Årgång 56, 1973

Första häftet

Matematiska uppgifter

2903. Låt a , b och c vara positiva tal, sådana att $ab + ac + bc = 1$. visa att $abc < 1$.

2904. Lös ekvationen $25^x + 2 \cdot 9^x = 3 \cdot 15^x$.
(Svar: $x = 0$ eller $\ln 2/(\ln 5 - \ln 3)$)

2905. För triangeln ABC gäller att $(\tan A - 1)(\tan B - 1) = 2$. Visa att vinkeln $C = 45°$.

2906. Personerna A och B spelar följande variant av rysk roulette. En revolver har roterbart magasin med plats för 6 skott, som vid spelets början har försetts med ett skott. A börjar med att slumpmässigt rotera magasinet, sätter därefter revolvern till tinningen och trycker av. Om han därefter är i livet, sätter han in ytterligare ett skott och överlämnar revolvern till B, varefter proceduren upprepas. Efter varje klick byter alltså spelarna roll, efter det att ytterligare ett skott satts in. Bestäm sannolikheten att A vinner spelet.
(Svar: $0,48$)

2907. Visa att det finns en talföljd $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sådan att $\lim_{n\to\infty} a_n$ inte existerar men för vilken $\lim_{n\to\infty}(a_{n+p} - a_n) = 0$ för varje positivt heltal p.

2908. På en tavla finns talen 1, 2, 3, ..., 1972, 1973. Man ersätter två godtycklig valda tal med deras differens. Denna procedur upprepas tills endast ett tal återstår på tavlan. Visa att detta tal är udda.

2909. Låt f vara en kontinuerlig, icke-negativ funktion. Visa att

$$\sqrt{1 + \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^2} \le \int_0^1 \sqrt{1 + f^2(x)}\,dx \le 1 + \int_0^1 f(x)\,dx$$

Tolka olikheterna geometriskt.

2910. Visa att $\lim\limits_{n\to\infty} n \int_0^1 (x^2 - x + 1)^n\,dx = 2$.

2911. Personerna A, B och C spelar följande spel. I varje omgång spelar två av dem, varvid en vinner och en förlorar. Segraren möter så i nästa omgång den person, som stod över nyss. Spelet fortsätter, tills samma person vunnit två omgångar i följd. Sannolikheten för vinst är i varje omgång och för varje person $1/2$. Bestäm sannolikheten att A vinner spelet, om första omgången spelas mellan A

och B.
(Svar: 5/14)

Andra häftet

Matematiska uppgifter

2912. I triangeln ABC är $\cos B = \dfrac{\sin A}{2\sin C}$. Visa att vinklarna B och C är lika.

2913. Visa att $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin x}}\, dx > 1 + \frac{\pi}{2}$.

2914. Funktionerna f och g är deriverbara för $x \geq 0$. Vidare gäller att $f'(x) + g'(x) \cdot f(x) > 0$ för $x \geq 0$ samt att $f(0) \geq 0$. Visa att $f(x) > 0$ för $x > 0$.

2915. Beräkna produkten av de tio första termerna i följden

$$3, 5, 17, 257, \ldots.$$

(Svar: $2^{1122} - 1$)

2916. Visa att för alla komplexa tal $z = x + iy$ gäller att

$$|e^{iz} + e^{-iz}|^2 \geq 2(1 + \cos(2x))$$

där $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$.

2917. Visa att ekvationen $3^x + 20 = 11^y$ saknar heltalslösningar.

2918. En urna innehåller lappar numrerade $1, 2, \ldots, n$. En person drar en lapp, noterar numret och lägger tillbaka lappen. Proceduren upprepas tills han för första gången får ett nummer han tidigare fått. Visa att sannolikheten att detta sker i dragning nummer k är $(k-1)!\dbinom{n}{k-1}\dfrac{k-1}{n^k}$ för $k = 2, 3, \ldots, n+1$.

2919. Bestäm det minsta värde $x_1 + 2x_2 + 3x_3$ antar för de x_1, x_2 och x_3 som uppfyller $2x_1 + x_3 \geq 3$, $x_1 + 2x_2 \geq 4$ och $x_2 + 2x_3 \geq 5$.
(Svar: 9)

2920. Visa att talet

$$1000! = 1000 \cdot 999 \cdot 998 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

slutar med 249 nollor.

2921. Man har n stycken kulor numrerade från 1 till n och n stycken urnor numrerade från 1 till n. Man placerar på måfå en kula i varje urna. Visa att väntevärdet av antalet kulor, som placeras i en urna med samma nummer som kulan, är 1, oberoende av n.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

2922. Pers klocka går för fort och Svens för sakta. Båda klockorna ställs den 1 januari klockan 12 på middagen efter en rättgående klocka. Dagen därpå vid samma tid visar Pers klocka 13 minuter över 12 och Svens klocka 11 minuter före 12. När inträffar det härnäst att de båda klockorna stämmer överens förutsatt att de varken ställs eller justeras utan endast hålls gående?
(Svar: 31 januari klockan 12.00 visar klockorna 06.30)

2923. En kvadrat och en likbent triangel är givna. Triangelns bas är lika med kvadratens sida och dess höjd är lika med kvadratens diagonal. Visa att triangeln och kvadraten har lika stora omkretsar.

