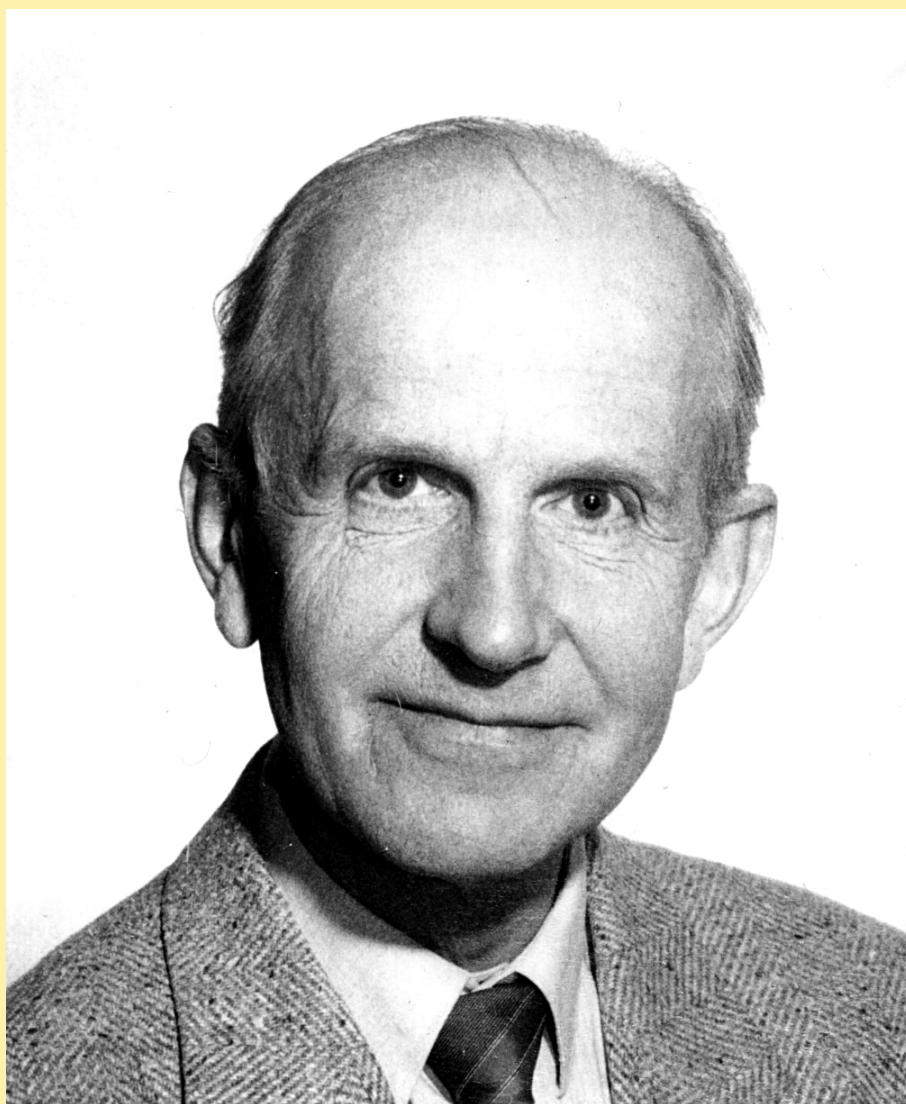




bulletinen

Svenska Matematikersamfundet

Nr 5 December 2012



Lars Hörmander
1931–2012

SMS bulletinen

utkommer fyra gånger per år, i februari, maj, oktober och december. Manusstopp är den första i respektive månad.

Ansvarig utgivare Mats Andersson
Redaktör Per-Anders Ivert
pa.iver@gmail.com
Adress SMS bulletinen c/o Per-Anders Ivert
Dag Hammarskjölds väg 5i
224 64 LUND

Manus kan insändas i allehanda format *.pdf*, *.doc*, *.docx*, *.odt*. Som tillägg önskas dock en ren textfil. Alla texter omformas till $\text{\LaTeX}$.

Svenska Matematikersamfundet

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem, betala in avgiften på samfundets *plusgiro* konto **43 43 50-5**.

Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter	(per år)
Individuellt medlemsskap	200 kr
Reciprocitetsmedlem	100 kr
(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal)	
Doktorander gratis under två år	
Gymnasieskolor	300 kr
Matematiska institutioner	större 8 000 kr, mindre 3 000 kr
(institutionerna får själva avgöra om de är större eller mindre)	
Ständigt medlemsskap	2 500 kr (engångsinbetalning)

Man kan även bli individuell medlem av EMS genom att betala in 250 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

Hemsida

<http://www.swe-math-soc.se>

Här återfinns bl.a. protokoll från möten.

Styrelse

ordförande	Mats Andersson 031-772 35 71 president@swe-math-soc.se
vice ordförande	Pär Kurlberg 08-790 65 82 vice-president@swe-math-soc.se
sekreterare	Elizabeth Wulcan 031-772 35 10 secretary@swe-math-soc.se
skattmästare	Milagros Izquierdo Barrios 013-28 26 60 treasurer@swe-math-soc.se
5:e ledamot	Jana Madjarova 031-772 35 31 bm5@swe-math-soc.se

Annonser

Dessa kan placeras inom en ram som t.ex. denna

helsida	3 000 kr
halvsida	1 500 kr
mindre	750 kr

Annonser i tre konsekutiva nr ger endast dubbla priset, dvs 1/3 rabatt

Annonser inlämnas som förlaga samt i förekommande fall som textfil.

Innehåll

Detta nummer

3

Nyheter från EMS

4

På tal om tal kommer ut i en tredje upplaga

5

Skolornas matematiktävling 2012

8

Tävlingsproblemen 2012

9

Tidsvinklat

10

Tillkännagivanden

15

Från institutionerna

16

Ordet är mitt

16

Omslagsbilden: Lars Hörmander 1931–2012. Foto från Lunds universitets bildbank.

Detta nummer

Per Anders Ivert

En matematiker av världsrang och en portalfigur i svensk matematik har gått ur tiden. Lars Hörmander avled den 25 november efter en längre tids sjukdom i en ålder av 81 år. Han hade utnämnts till professor i matematik vid Stockholms Högskola 1957, vid Stanford University 1963, vid Institute for Advanced Studies i Princeton 1964, varifrån han återvände till Sverige och verkade som professor i Lund från 1968 fram till sin emeritering 1996. Under denna sista period präglade han miljön vid den matematiska institutionen i Lund, som under sin glanstid kunde glädja sig åt många prominenta besökare från olika delar av världen. Efter 1996 har Lunds matematiska institution (numera Matematikcentrum), liksom universitetslivets villkor i allmänhet, förändrats på ett genomgripande sätt; en utveckling som Lars Hörmander betraktade med vemod.

Att ge en uttömmande redogörelse för Lars Hörmanders vetenskapliga gärning vore en överväldigande uppgift för en person; många högt kvalificerade matematiker krävs för detta, och det kommer säkert att ske, men SMS bulletinen är naturligtvis inte rätt forum för ett sådant projekt. Vi hoppas däremot att i kommande nummer, med hjälp av tidigare elever och kolleger till Lars Hörmander, teckna en belysande, om än ofullständig, bild av Hörmanders livsverk.

Själv har jag inte tillräcklig kompetens för att ens försöka göra en bedömning av Hörmanders rent matematiska produktion. I stället skulle jag vilja framhålla en aspekt som kanske inte har uppmärksammats i tillräcklig utsträckning, nämligen Hörmanders *matematisk-didaktiska* insatser. Han belönades år 2006 med Steele-priset (Leroy P. Steele Prize for Mathematical Exposition) av American Mathematical Society, främst för sitt epokgörande verk *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* och mästerverket *Complex Analysis in Several Variables*, men han hade också skrivit ett flertal lärotexter för studerande på olika nivåer. Vad som utmärker dessa texter är klarheten, precisionen och den ekonomiska framställningen. Hörmander hade förmågan att se det väsentliga i ett komplicerat sammanhang och sedan framställa saken därefter. Om man på

annat håll bekantat sig med ett tema, säg inom integrationsteori, riemannsk geometri eller funktionalanalys, förbluffas man av hur enkelt saker kan uttryckas då man senare läser Hörmanders framställning. Hans presentation av distributionsteorin, till exempel, är en stor didaktisk bragd.

