Årgång 80, 1997

Första häftet

Matematiska uppgifter

3860. Om varje bokstav står för en bestämd siffra, finn lösningen till ekvationssystemet

$$\begin{cases} MATTE = KUL \cdot JU \\ X \cdot X \cdot DUE = ETT. \end{cases}$$

3861. Lotten har vunnit en summa pengar på bingo. Då hon är en generös natur bestämmer hon sig för att ge alla pengarna till sina bröder. Hon ger 100 kr till den äldste plus 1/10 av återstoden; hon ger 200 kr till den näst äldste plus 1/10 av resten; den tredje får 300 kr plus 1/10 av det som då återstår. Lotten fortsätter på detta sätt tills pengarna är slut. Efteråt konstaterar bröderna förvånat att alla har fått lika mycket. Hur mycket hade Lotten vunnit och hur många bröder har hon?

3862. Lös ekvationssystemet $2(xy)^x + 2(xy)^y = 3x^x y^y = 6x^y y^x$ i reella tal x, y.

3863. Två cirklar med radier 1 och r, där $r < 1$, skär varandra i punkterna A och B på sådant sätt att sträckan AB bildar diameter i den mindre cirkeln. Linjen som passerar genom båda cirklarnas medelpunkter skär cirklarna i fyra punkter. Låt P och Q vara de två skärningspunkter mellan linje och cirklar som ligger på det största avståndet från varandra; P ligger på den större cirkeln och Q på den mindre. För vilket värde på r är avståndet PQ maximalt?

3864. Ett tresiffrigt tal är en multipel av ett kvadrattal. Det senare talet erhålles om vi stryker första siffran i det förra talet och tar de två sista siffrorna i omvänd ordning. Vilka är de båda talen?

3865. Triangeln ABC är rätvinklig. På kateten AC väljs punkten P och på hypotenusan AB punkten Q så att $|AQ| = |AC|$ och så att triangeln APQ har samma area som fyrhörningen $PQBC$. Visa att $2|PQ| = |AB|$.

3866. En följd med n siffror består av idel 0:or och 1:or. Bestäm som funktion av N det minimala antalet delföljder med ett jämnt antal 1:or.

Exempel för $n = 6$*:* Följden $110_1 10_2 1$ innehåller nio delföljder (är detta minimalt?) av önskat slag:

$$
\begin{gathered}
11,\ 110_1,\ 110_1 10_2 1,\\
10_1 1,\ 10_1 10_2,\\
0_1,\ 0_1 10_2 1,\\
10_2 1,\\
0_2.
\end{gathered}
$$

(Nollorna har försetts med index för att underlätta identifieringen av sviterna.)

3867. A och B genomför följande spel. A inleder med att kasta en vanlig tärning en gång. Om A får en sexa har han vunnit. Om A får något annat är det B:s tur att kasta. Han kastar tärningen upprepade gånger tills han för första gången överträffar A:s resultat. Sedan är det åter A:s tur att kasta. Han håller på tills han för första gången överträffar B:s bästa resultat. På det sättet kastar A och B omväxlande sina serier tills spelet slutar med att någon får en sexa. Denne är då segraren. Vad är sannolikheten att A vinner?

Exempel: Om A startar med en 3:a gäller det för B att få 4, 5 eller 6. Antag att B efter ett antal kast överträffar värdet 3 genom att få en 4:a. Antag vidare att A i nästa kastserie för första gången passerar värdet 4 genom att kasta en 6:a. Detta betyder att A står som slutsegrare.

3868. a) Talen a, b, c uppfyller villkoren $a+b+c=0$ och $a^2+b^2+c^2=1$. Bestäm $a^4+b^4+c^4$.

b) Talen a, b, c uppfyller villkoren $a \geq b \geq c$ samt $a+b+c \leq 1$. Visa att $a^2+3b^2+5c^2 \leq 1$.
Visa vidare att $a^2+4b^2+4c^2$ inte nödvändigtvis är ≤ 1.

3869. I en gymnasieskola med 3 årskurser är 25 elever medlemmar i studierådet.

Man vet att 17 av medlemmarna är skidåkare, 13 är simmare och 8 är tennisspelare. Ingen av dem utövar mer än två sporter. Vidare vet man att 6 elever går i årskurs 1 samt att alla idrottare i de tre nämnda sporterna går i årskurs 2.

Hur många av de 25 eleverna går i årskurs 3?

Hur många av skidåkarna simmar?

