Årgång 81, 1998

Första häftet

Matematiska uppgifter

3900. Mirjam beger sig varje morgon till floden för att hämta vatten till sin egensinnige make. Denne vill ha exakt 7 *log* (ungefär 3,5 liter) till sitt fotbad men Mirjams två krus rymmer 4 resp 9 *log*. Hur löser hon denna uppgift?

En morgon finner Mirjam att någon har slagit sönder båda hennes krus under natten. Maken förser henne med två nya krus som rymmer 5 *log* resp 13 *log*. Kan Mirjam fortfarande få ihop sina 7 *log*?

3901. Två elever i ett land långt borta har fått i uppdrag att ge en resumé av ett nationalepos utgivet i ett band. Eleverna är osäkra på vad ordet resumé betyder och kan inte komma överens om hur uppgiften ska utföras. Den ene föreslår att man ska bestämma summan av samtliga siffror som ingår i sidnumren. Den andre tycker att det räcker med att beräkna totala antalet siffror i sidnumren. Eftersom de inte kan enas slår de ihop de två summor som de fått. Resultatet blir 10 044. Hur många sidor innehåller boken?

3902. Lös ekvationen

$$xy + \frac{(x+y)^2}{xy-1} = 9$$

i reella tal x och y.

3903. Sommaren 1997 anordnades en fortbildningskurs för matematiklärare på Samsö i Danmark. Den samlade 20 deltagare, varav 7 svenskar och 13 danskar. Det var lika många manliga som kvinnliga lärare: 4 av svenskarna och 6 av danskarna var kvinnor. En grupp om tre slumpvis utvalda lärare stod för matlagningen i tältlägret (ingen hade lyckats utverka bidrag till kursen). Det blev ett lyckat val: gruppen innehöll lärare från båda länderna och av båda könen. Vad är sannolikheten att få en sådan blandgrupp?

3904. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - yz = 1 \\ y^2 - zx = 1 \\ z^2 - xy = 1 \end{cases}$$

i hela tal x, y, z.

3905. Ett vanligt A4-ark har måtten 210 mm × 297 mm. Vilken area har den största halvcirkel som kan uppritas på ett sådant ark?

3906. Bestäm alla polynom $p(x)$ som uppfyller $p(x+1) = p(x) + 2x + 1$ för varje x.

3907. Visa att $187^n - 154^n + 163^n - 97^n$ är delbart med 99 för varje positivt heltal n.

3908. Lös ekvationen

$$2x[x] - x^2 - [x] + 3x = 0$$

där $[x]$ betecknar det största heltal som är $\leq x$ (exempelvis är $[2,7] = 2$, $[2,0] = 2$ och $[-2,7] = -3$).

3909. En liksidig triangel ABC är inskriven i en cirkel. På den kortare cirkelbågen AB tas en punkt P. Den räta linjen genom punkterna A och P skär förlängningen av BC över B i punkten D, medan den räta linjen genom punkterna B och P skär förlängningen av AC över A i punkten E. Beräkna förhållandet $\dfrac{|AP|}{|PB|}$ då vinkeln DEC är rät.

Andra häftet

Matematiska uppgifter

3910. I världscupen i skidskytte för damer används ett system med heltalspoäng, så att vid varje enskild tävling får etta a_1 poäng, tvåan a_2 poäng, trean a_3 poäng osv, med $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$. Under den gångna säsongen hade den totala världscupsegraren Magdalena Forsberg under de tio första tävlingarna fått placeringarna 3-2-2-1-7-1-1-7-3-3 (i denna ordning). Efter den fjärde tävlingen hade MF fått ihop 106 poäng (för en tredjeplats, två andraplatser och en förstaplats), efter den sjunde tävlingen hade hon samlat ihop 185 poäng och när den tionde tävlingen var avslutad var hennes totala poängsumma 252 poäng. Använd denna information till att bestämma poängtalen för vinst, andraplats, tredjeplats samt sjundeplats.

3911. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} \log x - \log y + \log z = 3 \\ 2\log x - \log z = 1 \\ \log 4(x+y) = \log z \end{cases}$$

(log står för 10-logaritmen).