År 1909 arrangerades i Stockholm, på initiativ av Gösta Mittag-Leffler, en kongress för matematiker från de nordiska länderna. Den andra skandinaviska matematikerkongressen avhölls två år senare i Köpenhamn, och sedan har denna kongress arrangerats med inte helt jämna mellanrum, numera vart fjärde år under namnet Nordiska matematikerkongressen, och i juni nästa år arrangeras den tjugosjätte nordiska matematikerkongressen av och vid Matematikcentrum i Lund. Denna gång träder Europeiska matematikersamfundet, EMS, in som medarrangör och samarbetspartner, och kongressen benämns följaktligen *26:e nordiska och första europeisk-nordiska matematikerkongressen*. En första kungörelse återfinns i avdelningen Tillkännagivanden i detta nummer, och vi får säkert anledning att återkomma med mer information under våren.

Matematikens roll i skolutbildningen har ifrågasatts och diskuterats, vilket kommenterades helt kort i förra numret av SMS bulletinen. En väsentlig fråga är om skolutbildningen i matematik förmår tilltala eleverna och väcka intresse för vidare studier i matematik. För exempel på framgångsrika projekt med den målsättningen vill jag hänvisa till artikeln under vinjetten Tidsvinklat i oktobernumret. Ett svenskt projekt i den andan är Sonja Kovalevsky-dagarna för skolungdomar, som varje år arrangeras av Nationalkommittén för matematik i samarbete med någon akademisk institution. I år var det institutionen för matematik och matematisk statistik vid Umeå universitet som var medarrangör och värd för arrangemanget i november. Genom en förbiseende från redaktörens (d.v.s. min) sida har vi i detta nummer inget reportage därifrån, men vi hoppas att under våren kunna komma med närmare upplysningar.

Därmed överlämnas SMS bulletinen för december 2012 i läsarnas händer.

Nyheter från EMS

Lars Hörmander 1931–2012

Lars Hörmander, som tilldelades en Fieldsmedalj år 1962, avled 25 november vid 81 års ålder. Hörmander var en kraftfull matematiker som revolutionerade den moderna teorin för partiella differentialekvationer. Bland många andra bidrag kommer hans teorier för pseudodifferentialoperatorer och Fourierintegraloperatorer att ha bestående värde. Han var professor vid Lunds universitet från 1968 till sin emeritering 1996 och fungerade som föreståndare för Mittag-Leffler-institutet från 1984 till 1986.

Mathematics of Planet Earth 2013

Mer än 100 akademiska institutioner och lärde sällskap har förenats i ett världsomspännande initiativ: Mathematics of Planet Earth (MPE) 2013. Denna årslånga kraftsamling ska fästa uppmärksamheten på matematikens bidrag i kampen mot globala problem, inbegripet naturkatastrofer såsom orkaner, jordbävningar och tsunamier; klimatförändringar; hållbarhet; pandemier. Deltagarna i MPE2013 kommer att finansiera workshops, forskningskonferenser, offentliga föredrag, uppsökande verksamhet och studiemöjligheter för alla åldrar. Initiativet invigdes officiellt den 7 december 2013.

Första europeisk-nordiska matematikerkongressen

Den 26:e nordiska matematikerkongressen kommer att hållas i Lund från 10 till 13 juni 2013. Mer information på annan plats i denna tidning

ESF tilldelar Uffe Haagerup det 14:e europeiska Latsispriset

Europeiska vetenskapsstiftelsen ESF har tilldelat professor Uffe Haagerup vid Köpenhamns universitet årets europeiska Latsispris. Prisets ämne var detta år matematik och Prof. Haagerup tilldelades priset för sina banbrytande och viktiga bidrag till operatoralgebra samt även till andra nya och utmanande områden av matematiken. Priset har instiftats av den Genèvebaserade Latsisstiftelsen och uppgår till 100 000 schweiziska franc. Nobelpristagare varnar för nedskärningar i EU:s forskningsbudget. En delegation som leddes av Nobelpristagare har träffat Europeiska parlamentets ordförande Martin Schulz, Europeiska rådets ordförande Herman

Van Rompuy och Europeiska kommissionens ordförande José Manuel Barroso för att vädja till EU-ledarna att säkra den fortsatta budgeten för forskning och innovation, Horisont 2020. De överlämnade ett öppet brev, undertecknat av 44 Nobelpristagare och sex Fieldsmedaljörer med en varning för de dramatiska följderna av eventuella budgetnedskärningar för forskning och innovation.

Ramanujanpriset 2013

Ramanujanpriset för unga matematiker från utvecklingsländer som utdelas av Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP) utdelas årligen till en ung forskare från ett utvecklingsland. Pristagaren får ej ha uppnått 45 års ålder den 31 december det år priset utdelas och ska ha utfört framstående forskning i ett utvecklingsland. Priset uppgår till \$15000. Pristagaren kommer att inbjudas till ICTP för att motta priset och hålla en föreläsning. Priset tilldelas vanligen en person men kan också delas lika mellan mottagare som lämnat bidrag inom samma område. Nomineringar för 2013 års pris mottages fram till 1 februari 2013.

EMS etiska kod godkänd

År 2010 inrättade EMS en etisk kommitté. Dess första uppgift var att utarbeta ett utkast till en etisk kod (Code of Practice). Detta arbete fullbordades i april 2012. Utkastet diskuterades vid rådets möte i Kraków i juli 2012, och koden godkändes av exekutivkommittén i slutet av oktober 2012 och har därmed trätt i kraft. Den nu godkända versionen kan laddas ned från <http://www.euro-math-soc.eu/system/files/COP-approved.pdf>

Dokumentet innehåller rekommendationer till författare av matematiska artiklar, till redaktörer och förläggare, till granskare och till användare av bibliometriska uppgifter. EMS etiska kommitté erbjuder sig att hjälpa till med utredning av fall av oetiskt beteende. Koden är tänkt som ett verktyg i kampen mot etiska förseelser, såsom plagiat, underlåtenhet att ge korrekta erkännanden etc., vilket blivit allt vanligare inom matematiken, även om de flesta matematiker iakttar god sed såsom den beskrivs i koden och undviker det oetiska beteende som också beskrivs i koden. Observera att den engelskspråkiga versionen som återfinns under länken ovan är den definitiva. Mer information finns på etiska kommitténs officiella webbplats <http://www.euro-math-soc.eu/>

[comm_ethics.html](#). Kommitténs ordförande är prof. Arne Jensen <matarne@math.aau.dk>

Nytt internationellt utbildningsnätverk STRIKE - Novel Methods in Computational Finance”

Under de senaste åren har beräkningskomplexiteten hos matematiska modeller som används i finansmatematik genomgått en oerhörd tillväxt. Avancerade numeriska metoder är oundgängliga för de flesta av dagens tillämpningar i finansbranschen. Marie Curie-åtgärderna är namnet på ett av EU-kommissionen finansierat program för främjande av forskning. En del av detta program är ”Internationella utbildningsnätverk”(International Training Networks, ITN). Nu har ett sådant nätverk bildats för utbildning av europeiska experter på finansmatematik och beräkningsvetenskap i syfte att utbyta och diskutera aktuella insikter och idéer och att lägga en grund för framtida samarbete.

Påminnelser

Heidelbergers pristagarforum

Ett tillfälle för studenter i matematik och datalogi att träffa Abelprestagare, Fieldsmedaljörer och vinnare av Turingpriset. Se förra numret av SMS bulletinen samt <http://heidelberg-laureate-forum.org>

EMS monografipris: Begäran om bidrag online

Med anledning av sitt tioårsjubileum utlyser EMS Publishing House priset EMS Monograph Award. Det

ges vartannat år till författaren/författarna av en monografi inom vilket område som helst av matematiken, som av en urvalskommitté bedöms vara ett framstående bidrag inom sitt område. Priset uppgår till 10 000 euro, och den vinnande monografin kommer att ges ut av EMS Publishing House i serien EMS Tracts in Mathematics. Sista dag för insändande av manuskript: 30 juni 2013. Information: http://www.ems-ph.org/EMS_Monograph_Award.php

EUROMATH 2013 i Göteborg

Som en uppföljning till liknande arrangemang under 2009–2012 avhålls konferensen EUROMATH 2013 för skolungdomar i åldern 12–18 år i Göteborg under veckan 10–14 april, 2013. Konferensen kommer att bestå av flera workshops och möten gällande olika ämnen. Deltagare uppmuntras att presentera sina arbeten eller projekt i matematik. EMS är en av sponsorerna tillsammans med bland andra återförsäkringsbolaget Munich Re. Information:

<http://www.euromath.org/index.php?id=86>

EMS kalendarium

22-23 mars 2013	ERCOM, Luminy
22-23 mars 2013	Etiska kommittén, London
5-7 april 2013	Gemensamt matematiskt veckoslut EMS-DMF, Århus, Danmark
12-13 april 2013	Kommittén för utvecklingsländer, Linköping.
25-26 maj 2013	Raising Public Awareness Committee, Ven, Sverige
2-6 september 2013	16:e konferensen Kvinnor i matematiken, Bonn



På tal om tal kommer ut i en tredje upplaga

Barbro Grevholm

Den tredje upplagan av läseboken om matematik kallad 'På tal om tal' har utkommit 2012. Första upplagan publicerades 1993 och jag hade glädjen att använda boken med lärarstuderande i matematik under andra halvan av 1990-talet. Författaren Lars Nystedt gjorde faktiskt också ett personligt besök vid Högsolan i Kristianstad där

jag var verksam på den tiden. Lars Nystedt har verkat i många år som universitetslektor i matematik vid Stockholms universitet och var en gång lärjunge till nyligen bortgångne professor Lars Hörmander. Boken som omfattar 326 sidor utges på författarens eget förlag, Instant Mathematics.

