Årgång 76, 1993

Första häftet

3700. Ett golvur innehåller två kugghjul, A och B, som griper in i varandra. När A har gått 11 varv så har B gått 4 varv så när som på en kugge. När B har gått 13 varv har A gått mer än 36 varv (men färre än 37). När B har gått 19 varv har A gått ett helt antal varv så när som på två kuggar.

Hur många kuggar har de båda hjulen var?

3701. a) Man har ett rutnät med 3×3 kvadratiska rutor. Visa att man kan dra två räta linjer så att det inre av området av varje ruta skärs av minst en rät linje. Generalisera till $n \times n$ rutor. Hur många linjer, som funktion av N, krävs för att alla rutor ska passeras?

b) En kub är uppdelad i $3 \times 3 \times 3$ småkuber. Betrakta en linje som passerar det inre området av kuben. Hur många delkuber kan linjen maximalt passera? Hur många linjer krävs för att samtliga 27 småkuber ska passeras?

3702. Lille Morolf presenterade följande i eget tycke eleganta lösningar vid en provräkning:

(i) $\ln(3+1,5) = \ln 3 + \ln 1,5 = 1,099 + 0,405 = 1,504$,

(ii) $\ln(6+1,2) = \ln 6 + \ln 1,2 = 1,792 + 0,182 = 1,974$,

(iii) $\sqrt{\frac{1}{16}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{16}}+\frac{1}{2} = \frac{3}{4}$,

(iv) $\sqrt{\frac{1}{25}+\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{1}{25}}+\frac{3}{5} = \frac{4}{4}$.

Han blev mäkta förtörnad när hans matematiklärare underkände lösningarna och han protesterade: ”Jag fick ju rätt svar!” Morolfs protester klingade dock ohörda. Hans lärare hade nämligen fått uppslag till nästa provräkning. Vilket förhållande måste råda mellan a och b för att följande samband ska gälla:

a) $\ln(a+b) = \ln a + \ln b$?

b) $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + b$?

3703. En kvadrat och en rektangel har samma area. Man känner kvadratens sida d och rektangelns ena sida r. Konstruera med passare och ograderad linjal som enda hjälpmedel en sträcka med längden s =rektangelns andra sida.

3704. Visa att för alla positiva heltal n gäller

$$\sqrt{\underbrace{1111\ldots}_{2n\text{ st}} - \underbrace{2222\ldots}_{n\text{ st}}} = \underbrace{3333\ldots}_{n\text{ st}}$$

3705. En triangel ABC med arean 1 är inskriven i en cirkel. Antag att $|AB|^2 + |AC|^2 = 4 \cdot |BC|^2$. I B och C dras tangenter till cirkeln. De skär varandra i punkten P. Beräkna arean av triangeln PBC.

3706. Bestäm det största heltal x som gör $\left[\dfrac{x}{10^k}\right]$ ([] betecknar heltalsdelen) till primtal för $k = 0, 1, \ldots, N$ om $10^N < x < 10^{N+1}$. Exempelvis är 3 137, 313, 31 och 3 alla primtal. Här är $N = 3$ men det finns primtalssviter för större värden på N.

3707. Ett polynom $p(x)$ med heltalskoefficienter uppfyller villkoren

$$p(1) = 11 < p(6) < p(13) = 215 < p(17) = 1115.$$

Här saknas värdet på $p(6)$. Bestäm detta värde.

3708. Man har ett rutnät med 5 horisontella rader och 5 vertikala kolonner. I 3 olika slumpmässigt valda rutor placerar man föremål, ett i varje ruta. Om därvid två föremål hamnar i samma rad eller i samma kolonn, sägs det inträffa en koincidens. Bestäm väntevärdet för antalet koincidenser.
(kräver eventuellt kunskaper utöver gymnasieskolans matematikkurs på NT-linjen.)

3709. Bestäm talföljden $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_{k+2} \geq a_{k+1} + a_k$ $(k \geq 0)$, sådan att

$$\frac{10^n}{100^n - 10^n - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^{-kn} \quad \text{för alla } n \geq 1.$$

(kräver eventuellt kunskaper utöver gymnasieskolans matematikkurs på NT-linjen.)

