Årgång 82, 1999

Första häftet

3940. När Bertil kommer in i klassrummet för att hålla en mattelektion hade någon skrivit på tavlan

$$\begin{array}{r} \text{ANTE} \\ +\ \text{ASTA} \\ \hline =\text{SANT} \end{array}$$

Bertil tittade på det skrivna en stund och sade sedan till eleverna: ”Det är ju alldeles riktigt, om varje bokstav står för en viss, egen siffra. Kan ni räkna ut vilka siffror det blir?”

3941. Siffrorna 1-9 på en räknare är ordnade i en kvadrat. Ta en godtycklig rad, kolonn eller diagonal. Skriv först dessa siffror, sedan siffrorna i omvänd ordning. T ex ger andra kolonnen 258 852 (eller 852 258). Visa att detta tal alltid är delbart med 37.

3942. Sherlock Holmes älskade att mystifiera Watson. I berättelsen *Silverbläsen* utför Holmes en gåtfull beräkning för att bestämma tågets fart:

– Det går fort, sade han, i det att han såg ut genom fönstret och tittade på sin klocka. Vi kör för ögonblicket med en hastighet av femtiotre och en halv miles i timmen.

– Jag har inte lagt märke till milstolparna, sade jag.

– Inte jag heller. Men telegrafstolparna på denna linje står sextio yard från varandra och då man vet det, är uträkningen mycket enkel.

Beräkningen skulle vara enkel, om det inte vore för de engelska enheterna: 1 mile = 1760 yard. Det finns många teorier för hur Holmes kom fram till sin slutsats. I Hans-Uno Bengtssons bok *Trepiporsproblem och bagateller* finns följande förlag till lösning:

Om N stolpavstånd passeras på T sekunder blir hastigheten

$$\begin{aligned} V &= (60 \times N)/T \text{ yard per sekund} \\ &= (60 \times 3600 \times N)/(1760 \times T) \text{ miles per hour.} \end{aligned}$$

Eftersom $176 = 11 \times 16$ så bör Holmes ha räknat $N = 11$ (eller möjligen 22) stolpavstånd för att göra beräkningen så enkel som möjligt. Om 11 stolpavstånd passeras på 25 sekunder försvinner många faktorer och hastigheten blir $V = 54$ mph, vilket ska jämföras med Holmes siffra 53.5 mph. Kan beräkningen ha gjorts på något annat sätt?

3943. En rätvinklig triangel ABC med hypotenusan AC är given. En cirkel med medelpunkten på BC passerar genom C och skär kateten BC

i punkten D och hypotenusan i punkten E. Visa att

$$|AE| \cdot |AC| = |BD| \cdot |BC| + |AB|^2.$$

3944. Ett klassiskt sannolikhetsproblem. Enligt gammal rysk tradition kunde en flicka avgöra om hon skulle komma att gifta sig under det närmaste året på följande sätt. En kamrat håller sex grässtrån i handen så att bara ändarna är synliga. Flickan knyter slumpmässigt ihop ändarna två och två på den ena sidan och gör sedan samma sak på den andra. Om stråna nu bildar en sammanhängande ring så kan flickan börja planera för bröllop. Vad är sannolikheten för att detta inträffar? Som tillägg undrar vi: Vad är sannolikheten för att stråna bildar exakt två ringar utan att några strån blir över?

3945. Följande uppgift är en variant av ett problem som förekom vid kvalificeringen till Skolornas matematiktävling i höstas (1998).

En parallellogram har sidorna a och b, $\frac{1}{2} \leq \frac{a}{b} \leq 2$. Om man drar bisektriserna till vinklarna i parallellogrammens hörn kommer de att innesluta en rektangel. Visa att förhållandet mellan rektangelns och parallellogrammens areor är $(a-b)^2/2ab$.

3946. Kl 12.00 cyklar Linda från sitt arbete på Luthagens kdf (står för kommundelsförvaltning) för att hämta en skrivelse på Eriksbergs kdf. Ellinor, som har tjänst på den sistnämnda förvaltningen, cyklar vid exakt samma tidpunkt för att hämta en skrivelse på Lindas arbetsplats. De åker samma färdväg med konstant hastighet, men de cyklar olika fort. De möts när Linda har cyklat a km. Vid framkomsten får de vänta en halvtimme innan de kan återvända till sina arbetsplatser. På tillbakavägen möts de båda när Ellinor har b km kvar att cykla. Vem är snabbast om $a < b$?

3947. Beräkna

a) $\log_{10} 2 \cdot \log_2 10$,

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 2$,

c) $\log_2 5$ när man vet att $\log_{10} 2 = 0{,}3010$.