I boken behandlas tal och talbegreppet både ur matematisk, historisk och humanistisk synvinkel. Författaren inleder med att peka på gapet mellan de två kulturerna, den naturvetenskapliga och den humanistiska och hävdar att boken speglar matematikens dubbla tillhörighet, till de båda kulturerna. Talet om de två kulturerna för naturligtvis läsarens tankar till C. P. Snow som för mer än 50 år sedan talade och skrev om 'De två kulturerna och den vetenskapliga revolutionen', ett verk som dock inte finns med bland de sparsmakat utvalda referenserna. Nystedt påpekar att han valt ut endast ett verk inom respektive område som han skriver om och att läsaren därifrån kan ta sig vidare i referenserna i dessa hänvisningar. Det är säkert ett klokt agerande av författaren med tanke på hans åsyftade läsarkrets. Boken är avsedd för alla som är intresserade av tal men Nystedt har enligt egen utsago haft gruppen lärare i matematik i tankarna då han skrev den. För att boken även ska kunna användas i utbildningen av lärare finns en övningsbok, som hör till, med titel "Tal till 'På tal om tal'."

Boken är fyllig och innehåller allt man kan förvänta sig av en läsebok om tal: Tal och hur de betecknas och har växt fram historiskt, historik om olika talsystem, om olika räknesätt, ekvationer, relationer, axiom och bevis, tallinjen och talplanet, polynom och ekvationer, oändligheter, talpar, potensräkning, de matematiska tecknens historia och mycket mera. Författaren har försökt göra boken, som han säger i en not på sidan 136, 'self-contained' men ger upp där på punkten att införa och gå igenom de trigonometriska funktionerna. Det skulle föra för långt, anser han. Den egentliga läsebokstexten kulminerar med den gyllene satsen, och boken avslutas därefter med ett femtontal kortare uppsatser om olika teman såsom Hilberts hotell, Om magiska kvadrater, Fyra trollkonster och Om talmystik. Framställningen är redig och klar, lätt att följa och läsaren får tydligt höra författarens röst. Ibland kommer direkta sidoreplikeringar till läsaren från författaren som på sidan 45 där han säger: "Jag tycker att detta resonemang – i all sin enkelhet – är ett stycke vacker matematik!" Den som inte tidigare hört att matematik kan vara vacker får här alltså smakprov på vad matematikern Nystedt tycker är vackert. På sidan 47 säger författaren: "Läs detta långsamt och minst två gånger och med penna och papper: Här står alltså beviset för att 'minus gånger minus är plus'." Trots att Nystedt vänder sig till lärare är han inte rädd för att förolämpa dem. På sidan 50 skriver han: Det är kanske inte så underligt, att det fortfarande finns många lärare i matematik som inte vet varför 'minus gånger minus ger plus', och som därför liksom Auden i citatet ovan väljer att tåga ihjäl problemet. Citatet av W. H. Auden lyder: "Minus times minus is plus. The reason for this we need not discuss". Vad vi

bestämt vet idag, som inte var känt 1993, är att mer än en tredjedel av dem som verkar som matematiklärare i svensk skola inte är utbildade till att vara matematiklärare. Däremot känner jag inte till om någon har undersökt om det är fler eller färre matematiklärare idag eller för 20 år sedan som känner till varför 'minus gånger minus ger plus'. Frågor av det slaget kunde någon doktorand i matematikdidaktik gärna ta sig an. Konsekvensen av att mer än var tredje som undervisar i matematik inte är utbildad lärare i matematik är nog mer förödande än att vissa inte kan förklara varför 'minus gånger minus ger plus' (vilket givetvis är illa nog det). Medan jag höll på att studera den nya upplagan av läseboken slumpade det sig så att jag fick den lilla boken 'En gåtfull vänskap' (författad av Yoko Ogawa, 2003) i gåva och tog mig tid att läsa den genast. Den handlar om en tidigare professor i talteori (i boken kallad doktorn) som i en trafikolycka 1975 förlorat minnet. Han minns endast vad som hänt honom de senaste 80 minuterna. Historien vi får följa är att han får en ny hushållerska som har en tioårig son och hur dessa tre försöker klara av vardagen trots doktorsminnesproblem. Professorn har inte glömt den talteori han tidigare studerat och undervisat om och i boken presenteras på ett trevligt och spännande sätt mycket matematik om tal. När hushållerskan anländer frågar doktorn när hon är född. Den 20 februari. Det ger talet 220. Det kopplar doktorn till talet 284 som är numret på en klocka han fick i pris av rektorn. Så småningom reder man ut att de två talen är vänskapliga tal. Vänskapliga talpar skriver Nystedt också om och man kan lära sig ungefär samma sak om dem i På tal om tal som i den lilla romanen jag läste.

Det doktorn i romanen älskar mest är primtal så läsaren får sig mycket till livs om primtals egenskaper, primtalstvillingar, deras oändliga antal, perfekta tal, men också om talsummor, Fermats sats, Eulers identitet och till och med Artins förmodan. All denna matematik kommer fram i samtal mellan doktorn, hushållerskan och hennes son som kallas Roten, på grund av sitt platta huvud. I samtalen visar doktorn prov på stort tålamod, förmåga att lyssna och ställa följdfrågor och han använder uppmuntran och beröm som verktygsmedel för att få de båda andra att vilja tänka vidare på matematiska frågor.

Vid namnet Artins förmodan studsar jag till för Emil Artin var den enda icke-svenska matematiker jag hade tillfälle att lyssna till under min studietid vid Lunds universitet. Det internationella utbytet var sparsamt på den tiden. En intresserad läsare som börjar med att läsa boken 'En gåtfull vänskap' kan gå vidare till Nystedts bok 'På tal om tal' och där få vidare svar på sina undringar om det som beskrivs i romanen. Nystedts text å

andra sidan bidrar också till att ge liv åt många matematiker ur historien.

Boken lämpar sig väl för lärarstuderande och nyblivna lärare och kan ge inspiration för egen undervisning. Det enda som skapade problem för mina studenter var att Nystedt skriver så mycket om tal som inte finns. Det återkommer flera gånger. På sidan 41 kommer 'Om att räkna med tal som inte finns, del I' och då handlar det om noll och negativa tal. Nästa gång kommer rubriken på sidan 90 med del II (rationella tal) och därefter på sidan 107 med del III (irrationella tal), härnäst sidan 120 med del IV (om decimalbråk) och slutligen på sidan 134 med del V (om komplexa tal). Nystedts teknik är alltså att tala om tal som inte finns när han successivt behöver utvidga den talmängd som behandlas för att kunna lösa nya problem. Först finns talen inte och så inför man dem trots allt och ser att allt fungerar till belåtenhet. Kruxet är bara att allt detta tal om tal som inte finns ledde till att de lärarstuderande verkligen fick för sig att det bara är de positiva hela talen som finns. Det tror jag är en olycklig uppfattning hos en blivande lärare. Vad vi menar med att tal finns är förstås å andra sidan en djup filosofisk fråga.