Andra häftet

Matematiska uppgifter

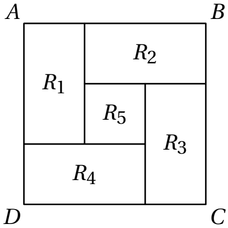
3870. Visa att det finns en regelbunden månghörning inskriven i en cirkel med radien 1 längdenhet som har arean 3 areaenheter.

3871. Beräkna $x+y+z$ om man vet att

$$1/(3-x)+1/(3-y)=2/(3-z) \quad \text{och}$$
$$x^2+y^2=2z^2,$$

samt att x, y, z är skilda reella tal.

3872. Rektangeln $ABCD$ är indelad i fem delrektanglar som figuren visar. Här har delrektanglarna R_1, R_2, R_3, R_4 alla samma area och R_5 är en kvadrat. Visa att också $ABCD$ är en kvadrat.



3873. I en bordtennisturnering deltar n spelare som alla möter alla. Ingen match kan sluta oavgjord. Segraren vinner x_1 matcher och förlorar övriga y_1 matcher, tvåan vinner x_2 matcher och förlorar övriga y_2 osv. Den siste spelaren har alltså x_n segrar och y_n förluster.

Visa att $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=y_1^2+y_2^2+\ldots+y_n^2$.

3874. Låt $p(x)=x^6+ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ vara ett polynom sådant att $p(1)=1$, $p(2)=2$, $p(3)=3$, $p(4)=4$, $p(5)=5$ och $p(6)=6$. Vad är $p(7)$ under dessa förutsättningar?

3875. I ett s k underhållningsprogram i TV medverkar tre pojkar och tre flickor. Varje pojke utser sin favoritflicka och varje flicka sin favoritpojke. Alla val sker under sekretess, dvs först vid slutet av programmet offentliggörs hur de sex deltagarna har valt. Om det då visar sig att en pojke valt en flicka som själv valt denna pojke blir paret bjudet på middag. I bästa fall kan tre par bli bjudna på middag, men det kan naturligtvis inträffa att inte något par bildas. Vad är sannolikheten att den senare händelsen inträffar om vi förutsätter att de sex deltagarna gör sina val helt slumpmässigt och oberoende av varandra?

3876. Är det möjligt att välja konstanterna a, b och c så att

$$(x+a)^2+(2x+b)^2+(2x+c)^2=(3x+1)^2$$

gäller för varje x?

3877. På en ö finns det 45 kameleonter, 10 röda, 15 blå och 20 gula. När två kameleonter av olika färg möts skiftar de båda till den tredje färgen. Om t ex en blå och en gul kameleont möts blir de båda röda.

Är det möjligt att kameleonterna efter ett antal möten alla har samma färg?

3878. Lös ekvationen $\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x = 1/2$.

3879. I en spetsvinklig triangel ABC är vinkeln A 60°. Bilda bisektriserna till de vinklar som bildas av höjderna dragna genom B resp C.

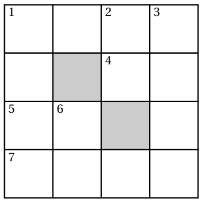
Visa att en av bisektriserna passerar genom den omskrivna cirkelns medelpunkt.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3880. Lös vidstående ”korstal” (som korsord, men med siffror i stället för bokstäver)!

Vågrätt	**Lodrätt**
1. Primtalskub	1. Primtalskvadrat
4. Kvadrat	2. Tre gånger kubikroten ur vågrätt 1
5. Kvadrat	3. Primtalskvadrat
7. Kub	6. Dubbla kubikroten ur vågrätt 7



3881. Per och Nils åkte i var sin bil från Axnäs till Brevik, en sträcka på 45 mil. Från början hade de lika mycket bensin i sina bränsletankar och dessutom medförde de en reservdunk innehållande samma mängd som i vardera tanken. Efter ett tag signalerade Nils till Per att bensinen var slut. Per hade då fortfarande en tredjedel av sin bensin kvar. Efter något räknande fördelade de reservdunkens innehåll på sådant sätt att båda bilarna nådde sitt mål, men just vid ankomsten var båda tankarna tomma.

Dagen därpå fyllde de tankarna helt; Nils tank rymmer 16 liter mer än Pers tank. Dessutom hällde de 10 liter i reservdunken. De startade nu återresan till Axnäs. Så småningom blev de samtidigt stående på vägen pga bränslebrist. De fördelade då bensinen i reservdunken så att de ånyo kom fram till målet just som bensinen tog slut för dem båda. Vi förusätter att bensinförbrukningen för varje bil är konstant oavsett körriktning.

a) Hur många liter rymmer de båda tankarna?
b) Var blev Nils stående på utvägen?
c) Var blev Nils och Per stående på tillbakavägen?

