Årgång 77, 1994

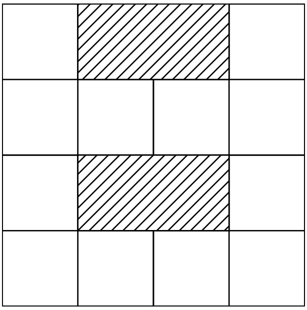
Första häftet

3740. Så här års kan man konstatera att

$$\text{TRANA} + \text{LÄRKA} = \text{VÅRLÅT}.$$

Om varje bokstav står för en bestämd siffra, hur mycket är då en TRAST värd?

3741. Varför inte en uppgift som handlar om Hilbertrum? I sin villa har Hilbert en hall med rektangulärt golv täckt av 90 kvadratiska stenplattor, 9 rader med 10 plattor i varje. Han har emellertid tröttnat på stengolvet och har därför köpt 45 identiska linoleumskivor som var och en täcker precis två stenplattor.



Hilbert funderar över hur han ska lägga skivorna. Genom att placera vissa skivor på längden och andra på bredden är det möjligt att bilda olika mönster.

Hustrun Hypatia har sin uppfattning klar vad mönstret beträffar. I ett obevakat ögonblick limmar hon fast fyra av skivorna. När Hilbert upptäcker tilltaget noterar han till sin irritation att det inte längre finns några valmöjligheter: de 41 återstående skivorna kan bara läggas på ett sätt.

Kan du upprepa Hypatias bedrift att placera fyra skivor så att ett entydigt mönster framtvingas?

Observera, som jämförelse, att två skivor bestämmer mönstret entydigt på ett golv av storleken 4×4 (figuren).

3742. a) Visa att ekvationen

$$x + y + z = 1000$$

saknar lösningar, om vi kräver att x, y, z ska vara tresiffriga positiva heltal, samt att samtliga nio siffror $1,2,\ldots,9$ ska användas.

b) Lös ekvationen

$$x! + y! + z! = xyz$$

där x, y, z är positiva heltal och xyz är det tresiffriga heltal som har siffrorna x, y, z (i denna ordning).

3743. I den binära 10-siffriga följden 0101110001 förekommer de åtta möjliga tripplarna 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 vardera en gång. Hur många binära 10-siffriga följder finns det med denna egenskap?

3744. Låt F beteckna arean av en triangel T med sidorna a, b och c.

a) Visa att

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{K^2 - 2L}$$

där $K = a^2 + b^2 + c^2$ och $L = a^4 + b^4 + c^4$.

b) Bilda uttryck för medianerna i T som funktioner av a, b, c.

Ett "plattvirus" antas alltid ha formen av en triangel men kan plötsligt ändra utseende. Den nya triangelns sidor är lika med medianerna i den föregående. Man kan visa att det alltid är matematiskt möjligt att omforma triangeln på detta sätt.

Antag att vi startar med triangeln T_0. En första förändring ger triangeln T_1, en andra ger triangeln T_2. Till triangeln T_i associerar vi mätstorheterna a_i, b_i, c_i, F_i, K_i och L_i.

c) Beräkna $\frac{K_1}{K_0}$, $\frac{L_1}{L_0}$ och $\frac{F_1}{F_0}$.

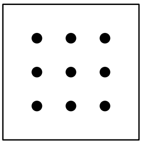
d) Visa att triangeln T_2 är likformig med T_0. Triangeln T_1 är däremot inte likformig med T_0, utom i ett fall. Vilket?

3745. Polynomet $x^3 - 8x^2 + 5x + 7$ har nollställena a, b och c. Bestäm

a) $a^2 + b^2 + c^2$;

b) $a^4 + b^4 + c^4$.

3746. I en kvadrat med sidan 4 inprickas nio punkter så som figuren visar. Man väljer slumpmässigt två av de nio punkterna och drar en rät linje genom dem. Härigenom delas kvadraten i två delar.



a) Bestäm sannolikheten att delarna är lika stora.

b) Bestäm väntevärdet för skillnaden mellan den större delens area och den mindre delens.

c) Utför ovanstående uppgifter på en kvadrat med sidan 8 med $7 \cdot 7 = 49$ punkter (placerade som de inre ruthörnen på ett schackbräde).