Vilka allmänna logaritmlagar kommer till användning här?

3948. Elin ritar cirkelbågar med varierande radier, men alla av längden 1. Därefter klipper hon ut en likbent triangel som ska vara tillräckligt stor för att täcka en godtyckligt vald båge. Vilken triangelarea är den minsta möjliga för att Elin ska kunna täcka varje enskild båge oavsett radie?

3949. Den s k Fibonacciserien $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definieras genom

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 2 \\ f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \text{ för } n \geq 3. \end{aligned}$$

a) Beräkna summan

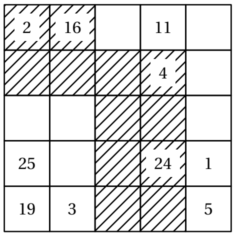
$$S_n = \frac{1}{4}\left(f_1 + f_2/2 + f_3/2^2 + \cdots + f_n/2^{n-1}\right)$$

för $n = 1, 2, 3, \ldots$. Vad händer med S_n då $n \to \infty$?

b) Betrakta följder av n siffror, 0:or och 1:or, där två nollor inte får förekomma direkt efter varandra. Exempelvis gäller för $n = 5$ att följderna 11111, 10101 och 01110 är tillåtna, medan följderna 11100 och 10001 inte får förekomma. Visa att andelen icke tillåtna följder bland de 2^n möjliga är $1 - f_{n+2}/2^n$.

c) Jämför resultaten i a) och b). Slutsats?

Andra häftet



3950. I vidstående rutnät ska talen 1–25 skrivas in så att summan i varje rad, kolumn och diagonal blir 65. För att underlätta det hela är 10 tal redan utplacerade. Vidare ska skuggade rutor innehålla *jämna* tal.

3951. a) Lös ekvationssystemet

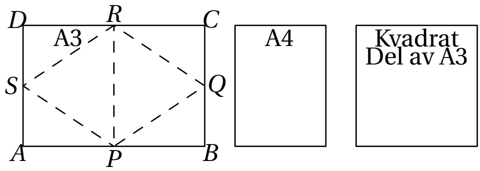
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x^2 + xy = 2 \end{cases}$$

i hela tal x, y.

b) Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + xz = 3 \end{cases}$$

i hela tal $x \leq y \leq z$. Kan lösandet av uppgift a) ge några idéer om hur man skulle kunna lösa uppgift b)?



3952. Vi har två givna ark, det ena i A3-format, det andra i A4-format. Vi ska här konstruera pyramider genom att vika arken. Hur de ska vikas framgår av figuren ovan. P, Q, R och S utgör sidornas mittpunkter och sträckorna som förenar dessa punkter bildar vikningslinjer. Om man viker efter dessa och låter hörnen A, B, C och D förenas i en punkt får man en pyramid, där sidoytorna utgörs av fyra likbenta och kongruenta trianglar. Vad blir mätetalen för A3-pyramidens och A4-pyramidens volymer? Vad blir förhållandet mellan volymerna (förhållandet mellan längd och bredd i A3 och A4 är $\sqrt{2}$)? Vad blir volymen för en pyramid på samma sätt bildad av ett kvadratiskt ark som avskurits från ett A3-ark?

3953. Klockan $a.b.c$ där a, b, c är angivna i timmar, minuter, sekunder är vinkeln mellan tim- och minutvisaren 1°. Hur många gånger per dygn inträffar detta och när?

3954. P är en punkt på sidan AB i den liksidiga triangeln ABC. I vilket förhållande ska P dela AB för att radierna till de i trianglarna APC och BPC inskrivna cirklarna ska förhålla sig som $2:3$?

3955. Annas och Eriks sammanlagda ålder understiger Idas och Martins sammanlagda ålder. Eriks och Idas sammanlagda ålder understiger Martins och Ritas sammanlagda ålder. Med uppenbar innebörd är *Ida*+*Martin* < *Rita*+*Anna* och *Martin*+*Rita* < *Erik*+*Anna*.

Vem är äldst av de fem och vem är yngst? Går det avgöra hur de tre övrigas ålder förhåller sig till varandra?

3956. Antag att däcken på en bil slits ner i förhållande till antalet körda mil. Då bilen är framhjulsdriven är dock slitaget högre på framdäcken. En testförare startar med fyra nya däck. Man vet att ett däck som placerats framtill håller a mil medan däck som placerats baktill håller b mil, $a < b$.