3882. En lärare skriver 18 olika heltal på tavlan. Visa att det bland dessa alltid finns två tal vars differens är delbar med 17. Generalisera detta resultat. Gäller motsvarande för två tals *summa*?

3883. Beräkna arean på den största rektangel som kan skrivas in i en ellips med halvaxlarna a och b. Hur förhåller sig rektanglarnas sidor till a och b?

3884. a) Låt $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ vara en permutation (omordning) av talen $1, 2, \ldots, 15$. Visa att $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdot \ldots \cdot (a_{15} - 15)$ är ett jämnt tal.
Är motsvarande produkt fortfarande jämn om talet 15 byts mot ett godtyckligt positivt heltal n?

b) Polynomet $(1 + x + x^2)^{15}$ kan skrivas på formen $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{30} x^{30}$. Visa att summan $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots + a_{30}$ är ett jämnt tal.
Är motsvarande summa fortfarande jämn om talet 15 byts mot ett godtyckligt positivt heltal n?

3885. Vilket värde har $x^2 + 1/x^2$ om $x + 1/x = 1$? Vilket värde har $x^{33} + 1/x^{33}$ under samma förutsättning?

3886. a) Inuti en liksidig triangel ABC med sidan a längdenheter ligger en punkt P med avstånden 3, 4 resp 5 längdenheter till triangelns hörn. Bestäm sidan a (exakt).

b) Bestäm sidan a om om avstånden från P till hörnen är r, s t. Vilka samband måste råda mellan dessa avstånd för att uppgiften ska ha en lösning?

3887. Emma har fått 97 bollar i fyra olika färger och ett antal skilda storlekar. Om man väljer ut fem bollar av samma färg finns det alltid två bollar av samma storlek. Emma förvarar sina bollar i tre stora lådor. Visa att det i någon låda måste finnas tre bollar i samma färg och samma storlek.

3888. För vilka heltal n är $\sqrt{n - 4\sqrt{n - 43}}$ ett heltal?

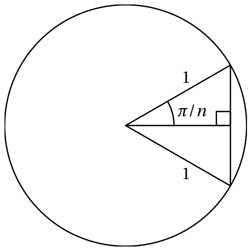
3889. En fotboll har radien R och dess yta består av tolv stycken regelbundna svarta femhörningar och 20 stycken regelbundna vita sexhörningar på sätt som framgår av nedanstående figur 1.

a) Bestäm arean av en sexhörning som funktion av R. Bestäm arean numeriskt för $R = 10{,}5\,\text{cm}$.

b) Fotbollen är förhoppningsvis sfärisk vilket betyder att nämnda månghörningar är ”buktade”. Om vi låter fem- och sexhörningarna vara plana ersätter vi sfären med en 32-sidig figur. Vad blir sexhörningens area i detta fall?

c) Hur kan man utifrån figur 2 komma fram till att antalet fem- och sexhörningar måste vara just 12 och 20?

Figur 1



Figur 2

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3890. Det är förstås alldeles sant att summan av de två udda talen ETT och $ELVA$ är lika med $TOLV$. Inte heller går det att hitta något primtal som ligger mellan TVÅ och TRE. Här står varje bokstav för en siffra; bestäm dessa.

3891. En shejk vill pröva om hans son besitter tillräcklig vishet för att rätt förvalta hans stora förmögenhet. Han visar upp tre påsar som var och en innehåller tre mynt. Mynten är av tre slag: guld, silver och koppar. Varje mynt har en vikt som är ett helt antal gram. Sonen får veta följande:

I den första påsen ligger 2 guldmynt och 1 silvermynt med sammanlagda vikten 41 g.
I den andra påsen ligger 2 silvermynt och 1 kopparmynt med sammanlagda vikten 39 g.
I den tredje påsen är de tre myntens sammanlagda vikt 36 g. Här vet man emellertid inte vilka mynt som ingår.

Hur mycket väger vart och ett av de tre mynten?

3892. Visa att $\overbrace{111\ldots1}^{n\text{ st}}0\overbrace{888\ldots8}^{n\text{ st}}9$ är en heltalskvadrat för varje n. Finns det andra kvadrattal på formen $\underbrace{aaa\ldots a}_{n\text{ st}}0\underbrace{bbb\ldots b}_{n\text{ st}}c$

3893. Vivien och Robert gör en båtutflykt på Themsen. Allt tycks vara frid och fröjd, när plötsligt dimman lägger sig tät över floden. Sikten är obefintlig och lätt panikslagna försöker de vända båten för att ta sig i land. Men de inser snart att de helt har kommit ur kurs.