3747. I fyrhörningen $ABCD$ är vinklarna vid A och B båda $= 90°$. Vidare är $|AD| = |CD|$ och $|AB| = 1$. Bisektrisen till vinkeln D skär AB i E. Beräkna $|AE|$ då $|DE|$ antar sitt minsta värde.

3748. Bestäm det största värdet på y för vilket

$$(y-1)^2 + (x+1)^2 \geq x(3y+1)$$

gäller för varje $x \geq 0$.

3749. a) I en matematisk tidskrift har vi hittat följande uppgift:

”I Sjuland har var och en av de 15 städerna direkt tågförbindelse med exakt 7 andra städer. Visa att man kan åka tåg, med eller utan byten, från var och en av städerna till varje annan stad.” Här är det något som inte stämmer. Vad är det som är fel?

b) Lös den citerade uppgiften under följande förutsättningar. Antag att 1 stad har direkt förbindelse med exakt 8 andra städer, 6 städer har direktspår till exakt 6 andra städer och 8 städer har direktspår till exakt 7 andra städer.

c) Vi modifierar förutsättningarna som givits i b): ”6 städer har direktspår till exakt 6 andra städer” ändras till ”6 städer har direktspår till exakt 7 andra städer”.

Går det fortfarande att åka tåg hur som helst mellan städerna?

Andra häftet

3750. Mellan Nagrasaki och Hitodito går ett dubbelspår för tågtrafik. Det är intensiv pendeltrafik mellan de båda städerna. Varje kvart dygnet runt (0.00, 0.15 osv) avgår ett tåg i vardera riktningen. Det tar 2 h 55 m att resa från N till H men 3 h 25 m att resa från H till N beroende på skillnader i spårkvalitet.

a) Kl 12.02 kontrollerar övertågmästaren trafiken via datorn. Hur många tåg befinner sig samtidigt i trafik mellan städerna?

b) En pendlare från N räknar alla mötande tåg på vägen till arbetet i H. Hur många tågmöten noterar han? Hur många mötande tåg räknar han in på hemvägen? Hur många minuter är det mellan tågmötena?

c) Övertågmästaren startar sin helikopter i N kl 12.05 och anländer tilll H kl 13.05. Hur många tåg i riktning mot H passerar hon på vägen?

Vi förutsätter att tågen såväl som helikoptern går med konstant hastighet samt att uppehåll längs linjen inte förekommer.

3751. På rävfarmen Foxy Garden är de 250 rävarna antingen blå eller gula. Somliga djur har svans, andra är utan.

Man vet att

40% av alla blå rävar är honor,
30% av alla svanslösa rävar är blå,
25% av alla honor saknar svans,
20% av rävarna utgörs av gula,svanslösa hannar,
40% av rävarna är blå,
en tredjedel av alla blå hannar är svanslösa, en tredjedel av alla svanslösa honor är blå.

Hur många gula hannar har svans?

3752. I staden Romanova är gatusystemet rätvinkligt med lika stora kvarter: kvadratiska med sidan 1 stadion(=1/8 romersk mil= 184,97 m).

På kartan är gatuhörnen angivna med heltalskoordinater i ett koordinatsystem med rådhustrappan i origo. Vid resor inom staden förflyttar man sig alltid parallellt med koordinataxlarna och reseavståndet mellan origo och hörnet (3; 7) exempelvis är $3+7=10$ stadier.

Agrippina bor ett kvarter från rådhustrappan i punkten A, säg, med koordinaterna $(-1;0)$.Hon har tre favoritrestauranger, Brutus (B), Claudius (C) och Diocletianus (D),alla belägna vid gatuhörn i den nordöstra delen av staden. Detta betyder att restaurangerna är belägna i punkter med positiva koordinater (ingen är = 0).

Följande avstånd gäller:

$$|AB|=12; \quad |AC|=5; \quad |AD|=8;$$
$$|BC|=9; \quad |BD|=4; \quad |CD|=7.$$

Var ligger de tre restaurangerna, om Brutus ligger längst österut?

3753. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} xyz+u &= 41 \\ yzu+x &= 167 \\ zux+y &= 113 \\ uxy+z &= 71 \end{cases}$$

i naturliga tal x, y, z, u.

