Årgång 65, 1982

Första häftet

Matematiska uppgifter

3260. På var och en av rutorna på ett schackbräde (med 81 rutor) ligger en papperslapp. Kan man flytta papperslapparna så att samtliga kommer att ligga på en intilliggande ruta, dvs en annan ruta som har ena kanten gemensam med den ursprungliga?

3261. När Arnold började som vikarierande matematiklärare på gymnasiet gillade han s k A-uppgifter, till vilka endast svar skall lämnas. Vid ett prov hade han givit denna uppgift på A-sidan: ”Hur stor area har den rätvinkliga triangel vars hypotenusa är 10 cm och ena katet 6 cm?”

Efter provet råkade Arnold höra en av eleverna (som fått det godkända svaret 24 – Arnold hade bestämt sig för att inte kräva att enheten skulle finnas utskriven) förklara för en kamrat hur han löst uppgiften. ”Först”, sa eleven stolt, ”utnyttjar man Pythagoras sats för att få den andra kateten”. (Arnold kände sig nöjd.) ”Och den blir ju 8”, fortsatte eleven. ”Sedan är det bara att lägga ihop det man har, $8+6+10$ som blir 24.” Då tyckte Arnold inte längre om A-uppgifter. Och han undrade:

Finns det flera rätvinkliga trianglar med heltalssidor för vilka mätetalen för arean och omkretsen är lika?

3262. Bestäm det största tal k sådant att $e^x \geq kx^n$ för alla $x \geq 0$.

3263. Finns det några heltal a, b och c sådana att $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$?

3264. Lös ekvationen

$$\frac{12}{\sqrt{x-8}+9}+\frac{7}{\sqrt{x-8}+4}+\frac{1}{\sqrt{x-8}-4}+\frac{6}{\sqrt{x-8}-9}=0.$$

3265. Beräkna summan av serien

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$

3266. Visa att n^2+n+4 inte är delbart med 9 för något positivt heltal n.

3267. Visa att

$$a+b \leq \sqrt{a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha}+\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha} \leq \sqrt{2(a^2+b^2)}$$

för alla a, $b \geq 0$ och alla vinklar α.

3268. Ett fält har formen av en kvadrat med sidan 700 m. Ett dike delar fältet i två rektangulära delar. Den ena delen har bredden 300 m och är en äng. Den andra delen är plöjd. En person springer 3 m/s på plöjd mark och 4 m/s på ängsmark. Vilken är den kortaste tid han behöver för att ta sig från ett hörn av fältet till det diagonalt motsatta hörnet?

3269. Betrakta mängden M av alla kontinuerligt deriverbara funktioner med $f(0) = 0$ och $f(1) = 1$. Bestäm det största tal A sådant att

$$\int_0^1 |f'(x) - 2xf(x)|\,dx \geq A$$

för alla f i M.

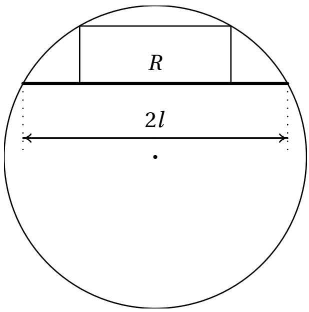
Andra häftet

Matematiska uppgifter

3270. Visa att

$$\sqrt[3]{4(x+y)} \geq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} \text{ för alla } x \geq 0 \text{ och } y \geq 0.$$

3271. I enhetscirkeln dras en korda med längden $2l$. I det mindre segmentet inskrives en rektangel R så att två hörn ligger på cirkeln och två ligger på kordan (se fig). Beräkna den största area som rektangeln kan få.



3272. Adam, Bertil och Caesar har spelat ett spel om pengar. Först vann Adam lika mycket från Bertil som Adam hade från början. I nästa omgång vann Bertil lika mycket från Caesar som Bertil hade kvar efter spelet med Adam. Slutligen vann Caesar lika mycket från Adam som Caesar hade kvar efter spelet med Bertil. Därefter hade faktiskt Adam, Bertil och Caesar lika mycket pengar vardera. En av dem startade med 50 öre. Vem var det?

3273. Ekvationen $x^3+10x^2-118x+p=0$, där p är ett primtal, har en heltalsrot. Bestäm alla möjliga värden på p.

3274. Välj två tal slumpmässigt med återläggning bland talen 1, 2, ..., 1000. Beräkna sannolikheten att talens produkt slutar på 6.

3275. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2+yx=5, \\ y^2+xz=3, \\ z^2+xy=3. \end{cases}$$

3276. Visa att om $z=\cos\theta+i\sin\theta$, $0<\theta<\pi/4$, är en punkt på enhetscirkeln så har det komplexa talet $1+z+z^2+z^3$ argumentet $3\theta/2$.

3277. I kvadraten $\begin{matrix} 5 & 7 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 9 \end{matrix}$ bestående av siffrorna 1, 2, 3, ..., 9 är siffersumman i varje 2×2-hörn lika med 16. Flytta om siffrorna så att siffersumman i vart och ett av 2×2-hörnen blir åtta gånger så stor som mittsiffran.

3278. Låt $a_1, a_2, \ldots$ vara en växande följd av positiva reella tal. Antag att

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=1.$$

a) Visa att

$$\lim_{n\to\infty} a_n/n=0$$

och att

$$\lim_{n\to\infty}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)/n^2=0.$$

b) Visa samma sak utan antagandet om ”växande”.

