Årgång 71, 1988

Första häftet

Matematiska uppgifter

3500. På redaktionsbordet ligger tre askar i rad. En av dem innehåller en tusenkronorssedel medan de båda andra är tomma. Askarna är försedda med etiketter enligt följande:

DENNA ASK ÄR TOM	DENNA ASK INNEHÅLLER 1000 KR	DEN MITTERSTA ASKEN ÄR TOM

Tyvärr är minst två av dessa påståenden felaktiga. I vilken ask ligger sedeln?

3501. Per har fyra tärningar A, B, C och D. Av dessa är A symmetrisk, B och C skeva, båda med sannolikheterna $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}$ för utfallen 1 till 6, medan motsvarande sannolikheter för D är helt okända. Per kastar två tärningar i taget och noterar utfallet 1 om summan från de båda tärningarna är 7, utfallet 2 om summan är 2 eller 8, utfallet 3 om summan är 3 eller 9 osv. Vilka blir utfallssannolikheterna om

a) A och B används?
b) A och D används?
c) B och C används?

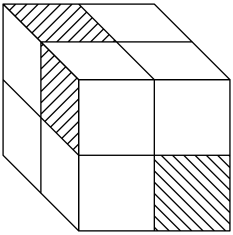
3502. Från en vanlig kortlek med 52 kort dras två kort i taget. Om båda är röda (hjärter eller ruter) eller om båda är svarta (spader eller klöver) lägger man tillbaka *ett* rött kort i leken (reservkort finns om de ordinarie korten inte räcker till). Får man däremot ett kort av varje färg ersätts de av *ett* svart kort. Dragningen fortsätter på detta sätt tills endast ett kort återstår i leken. Är detta rött eller svart?

3503. Lös ekvationen

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}} = x.$$

3504. Om talet 2178 skrivs i omvänd ordning får man talet 8712, som är exakt 4 gånger så stort som det förstnämnda. Visa att det däremot inte finns något heltal som blir exakt dubbelt så stort när det skriv i omvänd ordning.

3505. Skär tre snitt parallellt med sidorna i en kub med sidan 1 som figuren visar. Visa att de tre skuggade sidornas areor inte alla kan överstiga 1/4.



3506. Om man vet att $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = \arcsin\frac{1}{c}$ (dvs den funktion som uppfyller $\sin(\arcsin x) = x$), vad blir för godtyckliga tal $A < B$ integralen

$$\int_A^B \frac{x\,dx}{\sqrt{(B^2-x^2)(x^2-A^2)}}?$$

3507. AB är en diameter och CD en korda i en cirkel. En ny cirkel uppritas med CD som diameter varvid AB delas i tre lika delar av den senare cirkelns periferi. Beräkna förhållandet mellan de båda cirklarnas areor.

3508. I en rätvinklig triangel är två kvadrater inskrivna. Kvadraten A har två sidor längs kateterna och ett hörn på hypotenusan medan kvadraten B har en sida längs hypotenusan och ett hörn på varje katet.

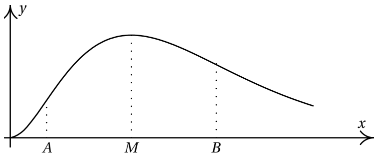
a) Visa att kvadraten A alltid är större än kvadraten B.

b) Visa hur man med användande av enbart passare och linjal kan skriva in kvadraterna i triangeln (inskrivning av kvadraten B är förmodligen avsevärt svårare än inskrivning av kvadraten A).

3509. Figuren visar kurvan $y = x^n e^{-x}$, $x > 0$. För $n \geq 1$ har kurvan två inflexionspunkter, för $x = A$ och för $x = B$, samt en maximipunkt för $x = M$. (Med en inflexionspunkt P menas att kurvan i P övergår från att vara konvex till att vara konkav eller omvänt. Bl a innebär detta att kurvan skär sin tangent i P.)

a) Visa att M är aritmetiskt medium till A och B.