3912. På den lilla ön Botano i Vita Havet finns det två folkslag, jasminer och nejlikor. Jasminerna är kända för sin höga moral och för att de aldrig skulle kunna uttala en lögn. Nejlikorna däremot betraktas som opålitliga och för att leva upp till sitt rykte ljuger de konsekvent. Vid ett besök på Botano träffade jag Charlotte, Emily och Anne på ett värdshus. Jag frågade Charlotte: ”Vilka av er tre är jasminer?”. Hon talade dock med utpräglad dialekt så jag förstod inte ett ord. ”Charlotte sade att bara en av oss är nejlika”, upplyste Emily när hon märkte att jag inte hade uppfattat svaret. ”Tro inte på Emily”, genmälde då Anne. ”Hon talar aldrig sanning”. Kan man av dessa svar avgöra vilka som är jasminer och vilka som är nejlikor?

Dagen därpå träffade jag på samma värdshus Biff, Happy och Willy. Till dem ställde jag frågorna: ”Biff, är Happy en jasmin?”, ”Happy, hör Biff och Willy till samma folkslag?” och ”Willy, hur är det med Happy? Är han jasmin?” Svaren blev i tur och ordning *ja*, *nej* och *ja*. Vilka folkslag tillhörde de tre? Hade man kunnat fastställa tillhörigheten för varje tänkbar svarskombination?

3913. Finns det något fyrsiffrigt tal m sådant att de tre sista siffrorna i m^n överensstämmer med de tre sista siffrorna i m för varje positivt heltal n?

3914. På vanligt stryktips med 13 matcher kan man bilda 3^{13} möjliga tipsrader, där en rad består av en följd av 13 tecken: ettor, kryss och tvåor. Med olika former av system som innehåller lämpligt utvalda rader försöker man förbättra vinstchansen för en given insats. Följande system, den s k 9-nyckeln

1	1	1	x	x	x	2	2	2
1	x	2	1	x	2	1	x	2
1	2	x	2	x	1	x	1	2
1	2	x	x	1	2	2	x	1

ger exakt 4 rätt på 9 rader och exakt 3 rätt på 72 rader av de totalt $3^4 = 81$ vinstrader som är möjliga för fyra givna matcher. Visa detta! Denna nyckel kan kombineras med sig själv så att vi får en nyckel på $9 \cdot 9 = 81$ rader för åtta matcher, vilket garanterar minst 6 rätt. För hur många av de möjliga $3^8 = 6561$ möjliga vinstraderna ger denna nyckel exakt 7 rätt? Ange ett system baserat på 9-nyckeln som garanterar minst 10 rätt på 13 matcher.

3915. Hypotenusan i en egyptisk triangel (dvs med sidorna 3, 4 och 5) ligger längs den räta linjen $x - 2y = 0$ i ett rätvinkligt koordinatsystem. Vi förutsätter att triangeln är orienterad så att den mindre av kateterna är belägen närmast origo. Bestäm koordinaterna för den räta vinkelns spets då medianerna skär varandra i punkten $(5,4)$. Hur bestämmer man det aktuella hörnet om man endast har tillgång till passare (eventuellt med lämplig inställning av radien) och ograderad linjal?

3916. För många år sedan gick det dagligen ett mycket märkligt tåg mellan Skene i Västergötland och Tågarp i Skåne. Det var sammansatt av tio vagnar, röda eller vita, men ordningen mellan vagnarna måste följa vissa bestämda regler.

(i) Man hade alltid rätt att koppla ihop en röd vagn med en vit vagn så att den röda föregick den vita.

(ii) Om man hade två tillåtna delsätt kunde dessa alltid kopplas samman (om man hade två delsätt, båda av typ RV, kunde dessa alltså kopplas samman till ett sätt med fyra vagnar, RVRV).

(iii) Till ett godtyckligt tillåtet tågsätt kunde man alltid koppla en röd vagn framför och en vit vagn efter (delsättet RVRV kunde man alltså bygga på till RRVRVV).

Inga sammankopplingar utanför dessa regler var tillåtna. Hur många olika färgkombinationer var möjliga för de tio vagnarna?

