0$ då $x \to \infty$.

**2850.** Med $x \curvearrowright \arcsin x$ menas inversa funktionen till $x \curvearrowright \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Således gäller att

$$x = \arcsin y \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sin x \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Beräkna $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$
b) Beräkna $\arcsin\left(\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$
c) Rita kurvan $y = \arcsin(\sin x)$

(Svar: a) $\pi/4$, b) $-\pi/2$)

**2851.** Integralen $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+3\sin x}$ går inte att beräkna med gymnasiekunskaper. Ett av nedanstående alternativ är det rätta värdet. Avgör vilket!

$$\square\ -\frac{\pi}{2} \quad \square\ \frac{\pi}{6} \quad \square\ \frac{3\pi}{10} \quad \square\ \frac{\pi}{2} \quad \square\ \frac{3\pi}{2} \quad \square\ \frac{7\pi}{2}$$

(Svar: $\pi/2$)

**2852.** a) Ange en följd av 10 konsekutiva positiva heltal som inte innehåller något primtal.

b) Visa att för varje positivt heltal $n$ finns en följd av $n$ konsekutiva positiva heltal som inte innehåller något primtal.

**2853.** Visa att varje kurva med längd 1 kan täckas av en rektangulär pappskiva med area $1/4$.

# Fjärde häftet

## Matematiska uppgifter

**2854.** Kaptenen är dubbelt så gammal som skeppet var när kaptenen var lika gammal som skeppet är nu. Kaptenens och skeppets totala ålder är 56 år. Hur gamla är skeppet och dess kapten?
(Svar: Kaptenen är 32 år och skeppet är 24 år)

**2855.** Bestäm alla heltal $x$ och $y$ som satisfierar ekvationen $x^3 - y^3 = 7$.
(Svar: $x = 2,\ y = 1$ och $x = -1,\ y = -2$)

**2856.** En urna innehåller 8 svarta och 2 vita kulor. Man drar kulor på måfå och utan återläggning tills man får en vit kula. Vad är det mest sannolika antalet dragningar som erfordras?
(Svar: 1 dragning)

**2857.** Visa att det inte finns någon funktion som satisfierar

$$xf'(x) + f(x) = |x| \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}$$

**2858.** Talföljden $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ är given genom att

$$a_1 = 1 \quad \text{och} \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \quad \text{för } n \geq 1.$$

Visa att $\ln n \leq a_n \leq n$ för alla $n \in \mathbb{Z}_+$.
(Ledning: Visa den högra olikheten först.)

**2859.** Per och Pål har i en botanisk trädgård plockat 7 frukter av aptitligt utseende. De är lyckligt ovetande om att tre av frukterna är giftiga. Per väljer på måfå fyra av frukterna och äter dessa. De återstående äter Pål. Hur stor är sannolikheten att både Per och Pål blir förgiftade?
(Svar: $6/7$)

**2860.** Visa att det finns precis ett positivt tal $a$ sådant att olikheten

$$\sqrt{x} \geq 1 + a \ln x$$

är sann för alla $x > 0$. Bestäm detta värde på $a$.
(Svar: $a = 1/2$)

**2861.** Bestäm en funktion $f$, definierad och deriverbar för $x > 0$, som uppfyller följande:

1) $f(1) = 2$
2) alla trianglar med ett hörn på kurvan $y = f(x)$, ett i motsvarande tangents skärningspunkt med $y$-axeln och ett hörn i origo har arean 1.

(Svar: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ eller $f(x) = 3x - \frac{1}{x}$)

**2862.** Funktionerna $f, f_1, f_2, f_3, \ldots$ är sådana att $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ för alla $n$ och alla $x$. Vidare gäller att $f_n(x) \to f(x)$ då $n \to \infty$ för alla $x$. Visa att om $\{x : f_n(x) > a\}$ är öppen för alla $n$ så är $\{x : f(x) > a\}$ öppen. (En icke-tom mängd $M$ av reella tal kallas öppen om till varje tal $x_0$ i $M$ det finns ett öppet intervall $I$ sådant att $x_0 \in I$ och $I \subseteq M$.)