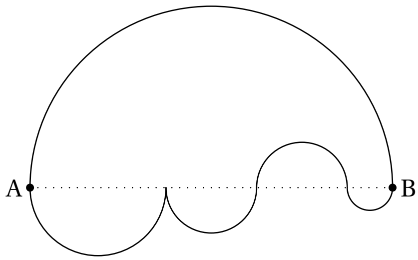
b) Visa att $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_M^2}{y_A y_B} = e$, där y_A, y_B, y_M är funktionsvärdena för resp A, B och M.



Andra häftet

Matematiska uppgifter

3510. Mellan orterna A och B går två vägar. Den ena utgörs av *en* halvcirkel, den andra är sammansatt av *flera* halvcirklar som figuren visar. Vilken väg är kortast?



3511. Arrangera siffrorna 1, 2, …, 9 så att det tal som bildas av de två första siffrorna är delbart med 2, det tal som bildas av de tre första är delbart med 3 osv.

3512. Lille Niklas är matematiskt sinnad. När han går ut för att köpa godis brukar han därför fördela en lämplig summa pengar i sina två bakfickor på så sätt att summan alltid är lika stor som produkten av de två delsummorna (i kronor räknat). Om vi fortfarande hade haft kvar 25-öringen kunde Niklas t ex ha stoppat 5 kr i en ficka och 1:25 i den andra. Eftersom den minsta svenska slanten är på 10 öre begränsas hans valmöjligheter väsentligt. Hur många olika summor kan Niklas bära med sig, och hur stor är den största?

3513. Minimi- och maximimått för brev som distribueras av postverket framgår av portotabellen nedan.

a) Vilken är den största tillåtna arean hos ett rektangelformat tunt brev?

b) Vilken är den största tillåtna volymen hos ett cylinderformat brev?

c) Vilken är den största tillåtna volymen hos ett brev som har formen av ett rätblock?

Gäller från den 2 februari 1987

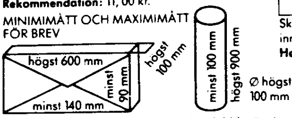
POSTEN **Portotabell – Inrikes brev och paket**

Normalbrev (och vykort) inom Norden		
Vikt högst g	Ej skrymmande	Skrymmande*
20	2,10	I
100	4,20	7,20
250	7,50	10,50
500	11,50	14,50
1000	15,50	18,50

*) Bredare än 250 mm eller tjockare än 30 mm.

Rekommendation: 11,00 kr.

MINIMIMÅTT OCH MAXIMIMÅTT FÖR BREV



Bredd + längd + tjocklek högst 900 mm

Längd + dubbla Ø minst 170 mm, högst 1040 mm.

Paket (19 % moms ingår)		
Vikt högst kg	Vanlig befordran	Ilbefordran
1	18,50	27,50
3	25,50	41,00
5	30,00	49,50
7	36,50	59,50
9	41,50	69,00
12	51,00	83,50
15	61,50	104,50
20	74,00	121,00

Skrymmande paket och paket med ömtåligt innehåll – högre avgift. Fråga på ditt postkontor!
Hemkörning av paket: 35,00 kr.

Ytterligare upplysningar om porton mm får du på ditt postkontor.

BP 2010.87.1

3514. Visa att $2\sin x - x - x\cos x > 0$ för $0 < x < \pi$.

3515. Punkterna A, B och C i ett rätvinkligt koordinatsystem har koordinaterna $(0; 2)$, $(x; 0)$ resp $(0; 1)$. Bestäm det x-värde som gör vinkeln ABC maximal och ange maximivinkeln.

3516. Vid ett skriftligt prov fick Tjelvar, Ulrik och Vidmar samma uppsättning av frågor, som alla skulle besvaras med ”ja” eller ”nej”. Vid rättningen konstaterade man att

(1) varje fråga som både U och V hade besvarat med ”ja” hade också T besvarat med ”ja”

(2) varje fråga som T hade besvarat med ”ja” hade också U besvarat med ”ja”

(3) varje fråga som U hade besvarat med ”ja” hade minst en av de båda andra besvarat med ”ja”.

Visa att Tjelvar och Ulrik hade besvarat alla frågor lika.