Avsnitten i läseboken kan läsas i vilken ordning man önskar och den kan också användas som en uppslags- och inspirationsbok. Tonen i hela boken är trevlig och sympatisk och författaren ger små tips om när läsare, som inte är så vana vid matematiska teknikaliteter, ska akta sig lite och eventuellt spara kapitlet till ett senare tillfälle. Vid en jämförelse mellan första och tredje upplagan finner man att väldigt lite skiljer dem åt. Boken i

tredje upplagan är en bra bit tjockare än den första men det verkar bero på papprets kvalitet. Några få tillägg har gjorts mellan upplagorna. På sidan 1 har tillkommit en serie med Calvin och Hobbes, där Calvin undrar varför vi ska hålla på med tal när vi alla förr eller senare ska dö. Svaret från läraren blir: Nu går vi till sidan 83. Calvin drar slutsatsen: Ingen gillar oss med vida vyer. Vidare har tillkommit ett sakregister på sidan 323 och en symbolförteckning på sidan 326. Ett avsnitt har bytt rubrik. Det som 1993 hette Aztekernas siffror har nu rubriken Mayafolkets siffror. Författaren har alltså inte sett sig föranledd att ändra på det huvudsakliga innehållet i boken sedan 1993. Det kan betyda att de kommentarer boken föranlett under årens lopp varit positiva.

På tal om tal kan verkligen rekommenderas till alla som är intresserade av tal. Boken bjuder på trevlig, lättläst läsning av ett för skolmatematiken viktigt område och kan bidra till matematisk allmänbildning för att överbrygga den klyfta Nystedt inleder med att peka på, mellan humaniora och naturvetenskap.

Barbro Grevholm är professor i matematikdidaktik vid universitetet i Agder, Norge.

Lars Nystedt: På tal om tal
3:e upplagan, 326 sidor
Instant Mathematics 2012
ISBN10: 9163022680
ISBN13: 9789163022685

Skolornas matematiktävling 2012

Finalen i Skolornas Matematiktävling gick lördagen den 24 november i Luleå. Mårten Wiman från Danderyds gymnasium vann årets upplaga av Skolornas matematiktävling. Det är hans andra seger i rad – en fantastisk bedrift. Finaltävlingen organiserades av Luleå tekniska universitet.

Det var 25 elever som deltog; 22 av dem kvalificerade sig via kvalomgången i september, och tre (bland dem Mårten själv) via IOI (den Internationella olympiaden i programmering), som i år gick samtidigt som kvalet.

Här är de sex bästa placeringarna i finalomgången:

- 1 Mårten Wiman, Danderyds gymnasium, Danderyd, 41 poäng
- 2 Lars Åström, Malmö Borgarskola, Malmö, 34 poäng
- 3 Lisa Lokteva, Hvitfeldtska gymnasiet, Göteborg, 33 poäng
- 3 Junyu Gao, Malmö Borgarskola, Malmö, 33 poäng
- 5 Emma Johansen, Berzeliusskolans gymnasium, Linköping, 31 poäng
- 5 Yue Jiao, Blackebergs gymnasium, Stockholm, 31 poäng

Maximal uppnåbar poängsumma var 42 poäng.

Nu följer en korrespondenskurs för alla finalister. Laget som kommer att representera Sverige vid den Internationella matematikolympiaden i Colombia i juli 2013 väljs ut i maj. Urvalet kommer att baseras på resultaten i SMT, i korrespondenskursen samt i den Nordiska matematiktävlingen som äger rum i april.

Vi presenterar finalens problem i detta nummer. Lösningsförslag finns på tävlingens hemsida www.mattetavling.se



Här är tättgruppen i matematiktävlingen 2012. Bilden har tagits av Karl-William Sandström.

Tävlingsproblemen 2012

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Luleå den 24 november 2012

1. Funktionen f uppfyller villkoret

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$$

för alla reella x , för vilka funktionen är definierad. Bestäm $f(2012)$, om det är känt att $f(1000) = 2012$.

2. Talet 201212200619 har en faktor m sådan att $6 \cdot 10^9 < m < 6,5 \cdot 10^9$. Bestäm m .

3. Kateterna AC och BC i en rätvinklig triangel ABC har längderna b och a , respektive. En cirkel med medelpunkt i C tangerar hypotenusan AB i punkten D . Tangenterna till cirkeln genom punkterna A och B träffar cirkeln i punkterna E och F , respektive (där E och F båda är skilda från D). Uttryck längden av sträckan EF som en funktion av a och b .

4. Givet att a är en reell lösning till polynomekvationen

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \dots - x - 1 = 0, \quad n \text{ positivt heltal,}$$

visa att $a = 1$ eller $-1 < a < 0$.

5. Hörnen i en regelbunden 13-hörning färgas i tre olika färger. Visa att det finns tre hörn som har fått samma färg och som utgör hörn i en likbent triangel.

6. En cirkel är inskriven i en parallelltrapets. Visa att parallelltrapetsets diagonaler skär varandra i en punkt som ligger på den diameter till cirkeln som är vinkelrät mot de två parallella sidorna.

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Polska mängdteoretiker och stora kardinaltal

John Stillwell

Beskrivande mängdlära

Mängdlära blev en viktig del av polsk matematik under 1920-talet, och polska insatser från det årtiondet är i själva verket viktiga för mängdläran än idag. En stor del av förtjänsten för detta måste tillskrivas Wacław Sierpiński (1882–1969) som insåg mängdlärans potential och påverkade den efterföljande generationen av polska matematiker att specialisera sig inom detta område. Sierpiński blev intresserad av mängdlära som forskarstudierande år 1907, men han var i stort sett självlärd tills han år 1916 anslöt sig till gruppen "Lusitania" kring Nikolaj Lusin i Moskva. Lusins forskning var inriktad mot *beskrivande mängdlära*: klassificering av mängder av reella tal efter komplexiteten hos deras definitioner.

Beskrivande mängdlära initierades av Cantor under 1880-talet, som en väg att angripa kontinuumproblemet. Cantors kontinuumhypotes säger i sin ursprungliga (svaga) form att varje mängd av reella tal är antingen uppräknelig eller likmäktig med mängden R av alla reella tal. Cantor kunde verifiera sin förmodan för slutna mängder, men slutna mängder är av relativt låg komplexitet. Mycket högre komplexitet uppenbarades när Borel [2] införde vad vi nu kallar Borelmängder och Lebesgue [8] visade att Borelmängderna bildar en hierarki med överuppräkneligt många nivåer. De slutna mängderna utgör, tillsammans med sina komplementmängder, bara den första nivån. Det finns mängder på nivån α för varje nummerbart ordinaltal α – nämligen uppräkneliga föreningar och snitt av mängder på lägre nivåer – och Lebesgue visade att det finns nya mängder på varje nivå.

Lebesgue [8] visade också att det finns mängder av reella tal som inte ingår i Borelhierarkin. Det betyder att även om kontinuumhypotesen skulle bekräftas för Borelmängder (vilket gjordes av Lusins elev Alexandroff år 1915) skulle det vara nödvändigt att driva den vidare, in i världen av mängder bortom Borelmängderna. Första steget in i denna värld togs av en annan av Lusins elever, Michail Suslin, som år 1916 upptäckte att nya mängder genereras från Borelmängder helt enkelt genom projek-

Speciellt bildar projektionerna av Boreldelmängder av R^2 en klass som är större än klassen av Boreldel-

mängder av R . Projektionerna av Borelmängder (som kallas *analytiska* mängder) och deras komplementmängder utgör första nivån av en ny hierarki av mängder som kallas *projektiva* mängder. De projektiva mängderna på nivå $n + 1$ är projektioner av mängder på nivå n samt deras komplementmängder, och återigen kan det visas att varje nivå innehåller mängder som inte tillhör den föregående.

Lusin och hans elever drev energiskt kontinuumhypotesen (och andra frågor, såsom mätbarhet) in i den projektiva hierarkin. Till exempel bevisade de att projektioner av Borelmängder är mätbara, liksom Borelmängderna själva, och satisfierar kontinuumhypotesen. Emellertid stötte de på svårigheter som tycktes oöverstigliga när det gällde att utvidga dessa resultat redan till den andra nivån i den projektiva hierarkin. Lusin [9] uttalade en anmärkningsvärd profetia:

Man vet inte, och kommer aldrig att veta, om projektioner av komplementmängder till analytiska mängder (som antas vara överuppräkneliga) har kontinuerlig kardinalitet...inte heller om de är mätbara.

Teorin för projektiva mängder tycktes ha gått i stå, och den framskred faktiskt inte särskilt mycket längre förrän på 1970-talet. Intressant är att framsteget, när det kom, berodde på två begrepp som införts av polska mängdteoretiker på 1920-talet: *bestämthet* och *stora kardinaltal*.