Andra häftet

3710. I nedanstående uppgifter kommer funktionerna $k(n) = 2^n$ och $t(n) = 32n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ till användning.

a) Bestäm räntesatsen $r(n)$ sådan att beloppet 1 växer till $k(n)$ efter $t(n)$ år.

b) Betrakta medelavstånden från solen till planeterna och asteroiden Ceres i förhållande till jordavståndet:

Merkurius	0,387
Venus	0,723
Jorden	1,000
Mars	1,524
Ceres	2,770
Jupiter	5,203
Saturnus	9,539
Uranus	19,182
Neptunus	30,058
Pluto	39,439

Visa att avstånden (utom för en av planeterna – vilken?) kan approximeras med funktionen $d = a + bz$ där z antingen är av typ $k(n)$ eller av typ $t(n)$. Bestäm a och b så att felet är högst 5%. Vad kallas denna lag?

c) På ett bankkonto är räntesatsen r %. Ett innestående kapital fördubblas på t år. Visa att för rimliga räntesatser är produkten $r \cdot t$ approximativt konstant. Formulera med ledning härav en behändig räkneregel för bestämning av ”dubbleringstiden”.

3711. Bestäm det minsta helatalet n sådant att

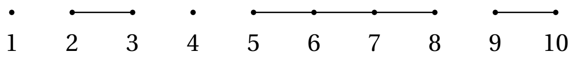
a) $[\log 1] + [\log 2] + [\log 3] + \cdots + [\log n] \geq 1000.$

b) $[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}] + \cdots + [\sqrt{n}] \geq 1000.$

Här betecknar $[x]$ heltalsdelen av x, log står för 10-logaritmen. Hur förändras svaren om man utesluter $[\,]$?

3712. På en tallinje är punkterna 1, 2, 3, ..., 9, 10 markerade. Två personer A och B genomför följande spel. de utför omväxlande sina drag i ordningen $A, B, A, B, \ldots$. Spelet börjar med att A antingen drar ett streck mellan punkterna 1 och 2 eller också lämnar över till B utan att göra någonting. B drar antingen ett streck mellan punkterna 2 och 3 eller så lämnar han över till A utan att göra någonting. A fortsätter så genom att antingen dra ett streck mellan 3 och 4 eller att lämna över till B osv. Spelet är slut efter 9 drag. Strecken bildar nu ett antal sammanhängande kedjor.

Exempel: 3 kedjor



Finns det någon strategi som garanterar att antalet kedjor vid spelets slut är

a) udda,

b) jämnt?

3713. Embla Ambler på Skolverket noterar till sin förvåning att fem elevers centralprov från en skola tillsammans innehåller rätt svar på samtliga 100 uppgifter i matematik. Raskt formulerar hon följande uppgifter till 1994 års prov:

a) Visa att det bland de fem eleverna måste finnas tre som tillsammans har löst åtminstone 60 uppgifter korrekt.

(a) Antag att var och en av de fem eleverna har löst minst 40 uppgifter. Visa att det måste finnas två elever som tillsammans har löst åtminstone 55 uppgifter korrekt.

3714. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} 8x^2 = 18y + 7xy^2 \\ 8y^2 = 18x - 7x^2y \end{cases}$$

i reella tal x och y.

3715. Visa att likheten

$$2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} + \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{10}} = \frac{1}{10}(15+7\sqrt{5})\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

gäller exakt.

Anm. Resultatet visar att $x = \sqrt{5}$ är lösning till ekvationen

$$2\sqrt{5+x} + \sqrt{5-x} = (15+7x)\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{x}{5}}.$$

Om man förutsättningslöst försöker lösa ekvationen råkar man lätt i svårigheter. Om någon läsare har en vacker lösning, skicka den gärna till red för ev publicering i ett kommande nummer.

3716. Låt a_1, a_2, a_3 vara givna reella tal med kvadratsumman 1 och i_1, i_2, i_3 en permutation (ordning) av talen 1, 2, 3. Visa att

$$a_1 \cdot a_{i_1} + a_2 \cdot a_{i_2} + a_3 \cdot a_{i_3} \leq 1.$$

Generalisera resultatet till n tal.

3717. I ett rektangulärt rum med sidorna a och b ligger en rektangulär matta med bredden c. Mattan är placerad så att de fyra hörnen nuddar varsin vägg.

a) Härled en ekvation med mattans längd som lösning.

b) Om $a = 5$, $b = 3$ och $c = 1$, hur lång blir mattan?

3718. Fyra gifta par, alltså åtta personer, placeras slumpmässigt längs ena sidan av ett bord, dock så att kvinnorna får varannan plats. Bestäm sannolikheten att man och hustru i intet fall hamnar intill varandra.

3719. I en cirkel med radien = $\sqrt{10}$ cm är en triangel inskriven. Triangeln har en höjd = 4 cm och denna halveras av en annan höjd. Beräkna triangelns area.