3517. Ekvationen $2^x - 1 = x^{100}$ har en positiv rot > 1. Ange denna med en decimals noggrannhet.

3518. Eleverna i en gymnasieklass studerar med hjälp av dator olika aspekter på den harmoniska serien

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

Man studerar bl a delföljder med startterm $\frac{1}{n}$ och beräknar sedan antalet termer, N, som krävs (utöver starttermen) för att summan precis skall överstiga 1, dvs

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+N} \geq 1 \text{ medan}$$
$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+N-1} < 1.$$

Till sin stora förvåning finner eleverna att för stora n-värden gäller $\dfrac{N+n}{n} \approx e$. Förklara varför.

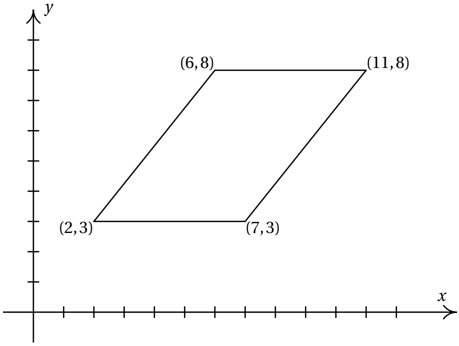
3519. Låt n vara ett positivt heltal större än 1. Betrakta talen n, $n+1$, $\dots$, $2n-1$. Stryk i varje tal alla faktorer 2 så att udda tal erhålls. Visa att de erhållna talen, bortsett från ordningen, utgörs av talen $1, 3, 5, \dots, 2n-1$.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3520. Hos en kvadrat med sidan 1 kapas hörnen så att en regelbunden oktogon bildas. Ange sida och area hos oktogonen.

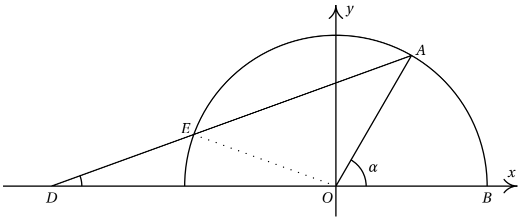
3521. Arnold gick in till fru Lundgren på pastorsexpeditionen och berättade om sin parallellogram: ”Jag ritade den här parallellogrammen i ett koordinatsystem, och se hur det blir: $2+11=13$ och $7+6=13$, summerar jag x-koordinaterna diagonalt får jag samma summa” (se figuren). Fru Lundgren blev naturligtvis intresserad. ”Undrar om det beror på att två av sidorna är parallella med en av koordinataxlarna”, sa hon. Efter att ha tittat på figuren återtog hon: ”Vi undersöker saken, vet jag, det är kanske så där för alla parallellogrammer!” Och Elementas läsare uppmanas nu att genomföra undersökningen.



Arnolds parallellogram. Summan av x-koordinaterna för diagonalt motsatta hörn blir densamma. Gäller detta för alla parallellogrammer?

3522. Archimedes har angett följande metod för tredelning av en given vinkel. Placera ut vinkeln i ett rätvinkligt koordinatsystem med vinkelspetsen i origo som nedanstående figur anger. Vi söker alltså en vinkel som är en tredjedel så stor som vinkeln AOB, dvs av storlek $\alpha/3$. Drag sträckan AD med punkten D på x-axeln. Sträckan skär cirkelbågen i punkten E. Härvid ska avstånden DE och EO vara lika. Visa att vinkeln $EDO = \alpha/3$.

Anm. Vinkelns tredelning är som bekant ett olösligt problem. Uppgiften innebär inte någon motsägelse eftersom vi inte har någon exakt metod för bestämning av punkten D.



3523. Bestäm maximum av $\dfrac{\sin 6x + \cos 4x}{\sin 5x + \cos 5x}$.

3524. För vilka värden på a saknar ekvationen

$$x^6 - x^5 + ax^4 - x^3 + ax^2 - x + a - 1 = 0$$

reella rötter?

3525. Låt n vara ett jämnt positivt tal. Visa att

$$S_n = 1\cdot 2 - 2\cdot 3 + 3\cdot 4 - \ldots + (n-1)n$$

är lika med $n^2/2$.