För att bilen ska kunna köra mer än a mil med en uppsättning däck kan man tänka sig att byta fram- och bakdäck efter ett lämpligt antal mil. Hur långt kan man i bästa fall köra med fyra däck och när ska i så fall däcksbytet ske?

3957. Visa att $3^{2x+1} + 2^{x+2}$ är delbart med 7 för varje icke-negativt heltal x.

3958. Vad finns det för samband mellan följande tre problem?

a) I ett rätvinkligt koordinatsystem bildar man vägar från origo till punkten $(2n, 0)$, n är ett positivt heltal, genom att dra räta linjer mellan punkter med heltalskoordinater. Följande regler gäller

(i) Från punkten (x, y) kan man antingen gå till $(x+1, y+1)$ eller till $(x+1, y-1)$.

(ii) För alla punkter (x, y) på vägen måste $y \geq 0$

Bestäm antalet olika vägar för $n = 1, 2, \ldots, 5$.

b) Vid ett personval med $2n$ röstande har n personer röstat på kandidat A och n personer röstat på kandidat B. Under rösträkningens gång (man granskar en röstsedel i taget) visar det sig att A i varje steg fått minst lika många röster som B. På hur många olika sätt kan man dra röstsedlarna på detta sätt, dvs utan att A någon gång kommer i underläge? Utför beräkningarna för $n = 1, 2, \ldots, 5$.

c) På ett rutbräde med 2 rader och n kolumner placerar man ut talen $1, 2, \ldots, 2n$ på sådant sätt att talen i varje rad bildar en växande följd och att detsamma gäller i varje kolumn, uppifrån räknat. På hur många olika sätt kan detta göras? $(n = 1, 2, \ldots, 5)$

3959. Låt p, q, r vara primtal > 5 och sätt $R = pqr$. Går det att hitta någon lösning till ekvationen $1/R = 1/p - 1/q - 1/r$? Finns det någon lösning till ekvationen $1/R = 11/p - 1/q - 1/r$?

Tredje häftet

3960. I en skola i ett främmande land hade man samtidigt prov på A-, B- och C-kurserna i matematik. Det visade sig att

- 40% av alla eleverna klarade A-kursen och en fjärdedel av dessa klarade också B-kursen;
- 30% av alla klarade minst två av proven och 80% minst ett av proven;
- en tredjedel av dem som klarade såväl B- som C-provet klarade också A-provet;
- andelen som klarade enbart A-provet var lika med andelen som enbart klarade B-provet;

- två tredjedelar av dem som varken klarade A- eller B-provet klarade inte heller C-provet.

Hur stor andel av eleverna klarade B-provet? C-provet? Hur stor andel klarade alla tre proven?

3961. I kvadraten $ABCD$ är E och F mittpunkter på resp sidor BC och CD. Om man drar linjerna AF, AE och BF omger de en triangel. Visa att detta är en egyptisk triangel, dvs sidorna förhåller sig som $3:4:5$.

3962. Herr Skalman har fått en check på a pingur och b skutt (det går 100 skutt på 1 pingu), men vid inlösen får han av misstag b pingur och a skutt. Efter att ha köpt en väckarklocka för 3 pingur och 50 skutt återstår dubbelt så mycket pengar som det belopp som var angivet på checken. Hur stort var detta belopp?

3963. I en schacktävling spelar varje spelare ett parti mot var och en av de övriga. Vinst ger 1 poäng och remi 0,5 poäng.

Alf kom sist med 4 poäng. Britt hade 5 poäng och Carl hade 6,5. Disa vann tävlingen med sina 8 poäng. Alla de övriga hamnade på samma poängtal. Hur många deltagare var det totalt?

3964. På ett party med n deltagare har var och en hälsat på 3 andra gäster, med ett undantag; den sist anlände har hälsat på en person. Visa att minst 6 personer måste ha deltagit i partyt. En av deltagarna tror sig minnas att 9 personer deltog i partyt. Är denne deltagare trovärdig?

3965. Funktionen $f(n)$ är definierad för alla positiva heltal n och antar icke-negativa heltal. För alla $m > 0$ och $n > 0$ gäller att

$$f(m+n) - f(m) - f(n) = 0 \text{ eller } 1.$$

Man vet att $f(2) = 0$, $f(3) > 0$ och $f(33) = 11$. Bestäm $f(15)$.

3966. Om ekvationen $x^3 = (a+b)(x+1)$ vet man att a och b är positiva heltal med $a < b$ och att $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ är en rot till ekvationen. Bestäm a och b.