2924. Vilka vinklar A satisfierar ekvationen

$$6(\ln\sin A)^3 + 5(\ln\sin A)^2 + \ln\sin A = 0?$$

(Svar: $A = 90° + n \cdot 360°$, $37{,}34° + n \cdot 360°$, $142{,}66° + n \cdot 360°$, $45{,}77° + n \cdot 360°$ samt $134{,}23° + n \cdot 360°$)

2925. Beräkna summan av de n första termerna i serien

$$1 - 3 + 5 - 7 + 9 - \dots$$

(Svar: $n \cdot (-1)^{n-1}$)

2926. Visa att om n är ett positivt heltal så är även $\dfrac{n(n^2+4)(n^2+6)}{5}$ ett positivt heltal.

2927. En rätvinklig triangel roterar kring såväl hypotenusan som de båda kateterna. Volymerna av de så erhållna solida figurerna betecknas V , V_1 och V_2. Visa att

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$$

2928. En halvcirkel är given. Inuti denna är uppritad en kvadrat med hälften så stor area på ett sådant sätt att kvadratens ena sida faller utefter halvcirkelns diameter och ett av dess hörn faller på periferin. I vilket förhållande delas kvadraten av en radie i halvcirkeln dragen genom nämnda hörnpunkt?

(Svar: $\dfrac{\sqrt{4-\pi}}{2\sqrt{\pi}-\sqrt{4-\pi}}$)

2929. En person som stod vid randen av en gruva släppte ner en sten i gruvan. Han hörde ljudet av stenens slag mot gruvans botten 8 sekunder efter det ögonblick då stenen släpptes. Använd denna uppgift för beräkning av gruvans djup. Den av en fallande kropp tillryggalagda vägen är proportionell mot kvadraten på tiden för fallet och kan anses utgöra 5 m under första sekunden. Ljudets hastighet i luft antas vara 340 m i sekunden.

(Svar: Gruvans djup är $340(42-10\sqrt{17}) \approx 261$ m)

2930. Bevisa att siffrornas summa i det tal som är summan av två givna tal antingen är lika med summan av de båda talens siffersummor eller skiljer sig därifrån med en multipel av 9.

2931. Lös ekvationen $\sqrt[3]{60-x}+\sqrt[3]{x-11}=\sqrt[3]{4}$.

(Svar: $x=-5/2$ eller $147/2$)

2932. Bestäm det minsta positiva tal som dividerat med 28 ger resten 21 och dividerat med 19 ger 17 till rest.

(Svar: 245)

2933. Upprita en cirkel som går genom två givna punkter och skär en given cirkel under räta vinklar.

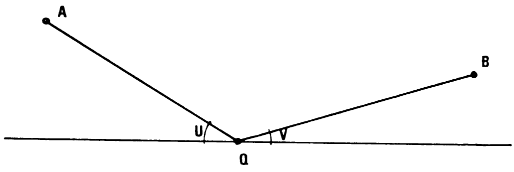
Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

2934. Visa att ekvationen $x^2-y^2=2k$ saknar heltalslösning om k är ett udda heltal.

2935. Låt f vara en kontinuerlig funktion med egenskapen att $\int_a^b f(x)\,dx$ bara beror på $b-a$. Visa att f är konstant.

2936. Låt A och B vara två olika punkter på samma sida om linjen l (se figuren). Konstruera den punkt Q på l som har egenskapen att a) $u=v$ b) $u=2v$



2937. Visa att om n är ett udda heltal större än 1 så är $n^5 - n$ delbart med 240.

2938. Låt f vara en funktion som är deriverbar för alla x. Antag att det finns en konstant $K < 1$ så att $|f'(x)| \leq K$ för alla x. Låt x_0 vara ett givet tal och definiera $x_1, x_2, x_3, \ldots$ genom $x_n = f(x_{n-1})$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$ Visa att talföljden $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ är konvergent och att gränsvärdet är oberoende av x_0.

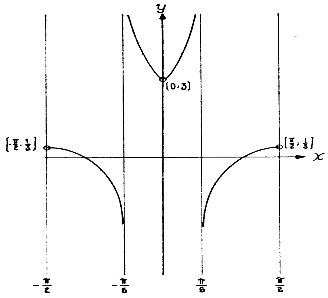
2939. Bestäm det största tal a och det minsta tal b för vilka

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+a} \leq e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+b}$$

för alla positiva heltal n.

(Svar: $a = \dfrac{1}{\ln 2} - 1$ och $b = 1/2$)

2940. Betrakta funktionen f definierad genom $f(x) = \dfrac{\tan 3x}{\tan x}$. Visa att f inte antar värden mellan $1/3$ och 3. Rita kurvan $y = f(x)$ för $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

(Svar: 

)

2941. Beräkna $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\cos(n+1)x \cos nx}$.

(Svar: $\frac{\tan(p+1)x - \tan x}{\sin x}$)

2942. Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{1+(-1)^n n \ln n}$ är konvergent.

2943. Det är ett välkänt faktum att personerna A, B, C och D endast talar sanning i ett fall av tre. En dag gör A ett påstående. Antag att D

säger att C säger att B säger att A talar sant. Vad är sannolikheten att A talar sant?
(Svar: 13/41)