Årgång 60, 1977

Första häftet

Matematiska uppgifter

3060. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} xy = 8 \\ {}^{y}\log x + {}^{x}\log y = 2 \end{cases}$$

(Svar: $x = y = \sqrt{8}$)

3061. lös ekvationen $6\sin x - 6\sin 2x + 5\sin 3x = 0$.

(Svar: $x = n \cdot 180°$, $84{,}26° + n \cdot 360°$, $-84{,}26° + n \cdot 360°$, $60° + n \cdot 360°$, $-60° + n \cdot 360°$)

3062. Man ska göra en hydda i form av en kon medelst ett stort antal lika långa stänger vilka med sina övre ändar sammanställs i en punkt. Vilken lutning mot marken bör stängerna ha för att utrymmet i hyddan ska bli så stort som möjligt?

(Svar: 35,2°)

3063. En aritmetisk serie har egenskapen att en godtycklig partialsumma är lika med kvadraten på termantalet. Vilken är serien?

(Svar: $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$)

3064. I vilket talsystem skrivs 433 som 531?

(Svar: Talsystemet med basen 9)

3065. Ett istäcke har för närvarande en tjocklek på 1000 cm. Det ökar varje år på vintern med 0.05% av sin tjocklek men minskar varje sommar med 60 cm. Hur länge dröjer det innan istäcket har smält?

(Svar: 2500 år)

3066. Låt ABC vara en likbent och vid C rätvinklig triangel. Med C som centrum och CA som radie är en cirkel uppritad. Från en punkt B på periferin är parallellt med AB dragen en linje som skär linjen genom A och C i E och linjen genom B och C i F. Visa att kvadraten på avståndet mellan A och B är lika med summan av kvadraterna på avstånden mellan D och E och mellan D och F.

3067. Visa att om n är ett udda heltal så är $n^3 - n$ delbart med 24.

3068. Vilken andragradsekvation har till rötter kuberna på de inverterade värdena av rötterna till $x^2 + px + q = 0$?

(Svar: $q^3x^2 + p(p^2 - 3q)x + 1 = 0$)

3069. Konstruera en triangel då man känner en sida samt de in- och omskrivna cirklarnas radier.

Andra häftet

Matematiska uppgifter

3070. I ekvationen ${}^{a}\log x + {}^{x}\log a = {}^{b}\log ax$ är a och b positiva tal skilda från 1. Bestäm ett samband mellan a och b så att ekvationen får precis en lösning.
(Svar: $a = b^{-2(1\pm\sqrt{2})}$)

3071. Visa att $(n!)^2 > n^n$ för alla heltal $n > 2$.

3072. Låt $x_1, x_2, x_3, \ldots$ och $y_1, y_2, y_3, \ldots$ vara två talföljder. Vi vet attt $x_1 = y_1 = 4$ och att

$$\begin{cases} 2x_{n+1} = x_n + y_n \\ 2y_{n+1} = 3x_n + y_n \end{cases}$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$ Visa att $\lim_{n\to\infty} y_n/x_n = \sqrt{3}$.

3073. Visa att varje heltal av typen $4k+3$ kan skrivas som en produkt av två heltal vars summa är delbar med 4.

3074. Låt a, b och c vara tre olika rationella tal. Visa att

$$\frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} + \frac{1}{(a-b)^2}$$

är kvadraten på ett rationellt tal.

3075. Låt f vara en kontinuerlig funktion sådan att

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty x f(x)\,dx = \int_0^\infty x^2 f(x)\,dx = 0.$$

Visa att f har minst tre positiva nollställen.

3076. Visa att $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{+2\cdots+\sqrt{2}}}}$, där antalet rottecken är n.

3077. Visa att det finns en funktion g sådan att $g'(x) = f(x)$ där

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \text{för } x \neq 0 \\ 0 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

3078. En kub delas i n^3 lika stora delkuber. Två av dessa väljs på måfå. Bestäm sannolikheten att de valda kuberna har en sidoyta gemensam.
(Svar: $6/(n(n^2+n+1))$)

3079. Polynomet $P(x)$ är av graden n. Bestäm $P(n+1)$ om $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ för $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

(Svar: $P(n+1) = 1$ om n är udda och $n/(n+2)$ om n är jämnt.)

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3080. En gymnasist skulle beräkna $\log A/\log B$. Efter att ha förkortat med den gemensamma faktorn log fick han

$$\frac{\log A}{\log B} = \frac{A}{B} = \frac{3}{4}.$$

Bestäm A och B.