3967. Vi använder symbolen $[x]$ för att ange det största heltalet som är mindre än eller lika med talet x.

a) Vi söker komplementet till mängden av heltal på formen $[n + n/2]$ för $n = 1, 2, \ldots$, dvs mängden av heltal som *inte* kan skrivas på denna form. Beskriv mängden på en så enkel form som möjligt, dvs ange en funktion som genererar talen i mängden.

b) Beskriv på motsvarande sätt komplementet till mängden av heltal på formen $\left[n + \sqrt{n + 1/2}\right]$.

3968. Tre räta linjer skär varandra i en punkt. På linjen l_1 ligger punkterna P_1 och Q_1, på linjen l_2 ligger punkterna P_2 och Q_2 och på linjen l_3 ligger punkterna P_3 och Q_3. Visa att de tre skärningspunkterna mellan linjerna $P_1 - P_2$ och $Q_1 - Q_2$, mellan $P_2 - P_3$ och $Q_2 - Q_3$ samt mellan $P_3 - P_1$ och $Q_3 - Q_1$ ligger i rät linje.

3969. De Mörkräddas Förening hade nyligen sitt årsmöte på Glimminge Hotell. De tolv styrelsemedlemmarna bodde alla i samma paviljong, en rund byggnad med hiss i mitten och med rummen ordnade runt denna i cirkel, numrerade medurs från 1 till 12. Mellan rum och hiss löper en hall med lampor i taket och en strömbrytare utanför varje rum. Elssystemet är något ovanligt. Fem minuter efter det att lyset har tänts slocknar det automatiskt. Varje strömbrytare har två lägen, *PÅ* och *AV*. En hake är att man inte kan se på strömbrytaren i vilket läge den befinner sig. Enda sättet att tända lyset igen efter det att det har släckts pga automatiken, är att någon strömbrytare ändrar läge från *AV* till *PÅ*. Detta gäller dock under förutsättning att strömbrytaren inte har rörts under de senaste fem minuterna. Man har därför infört följande rutin. Om en gäst ska tända lyset trycker han först på sin egen knapp; om inget händer då trycker han på nästa knapp, räknat medurs, och håller på tills någon tryckning gör att ljuset tänds (dvs att läget ändras från *AV* till *PÅ*). (Om t ex strömbrytarna nr 11, 12, 1 står i läge *PÅ* och nr 2 står i läge *AV* när gästen i rum nr 11 startar sin runda, trycker han i tur och ordning på nämnda knappar, vilka alla byter lägen, och konstaterar att ljuset tänds så snart han tryckt på knapp nr 2.)

På morgonen efter mötet visade det sig att alla tolv hade vaknat var sin gång under natten, funnit ljuset i hallen vara släckt, stigit upp, uppfört tändningsproceduren och därefter gått till sängs. När hotellchefen fick höra detta blev hon en smula fövånad; från sin panel i receptionen kunde hon på morgonen nämligen notera att strömbrytarna alla stod i exakt samma lägen som kvällen innan. Här bör det tilläggas att åtminstone en strömbrytare stod i läge *PÅ* från början. Hon undrade därför om gästerna hade gjort sina ronder i nummerordning. Eller var det kanske så att ordningen inte spelade någon roll? För sig själv började hon fundera över följande tre problem:

a) Hur många gånger minst hade varje enskild strömbrytare ändrat läge?

b) Om exempelvis strömbrytare nr 5 ändrat läge 2 gånger under natten, kan man då säga något om antalet lägesändringar hos knapp nr 6?

c) Efter att kommit fram till svaren på frågorna i a) och b) insåg plötsligt hotellchefen att det inte var en slump att strömbrytarnas lägen var desamma som kvällen innan. Hur kunde hon inse detta?

Fjärde häftet

3970. I juletid kallade Moder Svea till sig sina två döttrar och gav var och en ett antal askar, lika många som antalet hela år resp dotter fyllde under året. I varje ask låg ett antal påsar, lika många som antalet hela år. I varje påse låg ett antal ecu, också lika många som antalet hela år.

Moder Svea förklarade: ”Denna ceremoni tänker jag genomföra varje jul som jag förunnas uppleva.” Hon tillade: ”Nästa jul kommer det att kosta mig 500 ecu mer än i år.” Hur gamla var de båda döttrarna?

3971. Denna uppgift kan ses som en fortsättning av uppgift 3961. I en kvadrat dras linjer från vart och ett av hörnen till de båda mittpunkterna på motstående sidor, sammanlagt 8 linjer. Dessa kommer att innesluta en åttahörning, dock ej regelbunden, i kvadratens centrum.