Tredje häftet

3720. Två tal är givna, ett är okänt, det andra är tredje roten ur 31. Det kända talet har det minsta absolutvärdet. Vi bildar produkten av talens summa och talens differens. När produkten multipliceras med 1 500 000 får vi resultatet 1993.

a) Lös den antydda ekvationen.

b) Lösningens inledning stämmer överens med de första siffrorna i en känd konstant. Vi ersätter nu 1993 med andra årtal och kräver att de tre första siffrorna i lösning och konstant ska stämma överens (villkoret på absolutvärdet gäller fortfarande). Vilka årtal är aktuella?

c) Vilket årtal ger den bästa överensstämmelsen räknat i antal korrekta siffor?

3721. Ingjald äger ett blomland som har formen av en rektangel med sidorna 46 och 60 m. För att skydda sina höstblommor mot frost tänker han köpa ett antal dukar av säckväv. Alla dukar är rektangelformade med sidorna 7 och 13 m. Hur många dukar måste Ingjald köpa för att täcka hela blomlandet? Att det här och där kan bli flera lager av säckväv är givetvis inte någon olägenhet.

3722. a) I varje ruta i ett 3×3-rutnät placerar vi någon av siffrorna 0, 1 eller 2 och bildar summan av siffrorna i varje rad och varje kolumn. Är det möjligt att få sex olika summor?

b) Samma procedur för ett 5×5-rutnät med siffrorna 0, 1 och 2 att välja bland. Är det möjligt att få tio olika summor?

3723. En förare kör sin bil med hastigheten 108 km/h på en smal väg där omkörning är omöjlig. Plötsligt upptäcker han, 50 m framför sig, en stillastående bil och börjar genast bromsa med 6 m/s^2. Föraren i framförvarande bil upptäcker samtidigt faran och börjar accelerera. Vilken acceleration krävs för att undvika sammanstötning?

3724. Ett matematikprov innehåller bl a följande uppgift:
Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} (2a+b)(2b+c)((2c+a)=d \\ a+b+c=9 \end{cases}$$

i positiva heltal a, b, c. Bestäm sedan produkten abc.

Adjunkt Ask ger sina elever ett numeriskt värde på d för att uppgiften inte ska bli alltför svår. Hon inser emellertid att det valda d-värdet är mindre lyckat. Reidun och Inger i N3A får olika värden på produkten abc. Kontroll visar att de har hittat var sin korrekt lösning till problemet. Vilket d-värde hade adjunkt Ask valt?

3725. Talföljden $a_1, a_2, \ldots,$satisfierar relationen

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + na_n = \frac{n+1}{n+2},$$

där $n = 1, 2, \ldots$. Bestäm gränsvärdet för $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ när n går mot oändligheten.

3726. Ett pappersark är fyllt med naturliga tal, två på varje rad enligt följande system: Om man på en rad bildar differensen (utan tecken) mellan talen resp bildar summan av dem plus ett får man talen på nästföljande rad. Om exempelvis talen är 3 och 5 på rad k blir talen 2 och 9 på rad $k+1$.

a) På rad 28 står talen 49151 och 90110. Vilka tal står på rad 1?

b) Ge uttryck för talen på rad n om vi har talen a och b, $a < b$, på rad 1.

3727. Mellan sidorna a, b och c i en triangel råder sambandet $a^2 = b^2 + bc$. En av vinklarna är 30°. Bestäm övriga vinklar i triangeln om 30°-vinkeln står mot

a) sidan c,

b) sidan b.

3728. Personerna A_1, A_2, A_3 spelar i ordningsföljden A_1, A_2, A_3, A_1, A_2, $A_3 \ldots$ på följande sätt: Först spelar A_1 mot A_2, vinnaren spelar mot A_3, nästa vinnare mot A_1 osv ända tills en spelare har vunnit över de båda andra i omdelbar följd; denne är hela spelets vinnare. Varje omgång vinns med sanolikheten 1/2.

Bestäm spelarnas vinstsannolikheter.

3729. Visa att ekvationen

$$\sin 7x + \sin 8x = 1,99999$$

inte har någon lösning.

Fjärde häftet

3730. I ett SM-slutspel i basket möttes Alna och Solvik i sju finalmatcher. I den första matchen vann Alna med 93-83. Segermarginalerna i övriga matcher blev i tur och ordning 13, 15, 9, 11, 19 och 5 poäng resp (ingen match fick sluta oavgjord).

Vidare vet man att poängskillnaden mellan lagen räknat över samtliga matcher blev 10. Vilket lag vann den sjunde matchen och tog därmed hem SM-tecknet?