3754. Betrakta primtalsföljden 2, 3, 5, 7, ... och låt $a(p)$ ange ordningsnumret för primtalet p. Vi har alltså $a(2)=1$, $a(3)=2$, $a(5)=3$ osv.

Nedanstående regler ska gälla för alla primtal i en sluten följd.

a) Bestäm produkten av konstanten 1,24 och ett valt primtal p. Dela resultatet med den naturliga logaritmen till p. Stryk alla decimaler. Återstående heltal ska ange ordningsnumret $a(p)$. För vilka primtal gäller denna regel?

b) Regeln i a) gäller fram t o m primtal nr a_0 säg. Modifiera konstanten så att ovanstående regel gäller för en följd av primtal startande med nr a_0+1. Hur många primtal fungerar regeln för i detta fall?

3755. I talet 132358 är första siffran strängt mindre än de övriga siffrorna och den sista siffran strängt större än de övriga. Hur många av de sexsiffriga decimala talen 000000, 000001,..., 999999 har denna egenskap?

3756. Triangeln ABC är given. Genom inskrivna cirkelns medelpunkt dras en transversal parallell med AC som träffar AB i D och BC i E. Visa att $|DE| = |AD| + |EC|$.

3757. Varje punkt (a, b, c) i det tredimensionella rummet tilldelas ett visst värde $f(a, b, c)$. Man vet att

$$f(a, b, c) + f(a, d, b) + f(d, b, a) = 3 \quad \text{för alla } a, b, c, d.$$

a) Bestäm $f(1, 2, 2)$.
b) Bestäm $f(1, 2, 3)$.

3758. Här är en klassiker. *Givet:* En spetsig vinkel med hörn i punkten A och en punkt P någonstans i det inre av vinkelområdet. Drag genom P en linje som skär vinkelbenen i punkterna B och C. Hur ska linjen dras för att arean av triangeln ABC ska bli så liten som möjligt? Hur bestämmer man linjens läge om man bara har tillgång till passare och ograderad linjal? Är i detta fall också sträckan BC minimal?

3759. Låt $n \geq 1$ vara ett heltal och binomialkoefficienten

$$b(n) = \binom{2n}{n}.$$

a) Visa att $b(n)$ är ett jämnt tal.

Låt $e(n)$ vara definierad så att $2^{e(n)}$ är den största heltalspotens av 2 som jämnt går upp i $b(n)$. Skriv n på binär form:

$$n = a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + \ldots + a_{k-1} \cdot 2 + a_k,$$

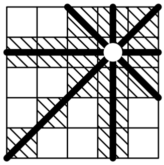
där $a_0 = 1$ och $a_i = 1$ eller 0 för $i = 1, 2, \ldots, k$.

b) Uttryck $e(n)$ med hjälp av $a_0, a_1, \ldots, a_k$.
c) Vad är $e(n)$ om $n = 987654321$?
d) Låt $m \geq 1$ vara ett heltal. Bestäm $e(n)$ för $n = 2^m$ och för $n = 2^m - 1$.

$\left(\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!},\ n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.\right)$

Tredje häftet

3760. Givet: en kvadratisk spelplan med $n \times n$ rutor och en uppsättning spelbrickor.



Om en spelbricka placeras i en ruta sägs den täcka alla rutor i samma rad och samma kolonn, inklusive rutan den står på, samt alla rutor i diagonalerna som utgår från rutan (se figuren)

a) Visa att två brickor tillsammans kan täcka varje ruta på ett 4×4-bräde.

(a) Visa att två brickor tillsammans inte kan täcka varje ruta på ett 5×5-bräde.

(b) Visa att tre brickor tillsammans kan täcka varje ruta på ett 6×6-bräde.

3761. a) Visa identiteten

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

genom att tolka de ingående uttrycken geometriskt.

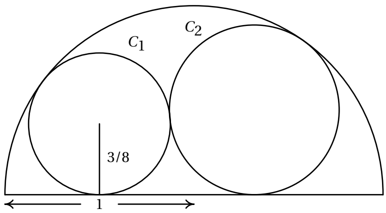
b) Antag att a och b båda är positiva. Hur stor del av $(a+b)^3$ kan $3a^2b$ maximalt uppta?