3526. Visa att

$$\frac{1}{48}k^6 - \frac{11}{48}k^5 + \frac{47}{48}k^4 - \frac{121}{48}k^3 + 4k^2 - \frac{9}{4}k$$

är heltal, för alla heltal k.

3527. För funktionen $f(x,y)$, definierad för alla icke-negativa heltal x och y, gäller följande samband:

(1) $f(0,y) = y+1$

(2) $f(x+1,0) = f(x,1)$

(3) $f(x+1,y+1) = f(x, f(x+1,y))$.

Ange $f(2,2)$ och $f(3,3)$.

3528. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara olika positiva heltal. Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

3529. Vid en lagtävling i schack deltar tre skolklasser med vardera tio elever. Varje elev spelar en match mot var och en av konkurrentklassernas deltagare, dvs totalt 20 matcher. Efter första dagen tävlingar visade det sig att alla deltagare hade spelat exakt 11 matcher. Visa att det går att plocka ut tre elever, en ur varje klass, som har spelat sina tre inbördes matcher.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3530. I min trädgård har jag ett kvadratiskt potatisland omgivet av en gräsremsa med konstant bredd, varför hela området är kvadratiskt. Gräsremsan har arean 301 m^2, medan skillnaden i omkrets hos yttre och inre kvadrater är 28 m. Hur stort är mitt potatisland? Hade problemet varit lösbart om vi inte känt till skillnaden i omkrets men i stället vetat om att kvadratsidorna är hela tal?

3531. För de naturliga talen k, m och n gäller olikheterna $13k < m$, $n < 3k$ och $2m < 11n$. De tre talens summa är 100. Vilka är talen?

3532. I triangeln ABC träffar bisektrisen till vinkeln A sidan BC i D varvid vinkeln $ADC = 60°$. Bestäm förhållandet mellan sidorna AB och AC om $AB = BC$.

3533.
a) Kasta två vanliga symmetriska tärningar en gång var och låt X vara summan av ögonen. Bestäm fördelningen för X.
b) Märk två symmetriska tärningar med 1, 2, 2, 3, 3, 4 resp 1, 3, 4, 5, 6, 8. Kasta dem en gång var och låt Y vara summan av ögonen. Bestäm fördelningen för Y.
c) Finns det andra sätt att märka tärningarna i b) så att fördelningen för Y blir densamma?

3534. Bestäm mängden av reella tal x som uppfyller olikheten

$$\frac{2x^2}{(\sqrt{1+2x}+1)^2} \leq x-1.$$

3535. Sök maximi- och minimipunkterna till funktionskurvan

$$f(x) = e^x - e^{-x} - 2,5x.$$

3536. En triangel ABC är given med en punkt P på sidan AB. Visa hur man med passare och ograderad linjal som enda hjälpmedel (utöver papper och penna) konstruerar en linje, som går genom P och delar triangelytan i två delar med samma area.

3537. a) En svensk lottorad består som bekant av sju tal valda bland talen 1, 2, ..., 35. Hur många rader måste man minst tippa för att vara säker på åtminstone två tal rätt? Vi bortser här från tilläggsnummer.

b) I vissa länder förekommer en variant där en rad består av sex tal valda bland talen 1, 2, ..., 49. Visa att man kan konstruera 19 rader på sådant sätt att spelaren garanteras åtminstone två rätt.

3538. Låt $\kappa(n, r)$ beteckna binomialkoefficienten $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, för heltal n och r, $n > 0$, $0 \leq r \leq n$ ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$). Visa identiteten

$$\sum_{i=n}^{m} \frac{1}{\kappa(p+i, s)} = \frac{1}{s-1}\left(\frac{p+n}{\kappa(p+n, s)} - \frac{p+m+1}{\kappa(p+m+1, s)}\right),$$

där $1 < s < p$ och $0 \leq n \leq m$.

3539. Visa att ekvationen

$$x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1 = 0$$

har två reella rötter, medan de övriga åtta rötterna är komplexa med absolutbeloppet 1.