Bestämthet

År 1925 skrev Hugo Steinhaus ett kort arbete om spelteori där begreppet *oändliga spel* mellan två spelare med fullständig information infördes. Det vill säga att vardera spelaren känner till den andres drag, och att det följaktligen finns en möjlighet till *vinnande strategier*. Ett enkelt exempel på ett sådant spel föreslogs av Steinhaus elev Stefan Banach tillsammans med Stanisław Mazur. Två spelare, vi kan kalla dem I och II, turas om att välja decimalerna i ett reellt tal mellan 0 och 1. Spelare I väljer siffran a_1 , varefter II väljer siffran b_1 , varefter I väljer a_2 , II väljer b_2 och så vidare. Spelare I vinner spelet om $0, a_1 b_1 a_2 b_2 \dots \in A$, där A är en i förväg vald mängd, medan II vinner om $0, a_1 b_1 a_2 b_2 \dots \notin A$.

I det här spelet är en vinnande strategi för I en funktion $f(a_1b_1 \dots a_nb_n) = a_{n+1}$ som bestämmer I:s nästa drag, a_{n+1} , vid varje steg, på så sätt att det fullständiga spelet $a_1b_1 \dots$ innebär vinst för I.

Steinhaus var medveten om att en av spelarna har en vinnande strategi i den *ändliga* versionen av detta spel, där varje spelare får högst n drag, och han förmodade att detsamma gäller för det oändliga spelet, för vilken mängd A som helst. Ett exempel är då $A = \mathbb{Q}$, mängden av rationella tal. I det fallet kan II alltid vinna genom att spela en icke-periodisk följd $\langle b_1, b_2, b_3, \dots \rangle$, för då blir följderna $a_1b_1a_2b_2 \dots$ också icke-periodisk och representerar alltså ett irrationellt tal (i bas 10 eller bas 2 eller vilken bas som helst).

Emellertid vederlades Steinhaus förmodan snart av Banach och Mazur. Med antagande av urvalsaxiomet visade de att det finns en mängd A för vilken ingendera spelaren har en vinnande strategi. En sådan mängd kallas *icke-bestämd*, och mängder A för vilka det finns en vinnande strategi kallas *bestämd* [förklaringen till denna perfekt particip-form, som kan tyckas konstig, torde vara att det är *spelet* som är bestämt, och termen har sedan överförts till den bestämmande mängden; övers.anm.].

Banachs och Mazurs resultat publicerades inte vid den tidpunkten, och ämnet oändliga spel tycks ha legat i dvala i flera årtionden. Det skedde ett uppvaknande på 1960-talet då Steinhaus återvände till ämnet i samarbete med Jan Mycielski. Efter all denna tid konstruerades de enda kända icke-bestämda mängderna med hjälp av urvalsaxiomet (AC). Eftersom AC också var känt för att ha vissa obehagliga konsekvenser, som icke mätbara mängder, tänkte Steinhaus och Mycielski att det kunde finnas ett behagligt alternativ: att *alla mängder A av reella tal är bestämda*. År 1961 föreslog de detta antagande som ett nytt axiom, *bestämthetsaxiomet* (Axiom of Determinacy, AD).

Skönheten hos AD ligger i att det korrigerar vissa "dåliga" konsekvenser av AC och tillhandahåller nya bevis för några "goda" konsekvenser. Till exempel bevisade Mycielski och Świerczkowski [15] att AD medför att alla mängder av reella tal är mätbara, och AD medför också några svaga urvalsprinciper som är användbara i analys. Om till exempel X är en *uppräknelig* familj av mängder S av reella tal, så finns en urvalsfunktion f för X ; det vill säga att $f(S) \in S$ för varje $S \in X$. Denna urvalsprincip är tillräcklig för att bevisa en ofta använd egenskap hos kontinuitet: Om $g(a_n) \rightarrow g(a)$ för varje följd $a_n \rightarrow a$, så är g kontinuerlig i punkten a .

En annan spektakulärt "god" konsekvens av AD var den svaga formen av Cantors kontinuumhypotes: att varje överuppräknelig mängd av reella tal har kontinu-

ets mäktighet. Detta förutskickades av Banach och Mazur år 1935 (se Mauldin [12], sid. 113–117) – även om de naturligtvis inte trodde på AD – och bevisades av Mycielski–Świerczkowski [15] och Davis [4]. Beviset går ut på att finna en överuppräknelig sluten delmängd av varje överuppräknelig mängd av reella tal, vilket visar att Cantor var på rätt spår.

Dessa resultat var uppmuntrande, men de visade inte att AD var förenligt med Zermelo–Fraenkels vanliga axiom för mängdläran, ZF. Oförenligheten av AD med AC blev ett mindre bekymmer när Cohen [3] bevisade att AC inte är en konsekvens av ZF, men det var fortfarande svårt att se hur AD kunde vara förenligt med ZF. Sammanjämkningen mellan AD och ZF skulle, när den kom, bero på teorin för stora kardinaltal – ännu en idé som går tillbaka till de polska mängdteoretikerna på 1920-talet.

Stora kardinaltal

Axiomen i ZF-mängdläran säger att det existerar mängder (den tomma mängden och en oändlig mängd som innehåller något i stil med de naturliga talen) och att vissa operationer på mängder genererar nya mängder. Operationerna i fråga är

1. Parbildning: att av två mängder x och y bilda ett icke ordnat par $\{x, y\}$.
2. Union: att för en given mängd X bilda unionen av dess medlemmar, $\bigcup_{x \in X} x$.
3. Potensmängd: att för en given mängd X bilda $\mathcal{P}(X) = \{S; S \in X\}$.
4. Substitution: att för en given mängd X och en funktion f med definitionsområde X bilda $f(X) = \{f(x); x \in X\}$.

De mest problematiska av dessa operationer är potensmängd och substitution, för de innebär en oerhörd utvidgning av mängdernas värld. Som redan nämnts är det väsentligt att mängden $\mathcal{N}$ existerar. Potensmängdsaxiomet ger oss genast de överuppräknelige mängderna $\mathcal{P}(\mathcal{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{N})), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{N}))), \dots$ med växande kardinalitet. Substitution låter oss samla dessa mängder som element i den nya mängden $X = \{\mathcal{P}(\mathcal{N}), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{N})), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{N}))), \dots\}$, vars union har ännu högre kardinalitet och så vidare.

Vi kan alltså bilda mängder av häpnadsväckande storlek med hjälp av potensmängdsbildning och substitution. Kan det finnas mängder som *inte* är nåbara på detta sätt? Med andra ord, kan en överuppräknelig mängd $\mathcal{Y}$ vara *sluten* under operationerna

potensmängdsbildning och substitution? (Närmare bestämt, $X \in \mathcal{Y}$ medför att $\mathcal{P}(X) \in \mathcal{Y}$ och $f(X) \in \mathcal{Y}$ för varje funktion f .) En sådan mängd $\mathcal{Y}$ säges vara (starkt) *onåbar*. På sätt och vis är detta ett blygsamt antagande, för oändlighetsaxiomet ger en numererbar mängd med dessa slutenhetsegenskaper.

Men på ett annat sätt är antagandet djärvt, för *om en starkt onåbar mängd existerar, så kan dess existens inte bevisas i ZF*. Orsaken till det är att en sådan mängd utgör en modell för ZF. På grund av sin natur uppfyller en onåbar mängd Z potensmängds- och substitutionsaxiomen i ZF, och vi kan lätt modifiera den så att den också uppfyller de övriga axiomen. Men ZF gör att vi kan visa att det finns en *minimal* sådan mängd Z ; det vill säga, en som inte har några onåbara element. En mängd Z som är minimal i denna mening satisfierar utsagan ”det finns ingen starkt onåbar mängd” och dessutom axiomen i ZF. Alltså kan existensen av en onåbar mängd inte följa ur axiomen i ZF.

Detta märkvärdiga sakernas tillstånd, där existensen av ett objekt gör det omöjligt att bevisa dess existens, verkar ha upptäckts av Kazimierz Kuratowski [7]. Hans redogörelse är mycket skissartad, men den är det första publicerade exemplet på en utsaga som inte är bevisbar i ett starkt axiomsystem. De mest kända exemplen är naturligtvis Gödels [5] exempel i talteori och de många exemplen i mängdlära som följde ur Gödels [6] och Cohens [3] resultat, bland dem AC och kontinuumhypotesen. Emellertid är onåbara objekt troligen de exempel som är lättast att förstå, och de förblir ett slags måttstock för obevisbarhet. Varje ny och större typ av onåbar mängd medför (i ZF + AC) existensen av alla mindre onåbara mängder, medan dess egen existens förblir obevisbar. Om AC antas, kan varje onåbar mängd S identifieras med sitt kardinaltal σ (det minsta ordinaltal som är likmäktigt med S) och i det här sammanhanget kallar man de onåbara mängderna *stora kardinaltal*.