3762. Lös ekvationen

$$x^2 + (xy)^3 + (xyz)^4 + (xyzu)^5 = 1305$$

i naturliga tal x, y, z, u.

3763. Två cirklar C_1 och C_2 är inskrivna i en halvcirkel med radien 1 så att C_1 och C_2 tangerar varandra på sätt som framgår av figuren. Radien till C_1 är $3/8$. Vilken radie har C_2?



3764. a) Heltalen a, b, c är sådana att talet $5a - 4b - c$ är delbart med 7. Visa att talet $6a + 5b - 4c$ också är delbart med 7.

b) Antag att inget av heltalen a, b, c är delbart med 7. Bilda linjära uttryck av typen $x \pm y$ och $x \pm y \pm z$, där x, y, z står för nämnda heltal tagna i godtycklig ordning. Visa att det finns ett linjärt uttryck av givet slag som är delbart med 7.

Exempel: Om talen är 8, 9 och 29, är såväl $29 - 8$ som $29 + 8 - 9$ delbart med 7.

3765. Pelle och Måns startar samtidigt i var sin ände A resp B av en simbassäng. När Pelle har simmat 30 m möts de för första gången och när Måns har simmat 120 m möts de för andra gången. Båda simmar med konstant hastighet.

Var befinner sig Pelle när Måns har simmat 6 bassänglängder?

3766. a) Europa Top 12 i bordtennis är en tävling för Europas tolv bästa spelare där alla möter alla. En dag kan man i en tidning läsa att spelarna A, B,..., L har spelat följande antal matcher, 11, 11, 11, 10, 10, 10, 10, 9, 7, 7, 5, 5 matcher resp.

Visa att uppgiften inte kan vara korrekt.

b) Dagen efter Sveriges sista match i fotbolls-VM 1994 besökte de kvarvarande spelarna en nattklubb, vissa av dem i sällskap med fru eller flickvän. Efteråt konstaterade man att varje spelare hade dansat med ett udda antal damer. Varje dam hade i sin tur dansat med ett udda antal spelare.

Visa att gruppen av spelare med damer bestod av ett jämnt antal personer.

3767. Antag att punkterna A_1, A_2, A_3 och A_4 i planet utgör hörn i en konvex fyrhörning (vilket innebär att diagonalerna skär varandra i en inre punkt). Vi förutsätter att alla x-koordinater är olika och likaså att alla y-koordinater är olika. Låt k_{ij} beteckna lutningen av linjen genom A_i och A_j samt låt (a,b,c) beteckna produkten $(a-b)(a-c)(b-c)$.

Visa att uttrycket

$$(k_{12},k_{13},k_{14})\cdot(k_{21},k_{23},k_{24})\cdot(k_{31},k_{32},k_{34})\cdot(k_{41},k_{42},k_{43})$$

är positivt.

3768. Låt A_n vara mängden av hela tal $1,2,\ldots,n$ och a_n antalet delmängder (med minst ett element) av A_n som inte innehåller två på varandra följande tal. För exempelvis $n=5$ har vi bl a $\{1\}$, $\{2\}$, $\ldots$, $\{5\}$; delmängden $\{1,3,5\}$ är tillåten men inte $\{2,3\}$ eller $\{1,2,4\}$.

Bestäm en rekursionsformel för a_n samt ange a_{10}.

3769. I var och en av 800 fläckar sås 3 tallfrön. Efter ett år registreras antalet tallplantor. Resultat:

Antal plantor	Antal fläckar
0	180
1	402
2	141
3	77

Vilka hade frekvenserna varit om i stället 2 frön hade såtts per fläck? Det är känt att i ungdomsfasen närstående plantor ej påverkar varandra.

Fjärde häftet

3770. Tjejmeniens parlament består av två kamrar, en kvinnlig och en manlig, med egna sessionssalar. I vardera salen är sittplatserna ordnade i kvadratisk formation med lika många rader som kolonner. Det är 644 fler kvinnor än män. I den nya parlamentsbyggnaden som är under uppförande kommer samtliga ledamöter, kvinnor och män blandade, att rymmas i en och samma sal. Intressant nog kan stolarna fortfarande placeras i kvadratisk formation. Hur många kvinnor och män sitter i landets parlament?