(Svar: $A = 64/27$ och $B = 256/81$)

3081. Vilket är det största värde som vinkeln θ mellan vektorerna $\mathbf{u} = (b, c, a)$ och $\mathbf{v} = (c, a, b)$ kan anta?

(Svar: 120°)

3082. Visa att

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{A_1 + A_2 + \cdots + A_n} \le \frac{a_1^2}{A_1} + \frac{a_2^2}{A_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{A_n}$$

för alla reella tal $a_1, a_2, \ldots, a_n, A_1, A_2, \ldots, A_n$.

3083. En talföljd är given genom

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k^k}, \ k \ge 0. \end{cases}$$

Visa att talföljden är konvergent.

3084. Visa att ekvationen $11x^{2m} - 9y^{2m} = 15$ saknar heltalslösning för alla $m \in \mathbb{Z}_+$.

3085. Av två identiska urnor innehåller den ena två svarta kulor och en vit och den andra en svart och två vita. Du ska tala om vilken urna som är vilken. Innan Du svarar får Du dra två kulor. Visa att det är likgiltigt om Du drar kulorna ur samma urna eller en kula från varje urna.

3086. Med hjälp av en räknedosa kan man upptäcka många lustiga relationer, t.ex.

$$\frac{987}{123} = 8.024,\ \frac{9876}{1234} = 8.0032, \ldots,\ \frac{987654321}{123456789} = 8.000000073.$$

Bråken ligger alltså mycket nära 8 och allt närmare ju längre fram i följden man kommer. Förklara detta fenomen genom att visa att

$$\frac{987\ldots(10-k)}{123\ldots k} = 8 + \frac{81k}{10^{k+1}-10-9k},\ k = 1, 2, \ldots, 9.$$

3087. Visa att

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}} = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

3088. Varje J i multiplikationen svarar mot något av talen 0, 2, 4, 6 eller 8 och varje U mot något av talen 1, 3, 5, 7 eller 9. Olika J och U kan svara mot olika siffror. Byt ut alla J och U mot siffror så att multiplikationen blir korrekt.

$$\begin{array}{rrrrr}
 & & J & J & U \\
\cdot & & & U & U \\
\hline
 & J & U & J & U \\
 & J & U & U & \\
\hline
U & U & U & U & U
\end{array}$$

3089. Visa att

a) $\frac{1}{2}\left(e^{x/2} + e^{-x/2}\right) \le e^{2x^2}$ för alla x.

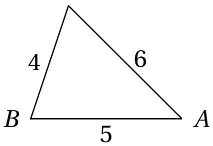
b) $pe^{x/p} + qe^{-x/q} \le e^{x^2/(8p^2q^2)}$ för alla x, om $p > 0$, $q > 0$ och $p + q = 1$.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3090. Visa att ekvationen $({}^{x}\log a)^2 + ({}^{a}\log x)^2 = 2b$ har fyra reella rötter om $a > 1$ och $b > 1$. Visa också att om s betecknar summan av de tre minsta av dessa rötter så gäller $\lim_{b\to\infty} s = 2$.

3091. Visa att för triangeln i figuren gäller $B = 2A$.



3092. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} x(x+y)+z(x-y)&=a\\ y(y+z)+x(y-z)&=b\\ z(z+x)+y(z-x)&=c \end{aligned}\quad ,$$

där a, b och c är positiva tal.

3093. Visa att om f är en monoton funktion sådan att $\lim_{A\to\infty}\int_1^A x^a f(x)\,dx$ existerar, så gäller $\lim_{x\to\infty} x^{a+1} f(x) = 0$.

3094. Antag att ekvationen $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ har tre reella rötter α, β och γ, där $\alpha \le \beta \le \gamma$. Visa att $\gamma - \alpha \ge \sqrt{a^2 - 3b}$.

3095. Visa att $n^n - n^2 + n - 1$ är jämnt delbart med $(n-1)^2$ för varje heltal $n \ge 1$.

3096.

$$\begin{aligned} 12 &= 4\cdot 3\\ 1122 &= 34\cdot 33\\ 111222 &= 334\cdot 333 \end{aligned}$$

Kan man fortsätta detta mönster i all oändlighet?

3097. Visa att om p är ett primtal med $p \ge 5$ så är $p^2 + 2$ inte ett primtal.

3098. Visa att om m och n är heltal med $n \ge m$ så gäller

$$\binom{n}{m} + \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-2} + \cdots + \binom{n-m}{0} = \binom{n+1}{m}.$$

Med $\binom{p}{q}$ avses $\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$, där $p! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot p$ för $p \ge 1$ och $0! = 1$.

3099. Visa att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2^n}+1} = \frac{1}{2}.$$