Den första nya typen av stort kardinaltal upptäcktes av Kuratowskis elev Stanisław Ulam år 1930. Samtidigt upptäckte Ulam att stora kardinaltal kunde uppstå ”naturligt”, så att säga utan reflektion över mängdlärens axiom.

Ulam tänkte på mätbara mängder, men med avseende på ett enklare måttbegrepp än Lebesguemåttet. Kom ihåg att Lebesguemåttet μ på R har följande egenskaper.

1. $\mu([a, b]) = b - a$ (speciellt är måttet av en punktmängd noll),
2. μ är uppräknligt additivt, det vill säga för varje svit $S_1, S_2, S_3, \dots$ av inbördes punktfrämmande, mätbara mängder gäller $\mu(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \mu(S_3) + \dots$,

3. μ är translationsinvariant, det vill säga $\mu(S) = \mu(\{x + r; x \in S\})$ för varje $r \in R$.

Translationsinvariansen var problematisk, för den leder till icke mätbara mängder, vilket bevisades av Vitali [19] under antagande av AC. Detta föranledde Banach [1] att släppa kravet på translationsinvarians och samtidigt låta R ersättas av en godtycklig mängd S och ställa frågan om det finns något S som kan bära ett *reellt* ”mått” m i följande mening.

1. $m(S) = 1$
2. $m(\{x\}) = 0$ för varje $x \in S$ för varje svit $S_1, S_2, S_3, \dots$ av inbördes punktfrämmande, mätbara mängder gäller $\mu(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \mu(S_3) + \dots$,
3. för varje svit $S_1, S_2, S_3, \dots$ av inbördes punktfrämmande delmängder av S gäller $\mu(S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \dots) = \mu(S_1) + \mu(S_2) + \mu(S_3) + \dots$.

Ulam [18] visade, och förbättrade därmed ett av Bannachs resultat, att att varje sådan mängd S måste vara mycket stor; den måste vara vad vi nu kallar *svagt* onåbar. Sedan fann han, genom att ändra på måttbegreppet till ett *tvåvärt* mått med värden 0 och 1, att varje mängd S som bär ett tvåvärt mått måste vara *starkt* onåbar, så dess existens kan inte bevisas i ZF (eller i ZF + AC).

Ett tvåvärt mått m på S har följande egenskaper.

1. För varje $T \subseteq S$ är $m(T) = 0$ eller $m(T) = 1$.
2. $m(T) = 1$ om och endast om $m(S \setminus T) = 0$,
3. om $m(T_i) = 0$ för varje T_i i en familj av delmängder av S med kardinalitet lägre än kardinaliteten för S så är $m(\cup_i T_i) = 0$.

Den sista egenskapen är en generalisering av egenskapen hos Lebesguemåttet på R att varje uppräknelig union av mängder med mått noll själv har mått noll. Ulams krönande resultat [18] var att *varje överuppräknelig mängd S som medger att tvåvärt mått är (starkt) onåbar*.

Ulams resultat avslöjade att onåbarhet ligger nära den vanliga matematikens värld och han införde samtidigt en ny aspekt på ”storhet” (nämligen tvåvärd mätbarhet). Huruvida tvåvärt mätbara mängder eller *mätbara kardinaltal* verkligen var större än de helt enkelt onåbara förblev ett öppet problem i mer än 30 år.

Några luckor fylls

De polska upptäckterna under 1920-talet och tidigt 1930-tal var fragment av en större bild, men på den tiden var bilden till större delen en blank duk. Å ena sidan

fanns några fläckar av bestämdhet: några mängder visste man var bestämda, andra var det inte, och de senare fann man bara med hjälp av AC. Å andra sidan fanns det ett till synes orelaterat skimmer av stora kardinaltal. Den enda antydning till ett samband med reella tal var Ulams upptäckt att stora kardinaltal uppträder i samband med mätbarhetsfrågor. Den viktiga utvecklingen i mängdlära under 1960-talet, 1970-talet och 1980-talet var att visa att det verkligen *finns* en stor bild som omfattar bestämdhet och stora kardinaltal samt att fylla i dess många detaljer.

För att förklara hur detta kom sig måste jag påminna om Gödels viktiga resultat [6] att AC är förenligt med kontinuumhypotesen. Gödel definierade en klass L av vad han kallade *konstruerbara* mängder. Dessa mängder är ”konstruerbara” i den meningen att de kan definieras i termer av ordinaltal, och eftersom alla definitioner i språket för ZF ingår, är det förenligt med axiomen i ZF att anta att alla mängder tillhör L . Detta *konstruerbarhetsaxiom* förkortas vanligen $V = L$, där V betecknar klassen av alla mängder. Det följer genom välordning av alla möjliga mängddefinitioner att L är en välordnad klass, vilket medför att AC gäller i L . AC är därför förenlig med ZF eftersom ZF är förenlig med $V = L$. Ett mer sofistikerat resonemang visar att kontinuumhypotesen gäller i L , så den är också förenlig med ZF.

Gödels resultat undanröjde rädslan att AC kunde vara oförenligt; faktiskt erbjöd det explicita definitioner av mängder som tidigare existerat på nåder genom AC, såsom Vitalis icke mätbara mängd. Då Gödel betraktade den välordning av $\mathbf{R}$ som följde ur $V = L$ (till synes med lite hjälp av Ulam) fann han att $V = L$ ger icke mätbara mängder på andra nivå i den projektiva hierarkin. Det är alltså förenligt med ZF att mätbarhet bara sträcker sig till den första nivån av den projektiva hierarkin – precis dit Luzin och hans elever hade kunnat pressa den. På liknande sätt följer, eftersom bestämdhet medför Lebesguemätbarhet, att det är förenligt med ZF att det finns en icke bestämd projektiv mängd. (I själva verket visade Mycielski [13] att $V = L$ medför att det finns en icke bestämd analytisk mängd.)

Dessa resultat skingrade något av mystiken kring mängder som kunde fås med hjälp av AC, men de var mycket dåliga nyheter för dem som hade hoppats på regelbundenhet i världen av projektiva mängder. $V = L$ var ett mörkt moln över de projektiva mängderna fram till 1961, då en frisk vind från de stora kardinaltalens riktning började blåsa bort det. Scott [16] bevisade att existensen av ett mätbart kardinaltal medför att $V \neq L$ och Solovay bevisade 1965 (fast beviset inte blev publicerat förrän 1970, se [17]) att existensen av en starkt onåbar mängd medför att

1. ZF är förenligt med Lebesguemätbarhet av alla delmängder av $\mathbf{R}$,
2. ZF + AC är förenligt med Lebesguemätbarhet av alla projektiva delmängder av $\mathbf{R}$.

Under tiden hade, som nämdes i avsnitt 2, Mycielski och Świerczkowski [15] bevisat att AD medför Lebesguemätbarhet av alla delmängder av $\mathbf{R}$, så det föreföll tänkbart att stora kardinaltal medför konsistens av AD. Det bevisades till slut, men först efter stor möda, där större och större kardinaltal blandades in för att uppnå mer och mer bestämdhet.

Den första frukten av denna möda var Martins resultat [10] att existensen av ett mätbart kardinaltal medför bestämdhet för alla analytiska mängder. Martins resultat var en uppenbarelse, för fram till dess hade bestämdhet bara bevisats för de fyra första nivåerna i Borelhierarkin. År 1975 fann Martin att bestämdhet för alla Borelmängder kunde bevisas i ZF + AC, men analytisk bestämdhet medför verkligen existensen av stora kardinaltal, så den kan inte bevisas i ZF + AC enbart. Bestämdhet på högre nivåer av den projektiva hierarkin beror på ännu större kardinaltal.

Den slutliga segern vanns av Martin, Steel och Woodin under 1980-talet. Woodin fann de lämpliga stora kardinaltalen, nu kallade *Woodinkardinaltal*, och tillsammans med Martin och Steel bevisade han följande resultat, som definitivt sammanknippar bestämdhet med existensen av stora kardinaltal.

1. Om det finns oändligt många Woodinkardinaltal så gäller bestämdhet för alla projektiva mängder.
2. ZF + AC är konsistent om och endast om ZF + AC + ”det finns oändligt många Woodinkardinaltal” är konsistent.