3917. För vilka reella tal gäller olikheten

$$\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}>\frac{1}{\sqrt{x-1}}?$$

3918. Låt v vara en godtycklig talföljd bestående av de N första positiva heltalen, t ex $\{5,7,2,6,1,3,4\}$ för $N=7$. Bilda en ny talföljd, där första talet i följden anger den position "1" hade i v, andra talet anger vilken position "2" hade i v osv. Vi kan uttrycka den nya sviten som en funktion av den gamla, $F(v)$. I exemplet blir $F(v)=\{5,3,6,7,1,4,2\}$. Om vi upprepar proceduren för den senare sviten får vi en svit som kan betecknas med $F(F(v))$. I exemplet blir denna $\{5,7,2,6,1,3,4\}$, dvs vi är tillbaka till ursprungssviten. Visa att detta inte är en tillfällighet utan att det allmänt gäller att $F(F(v))$.

Låt oss nu i stället bilda talföljden $G(v)$ för vilken första talet anger positionen i v för talet N, andra talet är positionen i v för talet $N-1$ osv. I exemplet ovan blir $G(v)=\{2,4,1,7,6,3,5\}$. Om vi upprepar denna procedur ytterligare tre gånger återfår vi sviten v. Visa detta, dvs att $G(G(G(G(v))))=v$ gäller för varje v. Vad blir $F(G(F(G(v))))$?

3919. Här kommer ett klassiskt geometriproblem. På en cirkel väljs två punkter A och B godtyckligt. Genom mittpunkten O på kordan AB dras två nya kordor, CD och EF, så att punkterna ligger i ordningen

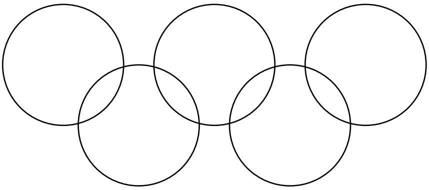
A, C, E, B, D, F på cirkelperiferin. Vi drar sedan kordorna CF och ED så att en fjärilsliknande figur bildas. Kordan AB skär därvid CF i punkten P och ED i punkten Q.

Visa att P och Q ligger på samma avstånd från O.

Tredje häftet

Matematiska uppgifter

3920. De fem olympiska ringarna består av fem cirklar som skär varandra på så sätt som figuren nedan visar. Varje ring uppdelas på så sätt i två eller tre fält. I de nio fält som bildas placerar vi ut talen 1, 2, ..., 9. Låt summorna av talen i de fem ringarna vara $S_1, \ldots, S_5$. Låt S_{min} vara den minsta av de fem summorna. Vad är det största värde som S_{min} kan anta?



3921. Vid hovet hos den tysk-romerske kejsaren Fredrik II anordnades troligen 1224 en tävling i matematisk problemlösning. En av deltagarna skall ha varit Fibonacci (Leonardo från Pisa). Ett av de förelagda problemen var detta:

Tre män har var sin andel i en samling mynt: A äger 1/2, B 1/3 och C 1/6 av mynten. Mynten skall fördelas mellan de tre ägarna. Mynten läggs i en hög och var och en av dem tar en så stor del som han anser svarar mot sitt innehav (inget mynt lämnas kvar). Därefter får A lämna ifrån sig 1/2 av de mynt han tagit, B 1/3 och C 1/6. De återlämnade läggs i en ny hög och fördelas lika mellan de tre. Därvid visade det sig att var och en fick sin rättmätiga andel av mynten.

Hur många mynt var det allt som allt (minsta möjliga antal skall anges) och hur många mynt tog var och en vid den första delningen?

3922. Anna, bosatt i Bugatto, cyklar dagligen till sitt arbete i Maserato. I uppförsbackarna är hennes hastighet 20 km per timme, medan hastigheten i nedförsbackarna är 30 km i timmen och på jämn mark 24 km per timme. Resan tar 50 min från bostaden till arbetet medan återresan tar exakt en timme. Hur långt är det mellan Bugatto och Maserato?

3923. De positiva heltalen a, b, c, d uppfyller sambanden $a+b=c+d=1998$. Vad är minsta resp största värdet av $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$?

3924. Danernas nye kejsare har till sin kröning beställt en mantel av det tunnaste tyg som världen dittills skådat. Budet om tillverkningen går till speciellt utvalda vävare från frankernas land, tessiter, och från anglernas land, hobbiter. Under tre dagar vill man pröva om vävarna håller måttet. Den första dagen arbetar tre tessiter och två hobbiter. De väver tillsammans mer än 25 m. Den andra dagen arbetar fyra tessiter och en hobbit och de väver mindre än 30 m. Den tredje dagen väver två tessiter och fem hobbiter och resultatet blir mindre än 36 m.