Hur stor del av kvadraten upptar denna åttahörning?

3972. Lös ekvationen

$$\log_x \frac{x^3}{2} + \log_{2x} \frac{x^3}{2} = 3,$$

där $\log_b a$ anger logaritmen för a i basen b.

3973. I ett litet företag med 6 anställda anordnar man varje dag ett lotteri med 6 lotter, varav 3 ger vinst i form av gratis lunch. Efter den senaste fredagsdragningen konstaterar Rosanna att hon har inte vunnit en enda gång vid veckans fem dragningar.

Har Rosanna haft extrem otur? Beräkna sannolikheten att åtminstone 1 av de 6 medarbetarna blir helt utan vinst under en vecka.

3974. Låt N vara det största heltalet sådant att såväl N som $7N$ har exakt 100 siffror. Vilken är den 50:e siffran i N?

3975. På en ö i Medelhavet har den excentriska IT-konsulten Minos byggt en villa som mer liknar en bunker än en bostad. Den innehåller sex identiska rum förenade med långa slingrande gångar. I varje rum finns det tre utgångsdörrar markerade A, B, C. Har man väl passerat en dörr kan man inte vända tillbaka. Vidare finns det i varje rum fem ingångsdörrar som inte går att öppna inifrån. Somliga av ingångsdörrarna är blinddörrar, som har kommit till för att göra rummen så pass lika att det är omöjligt att avgöra vilket rum man befinner sig i.

Tesevs och hans flickvän Ariadne har under en semester gjort en utflykt till villan. Den nyfikne Tesevs hittar en olåst ytterdörr, tar sig in i villan och går omedelbart vilse. Ariadne blir orolig och ringer till pojkvännen i sin mobiltelefon. Hon har nämligen hittat en orienteringstavla som visar hur man kan förflytta sig mellan olika rum. Vad som gör henne speciellt ängslig är att från ett av rummen finns det en gång till en källare från vilken det inte finns någon återvändo. Endast ett av rummen har en dörr som leder direkt ut i det fria. Orienteringstavlan ser ut på följande sätt:

Från rum	Dörr A	Dörr B	Dörr C
1	2	4	3
2	6	5	K
3	1	2	6
4	3	2	U
5	3	2	6
6	4	1	5

Här betecknar K källaren och U utgången ut i det fria. Om Tesevs exempelvis befinner sig i rum nr 2 och väljer dörr C hamnar han i källaren; väljer han dörr A kommer han till rum nr 6 och väljer han dörr B kommer han till rum nr 5. Om Tesevs befinner sig i rum nr 4 och väljer dörr C når han friheten.

Nu har Ariadne den delikata uppgiften att lotsa Tesevs rätt genom labyrinten genom att för varje rum som Tesevs hamnar i välja en lämplig utgångsdörr. Hon kan naturligtvis inte börja med att föreslå dörr C, eftersom Tesevs ju skulle kunna befinna sig i rum nt 2. Hur ska Ariadne instruera sin pojkvän så att han kan ta sig ut, utan att Ariadne eller han själv vet i vilket rum han befinner sig från början? Det lönar sig inte att med klädesplagg eller andra föremål markera de rum som har besökts. Överallt finns det nämligen fullt av kvarlämnade persedlar från tidigare besök av turister …

Men den kloka Ariadne klarade sin uppgift. Hur bar hon sig åt?

3976. I en rund ask med diametern 30 cm har man lagt så många cirkulära brickor med radien 1 cm som det är möjligt att få in i ett lager. Hur många brickor blir det om de ligger så tätt packade som möjligt?

3977. Visa att ekvationen

$$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3=9$$

saknar heltalslösningar.

3978. I Rom fanns för knappt två tusen år sedan en kolossal staty föreställande kejsar Nero. Statyn stod på en sockel. Antag att statyns lägsta punkt befann sig 10 meter över marken och dess högsta, lodrätt ovanför, 34 meter över marken. Hur långt från statyn (räknat från sockeln längs marken) ska en iakttagare stå för att se ”så bra som möjligt”? Detta definieras som att synvinkeln ska vara maximal. Anta för enkelhets skull att betraktarens ögon befinner sig 2 meter över marken.

3979. Tre cirklar med radier resp 6, 7, 8 cm tangerar varandra parvis utvändigt. I det triangelliknande området mellan dem (”triangelsidorna” utgörs av cirkelbågar) inskrivs en fjärde cirkel, som alltså tangerar de tre övriga cirklarna. Vilken radie har denna cirkel? (kräver eventuellt kunskaper utöver gymnasiekunskaper)