Några reflektioner

De resultat som beskrivits i föregående avsnitt visar hur mycket den moderna mängdläran har att tacka polska mängdteoretiker från 1920-talet och 1930-talet för. Det är ingen överdrift att säga att bestämdhet och stora kardinaltal är två av de viktigaste begreppen i dagens mängdlära. I den nyligen utgivna *Handbook of Set Theory* ägnas de fyra sista kapitlen åt sambanden mellan bestämdhet och stora kardinaltal.

Emellertid förblir kontinuumhypotesen det mest framträdande öppna problemet i mängdläran. Vi nämnde i avsnitt 2 att AD medför Cantors *svaga* form av kontinuumhypotesen, att varje överuppräknelig mängd av reella tal är likmäktig med $\mathbf{R}$. Den starka formen, som säger att $\mathbf{R}$ är likmäktig med det första överuppräkneliga

ordinaltalet, är oförenlig med AD, eftersom AD medför att R inte kan välordnas. Den starka formen är den som Gödel bevisade vara förenlig med $V = L$, och det är den som mängdteoretiker, som i allmänhet tror att varje mängd kan välordnas, föredrar. Emellertid har $V = L$ varit oaptitlig för mängdteoretiker sedan Scott [16] bevisade att den är oförenlig med existensen av mätbara kardinaltal. Som framgår av avsnitt 4 har framsteg i mängdläran sedan 1960-talet i hög grad berott på mätbara (och större) kardinaltal.

En väg ur detta dilemma, om det finns någon, skulle vara att finna någon generalisering av L som är förenlig med stora kardinaltal. Ett sådant "slutgiltigt L " har inte bevisats existera, men Woodin har förmodat att det kommer att härledas ur "tvingande och accepterade principer för oändligheten, precis som skett med projektiv bestämdhet". I så fall kommer det säkert att bli det "definitiva" rättfärdigandet av polsk mängdlära.

Referenser

- [1] S. Banach, *Über die additive Massfunktion in abstrakten Mengen*, Fund. Math. 15 (1930), 97–101.
- [2] E. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris 1898.
- [3] P. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 50 (1963), 1143–1148.
- [4] M. Davis, *Infinite games of perfect information*, Advances in Game Theory, Princeton Univ. Press, Princeton NJ 1964.
- [5] K. Gödel, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. I*, Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), 173–198.
- [6] K. Gödel, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 24 (1938), 556–557.
- [7] K. Kuratowski, *Sur l'état actuel de l'axiomatique de la théorie des ensembles*, Annales de la Société Polonaise de Mathématique 3 (1924), 146–149.
- [8] H. Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 6 (1905), nr 1, 139–216.
- [9] N. N. Lusin *Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris 180 (1925), 1572–1574.
- [10] D. A. Martin *Measurable cardinals and analytic games*, Fund. Math. 66 (1969/1970), 287–291.
- [11] D. A. Martin, J. R. Steel, *A proof of projective determinacy*, Journal of the American Mathematical Society 2 (1989), 71–125.
- [12] R. D. Mauldin (red.) *The Scottish Book. Mathematics from the Scottish Café*, Birkhäuser, Boston, MA 1981. Inklusive utvalda artiklar som presenterats vid Scottish Book Conference vid North Texas State University, Denton, Tex., maj 1979.
- [13] J. Mycielski *On the axiom of determinateness*, Fund. Math. 53 (1963/1964), 205–224.
- [14] J. Mycielski, H. Steinhaus, *A mathematical axiom contradicting the axiom of choice*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962), 1–3.
- [15] J. Mycielski, S. Świerczkowski, *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness*, Fund. Math. 54 (1964), 67–71.
- [16] D. Scott *Measurable cardinals and constructible sets*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 9 (1961), 521–524.
- [17] R. M. Solovay, *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. (2) 92 (1970), 1–56.
- [18] S. Ulam *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre*, Fund. Math. 16 (1930), 140–150.
- [19] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Tip. Gamberini e Parmeggiani, Bologna 1905.

från engelskan av red.; John Stillwell är en australiensisk matematiker, verksam vid University of San Francisco och Monash University (Melbourne) Han tilldelades Chauvenetpriset (av Math. Ass. Am.) 2005 för sin artikel "The Story of the 120-Cell", Notices of the AMS, jan. 2001, sid. 17–24. Originalversionen av ovanstående artikel har publicerats i den specialutgåva av Polska matematikersamfundets tidskrift Wiadomości Matematyczne, 48, nr 2, 2012, som utgavs i samband med Europeiska matematikerkongressen i Kraków i juli 2012. Vi vill tacka redaktionen för Wiadomości Matematyczne för vänligheten att ge tillstånd att översätta artikeln och publicera den i SMS-bulletinen.

Tillkännagivanden

Europeisk-nordisk matematikerkongress

Tillägnas minnet av Lars Hörmander

Den 26:e nordiska och 1:a europeisk-nordiska matematikerkongressen äger rum i Lund den 10–13 juni 2013. Nordiska matematikerkongressen, som fram till 1980-talet hette Skandinaviska matematikerkongressen, har arrangerats sedan 1909 och äger vanligtvis rum vart fjärde år. Den kommer nu tillbaka till Lund efter precis 60 år; den 12:e upplagan hölls där 1953.

De senaste åren har kongressen genomförts tillsammans med ett utländskt matematikersamfund för att stärka mötets internationella karaktär. Nästa år är detta partnersamfund det Europeiska Matematikersamfundet (EMS). Glädjande nog kommer EMS-föreläsaren 2013, Tamara Ziegler (Technion), att ge en rad föreläsningar vid kongressen.

Inbjudna huvudtalare är

- Anton Alekseev, Université de Genève
- Artur Avila, IMPA, Rio de Janeiro och Institute de Mathématiques Jussieu, Paris
- Viviane Baladi, Köpenhamns universitet
- Adrian Constantin, King's College London och Universität Wien
- Carel Faber, KTH
- Jesper Grodal, Köpenhamns universitet
- Håkan Hedenmalm, KTH
- Svante Janson, Uppsala universitet
- Pekka Koskela, Jyväskylä universitet
- Kristian Seip, NTNU Trondheim
- Agata Smoktunowicz, University of Edinburgh
- Alexander Volberg, Michigan State University och Universität Bonn

Förslag till speciella sessioner välkomnas. Dessa kan skickas till nordic26@maths.lth.se fram till 15 januari. Mer information finns på

www.matematik.lu.se/nordic26.

Resestipendier

SVeFUM – Stiftelsen för Vetenskaplig Forskning och Utbildning i Matematik – ledigförklarar härmed ett antal resestipendier för i Sverige bosatta matematiker av alla kategorier, dock lägst på doktorandnivå. Stipendier kan sökas för konferenser och andra resor med vetenskapligt syfte, ävensom för längre postdocvistelser i utlandet. Utdelade stipendier är personliga och utbetalas till stipendiatens privata konto. Ansökan, innehållande en kort redogörelse för ändamålet med resan, budget, CV i kortform samt kontonummer för utbetalning, ställs till SVeFUM, c/o Prof. Kjell-Ove Widman och sänds

per e-post till svefum@widman.ch. Sista ansökningsdag är 2013-03-01. I undantagsfall kan en ansökan på papper accepteras under adress Lilla Frescativägen 4D, 114 18 Stockholm. Ev. frågor kan likaledes adresseras till svefum@widman.ch

Svenska matematikersamfundets höstmöte

Samfundets höstmöte hölls i år i Luleå, fredagen den 23 november. I enlighet med traditionen sedan några år tillbaka var temat juniora matematiker. Denna gång talade fyra juniora samt två seniora forskare, se <http://www.swe-math-soc.se/aktuellt/Hostmote2012.html> för detaljer. Samtliga presentationer var mycket uppskattade av åhörarna. Vid själva medlemsmötet beslöts att årsmötet 2013 hålls vid KTH kring första juni, och styrelsen fick i uppdrag att fastställa dag. Vidare informerade styrelsen om pågående arbete. Dagen efter gick finalen i Skolornas matematiktävling 2012.

Efterlyses – förslag till Wallenbergpristagare

Wallenbergpriset har delats ut sedan 1983 (under detta namn sedan 1987) av Svenska Matematikersamfundet. Det har delats ut till speciellt löftesrika yngre svenska disputerade matematiker, som ännu inte erhållit en fast forskartjänst. Wallenbergpriset har varit den mest prestigeladdade utmärkelse som en yngre svensk matematiker kunnat få inom landet. Den uttalade avsikten med priset har varit att uppmuntra matematisk forskning. De flesta av pristagarna har också fortsatt sin karriär som matematiker vid svenska universitet och större delen av pristagarna är idag professorer. Priset är i år på 300 000 kr.