Kejsaren, lätt irriterad över de diffusa sifferuppgifterna, begär att få veta exakt hur snabbt var och en arbetar. Riksdrotsen svarar att varje tessit väver samma antal hela meter per dag och att detsamma gäller varje hobbit, men att tessiter och hobbiter inte nödvändigtvis är lika snabba. Hjälp kejsaren att med ledning av detta bestämma resp vävhastigheter.

3925. Ett klassiskt sannolikhetsproblem. Två kort dras slumpmässigt ur en vanlig kortlek med 52 kort.

a) Om man vet att åtminstone ett av korten är ett ess, vad är då sannolikheten att också det andra kortet är ett ess?

b) Om man vet att ett av korten är spaderess, vad är då sannolikheten att även det andra kortet är ett ess?

Fundera över följande frågor innan du börjar räkna. Bör det bli samma svar i a) och b)? Om svaret på denna fråga är nekande, vilken av sannolikheterna bör då vara störst?

3926. Under 1977 hade biblioteket i Axelandria öppet 300 dagar. Totala antalet boklån under året var 4202.

a) Visa att antalet utlånade böcker åtminstone en dag var 15 eller fler.

b) Visa att det inte nödvändigtvis finns två dagar med 15 eller fler utlånade böcker.

c) Visa att det säkert finns mer än tio dagar med exakt samma antal utlånade böcker.

d) Visa att det inte behöver finnas mer än elva dagar med exakt samma antal utlånade böcker.

3927. I en triangel med arean A är en sida a och motstående vinkel v. Beräkna $v_{\max}$ då $a^2 \tan v = 4A$.

3928. För varje heltal N gäller följande för funktionen $f(N)$:
(i) $f(N)$ är ett heltal;
(ii) $f(f(N)) - 5f(N) + 4 = 0$.
a) Antag att $f(N) = k$, k konstant, för varje heltal N. Vilket värde måste k då ha?
b) Visa att det för varje positivt heltal $M \neq 1000$ existerar en icke-konstant funktion $f(N)$ som uppfyller villkoren ovan och som antar värdet M för $N = 1000$.
c) Visa att påståendet i b) inte är sant om vi i texten byter ut talet 1000 mot 1001.

3929. I triangeln ABC väljs punkten D på sidan BC och punkten E på sidan AC. Sträckorna AD och BE skär varandra i punkten F. Diagonalerna i fyrhörningen $FECD$ skär varandra i punkten G.

Bestäm arean av triangeln ABG om resp areor för trianglarna FEC, ECD och CDF är 6, 9 och 6 areaenheter.

Fjärde häftet

Matematiska uppgifter

3930. I nedanstående additioner har varje siffra genomgående ersatts med en viss bokstav. Olika bokstäver motsvarar olika siffror. Då $FEM + SEX = ELVA$ medan $FEM + ETT = TRE$ undrar vi vilka siffror som döljer sig bakom de olika bokstäverna.

3931. I en butik säljs julmust av två märken, Almust och Utmust. Almust kostar 50% mer än Utmust, pris för tomglas ej inräknad. Om man räknar in flaskan i priset (panten är densamma för de båda märkena) kostar 8 flaskor Almust lika mycket som 11 flaskor Utmust. Tredjedag jul tar Julius sina 27 urdruckna flaskor med sig till butiken. Det visar sig att panten räcker precis till ett helt antal fyllda flaskor (panten för de senare ska räknas in). Hur många flaskor av varje märke får han?

3932. Talet 1999 kan skrivas som summan av två successiva heltal, 999 och 1000. För vilka andra värden på n kan 1999 skrivas som en summa av n på varandra följande positiva heltal? Besvara frågan om 1999 byts mot 2000.

3933. Vilket är det största värdet på x för vilket ekvationen

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x}{3}\right]+\left[\frac{x}{4}\right]=x$$

är uppfylld? Här anger $[a]$ det största heltal som är mindre än eller lika med a. Exempelvis är $[5,27]=5$ och $[-3,12]=-4$.