3279. Visa att

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

inte är heltal för något heltalsvärde på $n\geq 2$.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3280. Visa att det finns oändligt många heltalslösningar till ekvationen

$$\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{y}.$$

3281. Låt punkten M ligga mitt emellan de två punkterna A och B. Visa att för varje punkt C på linjen genom A och B så gäller att

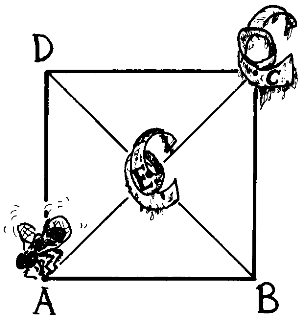
$$|CA|^2 + |CB|^2 = 2|MA|^2 + 2|MC|^2.$$

3282. Visa att kvadratroten ur talet

$$\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ st}}8\underbrace{00\ldots0}_{n\text{ st}}1$$

är ett heltal för varje $n \geq 1$.

3283. En fluga som sitter i A promenerar från bokstav till bokstav längs linjerna i figuren. Varje gång väljs väg helt slumpmässigt. I C och E finns flugpapper. Beräkna sannolikheten att flugans vandring slutar i E.



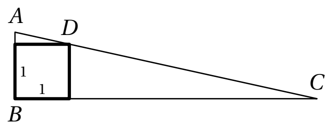
3284. Visa att vart tredje tal i den s k Fibonacciföljden 1, 1, 2, 3, 5, 8, ..., där $F_1 = F_1 = 1$ och $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ för $n > 2$, är jämnt medan resten av talen är udda.

3285. Funktionen $f(x)$ är definierad och kontinuerlig i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Vidare gäller att

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 f^2(x)\,dx = 1.$$

Bestäm alla sådana funktioner $f(x)$.

3286. En kvadrat med sidan 1 cm ligger i en rätvinklig triangel enligt fig. Bestäm längden av AD om sidan AC är 10 cm. (Om Du vill använda numeriska metoder för att lösa problemet, vilket inte är nödvändigt, se t ex P Pohl, ”Enkla numeriska metoder”, Elementa 61 (1978), s 17–23)



3287. Bestäm alla lösningar till kryptaritmparet

$$\begin{array}{r} TO \\ -\,BE \\ \hline OR \end{array} \qquad \begin{array}{r} NOT \\ -\quad TO \\ \hline BE \end{array}$$

om man räknar i basen *nio*. (I en kryptaritm står varje bokstav för ett heltal. Olika bokstäver står för olika siffror.)

3288. En funktion $f(x)$, definierad för alla reella tal x, kallas konvex om det för alla x och y gäller att

$$f(x+y)+f(x-y)\geq 2f(x).$$

Antag att $g(x)$ och $h(x)$ är två positiva funktioner sådana att $\ln g(x)$ och $\ln h(x)$ är konvexa. Visa att $\ln(g(x)+h(x))$ då också är konvex.

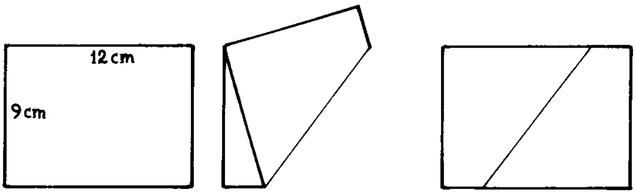
3289. Visa att det inte är möjligt att belasta ett tärningspar så att värdena $2, 3, \ldots, 12$ för ögonsumman har samma sannolikhet.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3290. Bestäm samtliga heltalslösningar till ekvationen $x^4 - y^2 = 7$.

3291. Ett rektangulärt papper viks så att två motstående hörn hamnar på varandra. Hur långt är vecket om rektangelns sidor är 12 cm och 9 cm (se fig)



3292. En av personerna A-son, B-son och C-son talar alltid sanning, en ljuger alltid och en är ”normal”, dvs talar ofta sanning men ljuger ibland. Avgör med ledning av resonemanget i figuren nedan vem som ljuger, vem som talar sanning och vem som är ”normal”.

3293. Visa att för varje naturligt tal $k \leq n$ så är

$$1 + \frac{k}{n} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2}.$$

3294. Visa att för $0 \leq x \leq 1$ gäller $2^{x/2} - 2^{-x/2} \leq x/\sqrt{2}$.

3295. Varje år där årtalet är jämnt delbart med fyra är skottår med följande undantag. De år vars årtal är jämnt delbara med 100 är skottår endast om årtalet även är delbart med 400. Nyårsdagen 1984 infaller på en söndag. Kan Nyårsdagen i något nytt århundrade (2000, 2100, 2200, etc) infalla på en söndag?

3296. Beräkna

$$\lim_{x \to 10} \left(1 + 10^x - x^{10}\right)^{1/(x-10)}.$$

3297. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ och $b_1, b_2, \ldots, b_n$ vara två talföljder som är *similärt ordnade*, dvs $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ för alla $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Visa att då är

$$\frac{\sum_{j=1}^n p_j a_j}{\sum_{j=1}^n p_j} \cdot \frac{\sum_{j=1}^n p_j b_j}{\sum_{j=1}^n p_j} \leq \frac{\sum_{j=1}^n p_j a_j b_j}{\sum_{j=1}^n p_j}$$

för alla talföljder $p_1, p_2, \ldots, p_n$, där $p_j > 0$ för $j = 1, 2, \ldots, n$.

3298. Man kastar ett mynt som ger ”krona” med sannolikheten p tills man för första gången fått två ”krona” i rad. Bestäm genomsnittliga (förväntade) antalet kast.

3299. Visa att $(2a - 1)\sin x + (1 - a)\sin\big((1 - a)x\big) \geq 0$ om $0 \leq a \leq 1$ och $0 \leq x \leq \pi$.