Årgång 57, 1974

Första häftet

Matematiska uppgifter

2944. I en triangel ABC är vinkeln B 45°. Visa att $(1+\cot A)(1+\cot B)=2$.

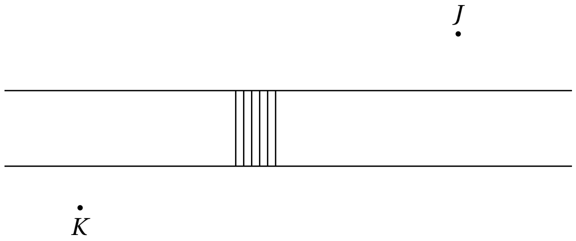
2945. Visa att kurvan $y^2=x^3+3x^2-4$ har en isolerad punkt. Skissera kurvans utseende.

2946. Visa att för varje heltal $n\geq 1$ är $\frac{1}{3}(2^n+(-1)^{n+1})$ ett udda heltal.

2947. Låt $p(x)$ vara ett andragradspolynom med två reella rötter (ev sammanfallande) i intervallet $0\leq x\leq 1$. Visa att $\int_0^1 p(x)\,dx\leq |p''(x)|$.

2948. Visa att $\lim_{n\to\infty}\int_0^2 \frac{1+\sin nx}{1+x^n}\,dx=1$.

2949. Man önskar frakta jord på en skottkärra över ett dike från J till K (se figur). Till sitt förfogande har man en planka som är så kort att den måst läggas vinkelrätt mot diket för att räcka från kant till kant. Var ska plankan placeras för att körsträckan ska bli så kort som möjligt?



2950. Det påstås att den store matematikern Banach alltid gick omkring med en tändsticksask i höger och en i vänster ficka. När han behövde en tändsticka valde han slumpmässigt en ficka och tog en sticka ur asken i den fickan. Båda askarna innehöll N tändstickor från början. Betrakta nu det ögonblick då han sticker ner handen och upptäcker att asken är tom. Visa att sannolikheten att den andra asken innehåller precis r stycken tändstickor är $\binom{2N-r}{N}2^{-2N+r}$.

Visa även att sannolikheten att den ask som först töms inte är densamma som den som först upptäcks vara tom är $\binom{2N}{N}2^{-2N-1}$.

2951. Visa att mängden av alla tal $1/(1-z)$, där z är ett komplext tal med realdelen noll, bildar en cirkel i det komplexa talplanet.

2952. Visa att för icke-negativa heltal m, n och k med $k \le n$ och $k \le m$ gäller att

$$\binom{m}{0}\binom{n}{k} + \binom{m}{1}\binom{n}{k-1} + \cdots + \binom{m}{k}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{k}$$

där $\binom{j}{i} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot j}{(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot i)(1\cdot 2\cdot \ldots \cdot (j-i))}$ och $\binom{j}{0} = 1$.

2953. I en kvadrat med sidan 7 cm finns 51 punkter. visa att det finns tre punkter som går att täcka med en cirkelskiva med radien 1 cm.

2954. Konstruera en cirkel vars periferi är medelproportional till tvenne givna cirklars periferier. (Studentexamen 1897)

Andra häftet

Matematiska uppgifter

2955. Låt T beteckna arean av triangeln ABC. Visa att

$$T = r^2\left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2} + \cot\frac{C}{2}\right)$$

där r är den inskrivna cirkelns radie.

2956. Visa att det för varje positivt heltal N finns oändligt många tal i Fibonacciföljden som är delbara med N. Talen i Fibonacciföljden definieras genom $a_1 = a_2 = 1$ och $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ för $n \ge 3$.

2957. Låt f vara en funktion som är kontinuerlig och växande i $0 \le x \le 1$. Visa att för varje x med $0 < x < 1$ gäller att

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt \le \int_0^1 f(t)\,dt.$$

2958. Visa att för varje reellt tal x gäller att

$$x^n + \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{k+1} x^k \le 0.$$

2959. En slumptalsgenerator alstrar slumpsiffror bland de nio siffrorna $1, 2, \ldots, 9$. Bestäm sannolikheten att produkten mellan de siffror som erhålles i n alstringar är delbar med 10.
(Svar: $1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n - \left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{4}{9}\right)^n$)

2960. På hur många sätt kan n personer byta hatt så att samtliga får fel hatt?
(Svar: $n! \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$)

2961. Ett tal som blir detsamma då det läses bakifrån (exempelvis 22, 1331, 123321 och 12321) kallas en palindrom. Visa att varje palindrom med jämnt antal siffror är delbart med 11.