3934. I en triangel med vinklarna A, B och C gäller sambanden

$$\tan A+\tan B+\tan C=6\frac{2}{3} \text{ och}$$
$$\tan A\cdot\tan B+\tan B\cdot\tan C+\tan C\cdot\tan A=12\frac{1}{3}.$$

Bestäm triangelns vinklar.

3935. Matilda har ett vanligt dominospel med 21 dubbelbrickor försedda med prickar, i antal från 0 till 5 per brickhalva. Varje bricka kan därför sägas motsvara ett visst talpar. Om vi inte tar hänsyn till ordningen mellan halvorna förekommer varje möjligt talpar exakt en gång.

a) M försöker lägga de 21 brickorna i en sammanhängande slinga så att intilliggande brickor möts med samma antal prickar. Kommer hon att lyckas?

b) M lägger nu de 21 brickorna i tre sammanhängande rader men med fria ändrutor, också här med samma prickantal för mötande brickhalvor. Hon kräver också att det ska vara samma antal prickar i de tre raderna. Vilket antal prickar kommer de tre ändrutorna att få?

c) I ett tredje försök plockar M först bort tre av brickorna. De återstående 18 brickorna placerar hon i sex rader med tre ”liggande” brickor i varje rad, så att de 36 brickhalvorna bildar ett 6×6-rutnät där antalet prickar i varje rad, varje kolumn och varje diagonal är detsamma. Hur kan detta göras om hon vill att pricksumman ska vara så stor som möjligt?

3936. Låt t vara ett tal vars absolutvärde ligger mellan 0 och 1. Vi söker ett närmevärde till t på formen

$$\pm\sqrt{a_1}/10\pm\sqrt{a_2}/10^2\ldots\pm\sqrt{a_i}/10^i\ldots\pm\sqrt{a_n}/10^n.$$

I avsikt att åstadkomma en entydig lösning uppställer vi följande regler:

1. För $i=1,2,\ldots,n$ är a_i ett positivt heltal eller lika med 0; dock är alltid $a_i<100$.

2. I varje enskilt steg handlar det om att bestämma a_i utifrån ett decimaltal. Vi väljer då det värde som ligger närmast decimaltalet. Om decimaltalet ligger mitt emellan två heltal väljer vi det största heltalet.
3. Antalet steg vid bestämningen av närmevärdet skall vara det minsta möjliga antalet som krävs för att tillfredsställa önskat krav på noggrannhet. Detta avgör värdet på n.

Bestäm närmevärden till nedanstående tal så att felets absolutvärde i båda fallen är mindre än 10^{-9}.

a) $\pi - 3 \approx 1,415926536/10$.
b) $e - 2 \approx 7,182818285/10$.

Ledning: Om talet skrivs på formen $t = v/10$ blir den första ekvationen $\sqrt{x_1} = v$. Utgå från lösningen x_1 och använd ovanstående regler vid valet av a_1.

3937. Är det möjligt att placera ut fyra punkter i planet så att de parvisa avstånden endast antar två olika värden? Samma fråga med fem punkter. Är det möjligt att placera ut sex punkter i rummet så att de parvisa avstånden endast antar två olika värden?

3938. En alpin skidklubb som arrangerar en internationell slalomtävling har garanterats prispengar ur The Downhill Foundation. Bestämda regler gäller dock för hur medlen ska användas. Varje tävlande får ett pris ur donationen om hon/han inte blir besegrad av någon annan tävlande i *båda* åken. En deltagare som vinner det ena åket men blir sist i det andra kommer alltså att få ett pris. Vilket är det förväntade antalet pris om 5 åkare deltar i tävlingen? Generalisera resultatet till att gälla n deltagare. Vi antar att ordningen mellan åkarna är helt slumpmässig, att resultaten i de båda åken är oberoende av varandra samt att två åkare inte kan komma på samma plats.

3939.
a) Visa att medianerna i en godtycklig triangel har en sammanlagd längd som understiger triangelns omkrets.
b) Triangeln ABC är given. Låt D vara mittpunkten på sidan AC och E mittpunkten på sidan BC. Beteckna mittpunkten på sträckan AD med F. Visa att omkretsen av triangeln BEF är mindre än omkretsen till triangeln ABD.