3771. Vilket tal är störst, 4711^{4711} eller $4710^{4711} + 4711^{4710}$?

3772. Ruskaby skolbibliotek renoverades 1991, vilket medförde att anslagen till bokinköp kraftigt minskade under åren som följde. För 1991 var anslagen 10 000 men minskade med a procent till 1992. Från 1992 till 1993 minskade beloppet med b procent och från 1993 till 1994 med c procent. Talen a, b, c är alla heltal och bildar en aritmetisk följd ($a - b = b - c$). Senare visade det sig att anslagen skulle ha reducerats i ordningen c, b, a. Tack vare detta misstag av en handläggare på kommundelsförvaltningen tjänade skolan 3000 kr. Bestäm procentsatserna a, b, c.

3773. Lös ekvationerna

a) $(x+1)^2 + \sqrt{x}(2x+1) = 43,$

b) $2\sin x + 2\cos x - 4\sin x\cos x = 1 \quad \text{för } 0 \le x \le \pi.$

Kan lösandet av a) ge idéer om lösandet av b)?

3774. Låt $S_n = x^n + y^n + z^n$ där x, y, z är reella tal som uppfyller $x + y + z = 0$.

a) Visa att $\dfrac{S_5}{5} = \dfrac{S_2}{2} \cdot \dfrac{S_3}{3}$.

b) Finns det någon annan uppsättning av heltal (t, u, v), sådan att $\dfrac{S_t}{t} = \dfrac{S_u}{u} \cdot \dfrac{S_v}{v}$?

3775. Ett kvadratiskt bräde med 5×5 rutor målas i fem olika färger så att varje färg förekommer på exakt fem olika rutor. Visa att det alltid, hur än målningen har utförts, finns minst en rad, vågrät eller lodrät, som innehåller åtminstone tre olika färger.

Hur kan resultatet generaliseras till $n \times n$ rutor?

3776. På en karta är en stor lantegendom inritad i första kvadranten i ett koordinatsystem. Egendomen begränsas av de positiva x- och y-axlarna men kan i övrigt betraktas som obegränsad. Ägaren har slutit avtal med kommunen om att få vattenledningar dragna till två tappställen, placerade i punkterna (3; 3) och (3; 9). Enligt avtalet gäller:

1) En huvudledning ska dras rätlinjigt i lämplig riktning från origo.
2) Från huvudledningen dras stickledningar till tappställena, parallellt med någon av axlarna.
3) Kommunen svarar för dragning av ledningar, men får i gengäld för varje dragen stickledning ett kvadratiskt markområde med sidan = stickledningens längd. Ägaren får själv bestämma i vilken riktning huvudledningen ska dras. Hur ska huvudledningen dras för att minimera arean av avstådd mark
   a) om stickledningar dras parallellt med x-axeln?
   b) om stickledningar dras parallellt med y-axeln?
   c) Antag att stickledningarna hade dragits vinkelrätt mot huvudledningen. Hur skulle dragningen av denna ha skett i så fall?

   I samtliga fall ska arean av överlåten mark anges.

3777. På en bokauktion har Tom och Tim köpt 20 skilda uppslagsverk om totalt 40 band. De vill nu dela upp böckerna sinsemellan så att de får 20 volymer var utan att något flerbandsverk splittras. Kan uppdelningen garanterat ske på önskat sätt om man vet att alla verk innehåller färre än 20 band?

3778. I en rätvinklig triangel ABC dras höjden BD mot hypotenusan AC. Bisektrisen till vinkeln ADB skär sidan AB i punkten P, medan bisektrisen till vinkeln BDC skär sidan BC i punkten Q.

Visa att $|PB| = |BQ|$.

3779. a) Viktor singlar en symmetrisk slant n gånger ($n > 1$). Om utfallet är x st krona så får han $100x$ kr av Ulrika om x är ett jämnt tal, medan han får betala $100x$ till Ulrika om x är udda. Är detta spel rättvist, dvs kommer spelet att gå jämnt ut i det långa loppet?

b) Antag att n är ett udda tal. Låt d vara den absoluta differensen mellan antalet krona x och antalet klave $n - x$. Nu får Viktor $100x$ kr om $d = 1, 5, 9, 13, \ldots$ medan han får betala samma summa om $d = 3, 7, 11, 15, \ldots$. Är detta spel rättvist?