2962. Låt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vara en positiv konvergent serie. Visa att det finns en följd $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ av positiva reella tal sådan att $b \to \infty$ då $n \to \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

2963. I tillförlitlighetsteori är man intresserad av funktionssannolikheten $R(t)$ att en enhet fungerar felfritt åtminstone under tiden t. Antag att man har en enhet med växande felintensitet, dvs funktionen $z(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)}$ är växande. (Detta innebär att benägenheten för enheten att gå sönder ökar med åldern.) Sätt $\mu = \int_0^{\infty} R(t)\, dt$, dvs μ är väntevärdet av enhetens livslängd.

a) Visa att det finns högst ett värde på t för vilket $R(t) = e^{-t/\mu}$.
b) Visa att $R(t) \geq e^{-t/\mu}$ för $t < \mu$.

2964. I ett TV-program med Lennart Hyland hösten 1972 förekom följande tävling. En tavla var försedd med 16 luckor. Bakom två av dessa dolde sig ”troll”, bakom de övriga 14 vinster, som vi antar var värda 100 kronor var. Den tävlande fick välja en lucka. Man öppnade den. Visade den sig dölja ett troll hade den tävlande förlorat. I annat fall hade han vunnit vinsten och hade dessutom rätt att fortsätta spelet, om han så önskade. Valde han att fortsätta så kunde han vinna 2, 3, ..., 14 vinster, om han hade tur, men så fort han valde en lucka med ett troll så var *hela* vinsten förverkad. Endast genom att avbryta spelet i tid kunde han avgå med vinst. Hur många gånger borde en tävlande försöka välja luckor om han ville maximera väntevärdet av sin vinst? (Den tävlande visste naturligtvis inte bakom vilka luckor trollen befann sig.)
(Svar: 5)

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

2965. Visa att arean T av triangeln ABC ges av

$$T = p^2 \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}$$

där p betecknar hälften av triangelns omkrets.

2966. Funktionen f är två gånger deriverbar och uppfyller differentialekvationen $f + (f')^3 + f'' = 0$. Vidare är $f(0) < 0$. Visa att f inte har lokalt maximum för $x = 0$.

2967. Ett positivt heltal n sådant att n delar $2^n - 2$ kallas ett pseudoprimtal. Visa att 341 och 561 är pseudoprimtal.

2968. En mus står i en bur med tre utgångar. Den ena utgången leder omedelbart till friheten. De två andra utgångarna leder till gångar, som återför musen till buren efter 1 respektive 3 tidsenheter. Beräkna väntevärdet för den tid det tar musen att nå friheten, om den varje gång väljer utgång på måfå.
(Svar: 4 tidsenheter)

2969. Låt p, q och r beteckna positiva heltal utan gemensam delare och med $p > q > r$. Antag vidare att

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Visa att $p + q$, $p - q$ och $q - r$ alla är kvadrater på heltal.

2970. Matkön vid Högskolan i Luleå kan (grovt sett) anses bestå av två sorters matgäster. För den ena sorten (”ettor”) tar det en minut att plocka till sig bestick, bricka, bröd etc och betala, medan den andra sorten (”tvåor”) behöver dubbelt så lång tid. Köer som tar precis en minut på sig att ”ringla” igenom kan konstrueras på ett sätt; kön måste ju bestå av en ”etta”. Köer som tar två minuter kan sammansättas på 2 sätt. Dels med två ”ettor” och dels med en ”tvåa”. På hur många sätt kan man sammansätta köer som tar precis n minuter på sig?
(Svar: Antalet sätt är lika med det $n - 1$:sta elementet i Fibonacciföljden, dvs lika med $\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$)

2971. En kvadrat indelas i fyra kongruenta delkvadrater. Två av dessa väljs på måfå. Beräkna sannolikheten att de valda kvadraterna har minst en sida gemensam. Behandla motsvarande problem då kvadraten delas i 9, 16, och allmänt n^2 kvadrater.
(Svar: 2/3, 1/3, 1/5 respektive $4/n(n+1)$)

2972. Visa att avstånden från en godtycklig punkt på en cirkels periferi till tre ekvidistanta punkter på periferin är så beskaffade att det största är lika med summan av de två minsta.