De befinner sig mitt i floden och har 100 m till vardera stranden och vill på snabbaste sätt komma på fast mark. Vivien, som håller huvudet någorlunda kallt, föreslår att de först ska ro en lämplig sträcka i en riktning och sedan ändra kurs för att sedan ro i den nya riktningen tills de når någon av stränderna.

Antag att de först ror a meter (om de inte innan dess har nått land) och sedan ändrar kurs på ett givet sätt. Hur lång sträcka tvingas de i värsta fall ro för att ta sig iland? För vilket värde på a och för vilken kursändring blir nämnda sträcka minimal?

3894. Lös ekvationen

$$\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x.$$

(ser nästan ut som Pythagoras' sats för en egyptisk triangel!)

3895. Kapteinen på romskipet blir spurt av skoleungdom om neste ferd. Han svarer att det blir x kvinner och y menn ombord. Videre blir oplyst att ferden er planlagt å vare z hele dager. Så skriver han på tavlen ytterligere informasjon:

$$3,141592653 = x + \frac{\sqrt{y}}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10^4} - \frac{\sqrt{z-1}}{10^7}.$$

Han sier att tillnermelsen er meget god.

Hvor mange kvinner og hvor mange menn blir med, og hvor mange hele dager skal ferden vare?

3896. Lös ekvationen

$$10x^3 - (2y+5)x^2 + (y-4)x + 100 = 0$$

i positiva heltal x och y.

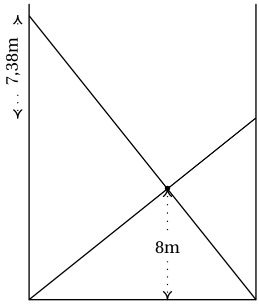
3897. Vrångöbolaget bedriver sommartid båttrafik i Göteborgs skärgård och har bl a en rundtur med ångfartyget Dalane som lägger till vid ett stort antal bryggor. Rundturen är märklig så tillvida att det under gång alltid är samma antal passagerare. Vidare går alltid en fjärdedel av alla passagerare iland vid varje stopp och de ersätts med lika många som går ombord. Av dem som går iland vid en hållplats utgörs 10% av passagerare som gick ombord vid föregående hållplats och 20% av passagerare som gick ombord två hållplatser tidigare. Dalane besöker på sin färd i tur och ordning Asperö, Brännö, Donsö och Vrångö, för att nämna några öar.

Hur stor andel av passagerarna som fanns ombord när man just lämnat Asperö fanns fortfarande ombord vid avgång från Vrångö?

3898. Här kommer en variant av det klassiska stegproblemet.

Två stegar står lutade mot två husfasader på ömse sidor av en gata och korsar varandra under räta vinklar 8 m över markplanet som figuren visar. Stegarna är olika långa och den längre stegen når 7,38 m längre upp på sin husvägg än den andra.

Hur långt är det mellan husväggarna? Hur långa är de båda stegarna?



Anm. Det klassiska stegproblemet är betydligt svårare och lyder som följer: Två stegar av längderna 20 och 30 m är placerade på samma sätt som ovan. De korsar varandra 8 m över gatan (vinkeln är i detta fall okänd). Hur bred är gatan? (Detta problem förekom senast i *Elementa* 1980:4.)

3899. Ernst, Sigmund och Anna sitter en kväll och småpratar framför brasan. Plötsligt säger Ernst: ”Om man lägger ihop siffrorna i mitt födelseår får man faktiskt min ålder.” Sigmund, som är några år äldre än Ernst, tänker en kort stund och konstaterar sedan förvånat: ”Det blir samma sak för mig; om man lägger ihop siffrorna i *mitt* födelseår stämmer summan med *min* ålder.” Den matematiskt sinnade Anna grubblar ett tag varefter hon utbrister: ”Då ber jag att få gratulera er båda på födelsedagen!”

När ägde denna konversation rum? Tilläggas bör att detta inträffade vid det senaste tillfället som det skulle varit möjligt för Anna att dra nämnda slutsats.

Anm. Vi vill påpeka att detta är ett rent matematiskt/logiskt problem och att det inte är några tolkningsfällor i formuleringarna. Alla yttranden fälldes under en och samma dag. Förekommande åldrar anges i hela år. En person anses exempelvis vara 47 år fr o m det datum som han fyller 47 t o m dagen innan han fyller 48.