3731. Vid rivningen av Ruskaby skola hittades en illa medfaren lärobok: *Matematik i den högre skolan.* Det mesta av innehållet var tyvärr oläsligt, men i en divisionsuppställning kunde man i alla fall urskilja några siffror. De siffror som inte kunde tydas är här markerade med kryss. Går det att rekapitulera divisionen?

$$
\begin{array}{ccccccccc|cc}
 & & & \times & \times & \times & 3 & \times & \times & & \\
\hline
 & \times & 5 & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\
\cline{10-11}
- & \times & \times & \times & & & & & & & \\
\cline{1-6}
 & & & \times & \times & \times & & & & & \\
 & & - & 3 & \times & \times & & & & & \\
\cline{3-7}
 & & & & \times & 7 & \times & & & & \\
 & & & - & \times & \times & \times & & & & \\
\cline{4-9}
 & & & & & & & \times & \times & & \\
 & & & & & & - & \times & 3 & & \\
\cline{7-9}
 & & & & & & & & 0 & & \\
\end{array}
$$

Anm. Uppställningen har moderniserats något: liggande stolar var givetvis inte tillåtna i Ruskaby skola.

3732. Här kommer ett badkarsproblem i en ny tappning. En bassäng är försedd med tre påfyllningskranar A, B,C och tre tappkranar D, E, F. Kapaciteten varierar mellan kranarna, vilket framgår av följande uppgifter.

Om kranarna A, B och F är öppna fylls bassängen på 210 min,
om B, C och E är öppna fylls den på 126 min,
om A, C och Där öppna fylls den på 35 min och om A, B, C, D och F är öppna tar det 90 min.

Om A, D, E, och F är öppna töms en fylld bassäng på 45 min. Hur lång tid tar det i bästa fall att fylla, alternativt tömma, bassängen?

3733. a) Tre punkter placeras i en kvadrat med sidan 1 (i det inre eller på periferin). Punkterna utgör hörn i en triangel med sidorna a, b, c. Visa att $a^2 + b^2 + c^2 \leq 4$.
b) Vi modifierar förutsättningarna i a) genom att i stället placera punkterna i en cirkel med radien 1. Visa att $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9$.

3734. Hur många positiva heltal har siffror i

a) strängt växande ordningsföljd,
b) strängt avtagande ordningsföljd?

c) Hur många 9-siffriga positiva heltal har siffror i växande ordning? Här tillåter vi exempelvis 777777777 och 244444558.

3735. Funktionen

$$f(x) = x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x + \frac{a}{x}} + \frac{c}{x + \frac{a}{x} + \frac{b}{x + \frac{a}{x}}}$$

är definierad för $x > 0$. Bestäm funktionens minivärde när

a) $a = 4$, $b = 16$, $c = 64$;

b) $a = 4$, $b = 36$, $c = 64$.

c) Hur förändras minivärdet när b varierar för $a = 4 < b < c = 64$?

3736. I triangeln ABC är vinkeln B 135° och sidan AB 2 cm. M är mittpunkten på BC. Beräkna triangelns area då vinkeln MAC är så stor som möjligt.

3737. Det gäller att

$$\begin{array}{lr}
\frac{1}{89} = & 0,00112358\\
 & 13\\
 & 21\\
 & 34\\
 & 55\\
+ & ---\\ \hline
 & 0,01123595505---
\end{array}$$

där det uppträder successiva termer i Fibonaccitalföljden $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Förklara detta.

3738. Rowan är anställd vid ett dataföretag i Stockholm med filialer i Uppsala och Västerås. Under oktober 1993 arbetade han samtliga dagar utom de två sista, 30 och 31 oktober, alltid en dag i taget på varje ort. Om han en dag arbetade exempelvis i Uppsala tog han på kvällen tåget till antingen Stockholm eller Västerås. Också den 29 oktober gjorde han en sådan tågresa efter avslutat arbete, dock denna gång för att fira helg i någon av de båda andra städerna. Han konstaterade nu att han gjort 7 resor mellan Stockholm och Uppsala i endera riktningen, 10 resor mellan Stockholm och Västerås samt 12 resor mellan Uppsala och Västerås (den avslutande helgresan inräknad).

a) Hur många dagar arbetade Rowan i Västerås?

b) Antag att han arbetade i Stockholm den 1 oktober. Var tillbringade han helgen?

3739. a) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n! \quad \text{för } n \geq 1$$

$\left(n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right).$

b) Visa också att

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (k+x)^n = n! \quad \text{för varje } x.$$