2973. Låt f vara en strängt växande och positiv funktion. Visa att

$$\lim_{a\to 0}\left[\int_0^1 (f(x))^a\,dx\right]^{1/a} = \exp\left[\int_0^1 \ln f(x)\,dx\right]$$

2974. Låt $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ vara en given talföljd. Visa att

a) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent $\Longrightarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k \to 0$ då $n \to \infty$.

b) $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$ då $n \to \infty \Longrightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} ka_k \to 0$ då $n \to \infty$.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

2975. Bestäm alla värden på konstanten a för vilka ekvationen $x^3 - 3a^2x + 6a = 0$ har tre olika reella rötter.
(Svar: $0 < a < \sqrt{3}$ senare korrigerat till $|a| > \sqrt{3}$)

2976. Bevisa att i triangeln ABC är bisektrisen från A mot sidan BC lika med $2bc\cos\frac{A}{2}/(b+c)$.

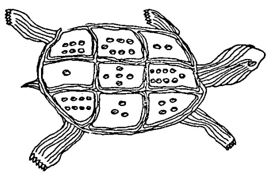
2977. Låt $F_0, F_1, F_2, \ldots$ vara den s.k. Fibonacciföljden där $F_0 = F_1 = 1$ och $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ för $n \geq 1$.

a) Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = \frac{1}{1-x-x^2}$ då serien är konvergent.

b) Visa att $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ är konvergent för $|x| < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

2978. Arkimedes levde på 200-talet f.Kr. Han skrev bl.a. en bok som heter Sandräknaren där han beskriver olika metoder att skriva stora tal. Talet 10 000 kallade han en *myriad* och summan av en myriad av myriader döpte han till en *oktad*. Låt A beteckan produkten mellan en oktad av oktader. Bestäm de två sista siffrorna i talet 3^A.
(Svar: 01)

2979. Det påstås att det för länge sedan fanns en kejsare i Kina vid namn Yu. När han en dag strövade längs stranden till Gula Floden såg han en sköldpadda av det utseende figuren visar.



Till sin stora förvåning fann han att prickarna i de nio sköldarna hade egenskapen att rad-, kolonn- och diagonalsummor var lika (nämligen 15). Sköldpaddan blev förstås världsberömd, och mönstret som döptes till Lo-Shu kallas på svenska för en magisk kvadrat. En ren magisk kvadrat är en magisk kvadrat vars celler är fyllda med de konsekutiva heltalen 1, 2, …, N^2 där N är antalet celler i varje rad (och kolonn). Visa att man inte kan fylla cellerna i kvadraten nedan så att den blir en ren magisk kvadrat.

8	1	12	4

2980. Två personer har stämt möte på en viss plats. Var och en av dem kommer vid en slumpmässigt vald tidpunkt mellan 11 och 12 och lämnar platsen efter 5 minuter om den andre då inte anlänt till den avtalade platsen. Beräkna chansen att personerna möts på den avtalade platsen.
(Svar: 23/144)

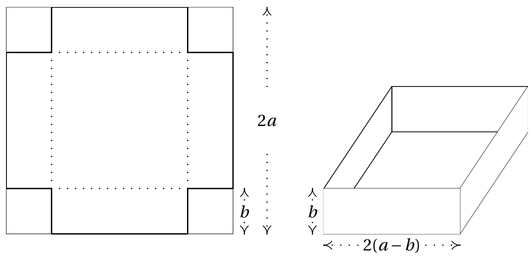
2981. En kompositionsregel $*$ på en mängd S kallas kommutativ om $x * y = y * x$ för alla x och y i S. Uppfyller $*$ att $x * (y * z) = (x * y) * z$ för alla x, y och z i S kallas kompositionsregeln associativ.

Låt nu $*$ vara en kompositionsregel på en mängd S med egenskapen att

1. $x * (x * y) = y$ för alla x och y i S
2. $(y * x) * x = y$ för alla x och y i S

Visa att $*$ är kommutativ. Visa även med exempel att $*$ inte är associativ.

2982. Av en kvadratisk kartongbit med sidolängden $2a$ ska man bilda en ask (utan lock) genom att klippa bort en kvadrat med sidokanten b från varje hörn och sedan böja upp kanterna (se figuren). Visa att man ska välja $b = a/3$ för att askens volym ska bli så stor som möjligt.



2983. En pojke har hittat sin pappas gamla räknebok på vinden. Den är dock så gammal att alla siffror utom en har suddats ut i ett räkneproblem. Hjälp pojken att rekonstruera problemet. Observera att man på den tiden använde x som beteckning för multiplikation.

$$\begin{array}{r}
\bullet\,\bullet\,\bullet \\
\mathrm{x}\ \bullet\,\bullet\,\bullet \\
\hline
\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\
\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\
\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\
\hline
\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\
+\quad 1\,\bullet\,\bullet\,\bullet \\
\hline
\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet\,\bullet
\end{array}$$