En priskommitté bestående av Nils Dencker, Carel Faber och Bernt Wennberg har utsetts av samfundet. Kommittén ber härmed om förslag för år 2013. Förslagen ska innehålla motivering och gärna ett CV samt tänkbara sakkunniga som kommittén skulle kunna tillfråga. Den person som föreslås ska vara högst 40 år vid utgången av 2013 och ha disputerat då samfundet fattar sitt beslut. Personen bör ha bedrivit väsentliga delar av sin matematiska forskning i Sverige, men behöver inte vara född i Sverige. Förslagen skall vara kommittén tillhanda senast 1 februari 2013. Förslagen kan sändas med epost till dencker@maths.lth.se eller i pappersversion (i så fall i tre exemplar) till

Nils Dencker

Matematik, NF

Matematikcentrum

Box 118

221 00 Lund

Från institutionerna

Chalmers/Göteborgs universitet:

Elizabeth Wulcan har antagits som docent i matematik.

Malin Östensson disputerade den 26 oktober 2012 på avhandlingen *Statistical Methods for Genome Wide Association Studies*

Linköpings universitet:

Elina Rönnberg och **Nils-Hassan Quttineh** har anställts som juniora universitetslektorer i Optimeringslära sedan 1 november 2012.

Michail Krimpogiannis har avlagt licentiatexamen i tillämpad matematik

Mikael Call har disputerat i optimeringslära på avhandlingen *Shortest Path Routing Modelling, Infeasibility and Polyhedra*

En konferens om inversa problem och tillämpningar organiseras 2-6 april 2013 vid Linköpings universitet: <http://www.mai.liu.se/IPA2013/sidor/Start/index.html>

Lunds universitet:

Erik Lindström är ny universitetslektor i matematisk statistik

Tomas Persson har antagits som docent i vid Matematik LTH

Mattias Hansson disputerade vid Matematik LTH den 9 november på avhandlingen *Statistical Segmentation and Registration of Medical Ultrasound Data*.

Workshop: Nonlinear Waves and Interface Problems, 26-28 juni: <http://wiki.math.ntnu.no/nlw>

Umeå universitet:

David Cohen är universitetslektor i matematik fr.o.m. 1 september 2012

Berit Kemppe är universitetslektor i matematik fr.o.m. 1 december 2012

David Bolin är postdoktor i matematisk statistik fr.o.m. 1 december 2012

Konrad Abramowicz är postdoktor i matematisk statistik fr.o.m. 1 november 2012.

Sonja Kovalevskydagarna anordnades i Umeå 16-17 november.

Konferensen Nordstat 2012 anordnas den 10 - 14 juni i Umeå: http://www.trippus.se/eventus/eventus_cat.asp?EventusCat_ID=18396&Lang=eng&c

Konferensen Nordan anordnas i Kiruna den 11 - 13 maj: <http://nordan2012.tk/>



Ordet är mitt

Ulf Persson

Ren eller tillämpad matematik? Både och, antingen eller? Diskussionen är klassisk och kanske rentav uttjatat, men i mitt tycke något förvirrad, vilket föranleder några reflektioner på flygresan mellan Stockholm och Moskva på en brask-slaskande Andersdag.

Den vältaligaste förkämpan för den rena matematiken anses G.H.Hardy vara som i sin utsökta och ständigt citerade – "A Mathematicians Apology" sjunger matematikens lov. Hardys åsikter är dock knappast okontroversi-

ella, vilket titeln indikerar. Mot vem försvarar författaren matematiken, och framför allt, inför vilka ber han om ursäkt för sin (och andra matematikers) existens? Den extrema hållningen "l'art pour l'art" som växte fram under slutet av 1800-talet och förknippas med arroganta symbolister i fashionabelt dekadent parisermiljö brukar tas som skräckexempel, med implikationen att matematik för matematikens egen skull bör vara minst lika förkastligt. Men i vad består avskyn egentligen inför begreppet konsten för konstens egen skull? Jag skulle vil-

ja urskilja två relaterade men dock distinkta element. Det ena rör isoleringen, den andra onyttan. Den mentalitet som vi misstänker ligger bakom sekelskiftesdekadenterna¹ finner idag sitt uttryck i post-modernism, post-strukturalism och en massa andra ismer. Alltså förknippad med den världsbild som ser allt såsom sociala konstruktioner, och vidhåller att språket själv är ett slutet universum, vilket naturligt leder till cynism (se där en annan ism!) och nihilism (ytterligare en). Man skulle kunna beteckna det hela såsom överrationalisering, en fälla i vilken den bäste kan falla.² Jag skulle vilja karaktärisera denna hållning som ontologisk fattigdom. Varje aktivitet som avgränsar sig och inte har några externa kopplingar utmärks just av den torftighet som min filosofiska term avser att fänga. För den i filosofisk terminologi obevandrade: Ontologi har att göra med vad som existerar och epistemologi med hur vi kan nå kunskap om det som finns, ett existentiellt problem om något. Man kan sammanfatta den postmodernistiska hållningen som att epistemologin har tagit över, och utöver denna existerar ingenting (inte ens epistemologin själv? undrar den obönhörligt logiske). Typiska exempel på sådana leksaksuniversa är spel såsom schack och sudoku, och även mycket av modern konst, jag tänker då närmast på installationer där konstens klassiska hantverksmässiga gestaltning har rationaliserats bort. Som ytterligare exempel kan nämnas James Joyce. När går han från litterär briljans till solipsistisk ordekvilibris? Är matematiken också ett leksaksuniversum, med andra ord enbart ett språk och ett spel där anpassning till rådande sociala normer och konventioner faller avgörandet? Vad skiljer en Grothendieck från en modern fransk filosof?

Om matematiken endast är ett spel så är det sannerligen det spel med den i särklass rikaste ontologin mänskligheten någonsin uppfunnit. Vad som matematiker framför allt fascineras av i matematiken är hur allt hänger ihop, hur matematiken har oväntade tillämpningar på sig själv, hur de underliggande mönster Hardy hänvisar till ständigt återkommer i nya skepnader. Mycket av vår känsla för matematikens rikedom ligger i den åtminstone potentiella oändlighet den inrymmer. Att bli matematiker innebär bland annat att lära sig handskas vardagligt med oändligheten, att se Zenons paradox som en trivialitet. Detta kan utvecklas till något av en yrkes-

skada, oändligheten är ett mysterium, vars relation till den handfasta fysiska verkligheten är oklar och vars tekniska tämjande sopar en hel del filosofiska problem under mattan. Man kan även förneka att matematiken är ett mänskligt spel och inta en så kallad platonsk hållning. Detta är en hållning till matematiken som av många filosofiskt skolade anses vara naiv och i stort sett inte bättre än en religiös övertygelse. Jag vidhåller denna attityd, om inte annat för dess provocativa syfte, tryggt medveten om att de flesta matematiker instinktivt är platoniker, ty i annat fall skulle de inte finna verksamheten meningsfull. Visst finns det cyniska matematiker också, karriärister med speciell matematisk talang som ser aktiviteten som ett behagligt sätt att fylla ut tillvaron med, men dessa kan vi lämna åt sidan. Den platonska matematiken må förlöjligas, dock ej kosmologin, ty de flesta av oss känner instinktivt att kosmos existerar oberoende av oss. Det är således inte underligt att kosmologer tenderar att vara platoniker och därmed matematiker och ytterst beskriva den sköldpadda på vilket världsalltet vilar i rent matematiska termer.³ Matematiken må ses som en inåtvänd aktivitet, men så fort den har någon fysikalisk tillämpning, kan matematikern dra en suck av lättnad. Fysiken behöver inte förklara sig själv eller be om ursäkt. Men varför detta? Är inte kosmologiska frågor lika praktiskt världsfrånvända som matematiska?

Det är omsorgen om den ontologiska rikedom som föranleder personer som von Neumann att varna för att om matematiken lämnas åt sig själv så riskerar den likt en trögt flytande flod att sprida ut sig i ett delta av specialiteter med liten samverkan med varandra. Fysikens inflytande på matematiken har historiskt sett varit ovärderligt och det samspel som råder är om något ett stort mysterium (om man inte är matematisk platoniker?). Fysikalisk intuition har ofta visat sig ovärderlig i lösandet av rent matematiska problem. Någon sådan symbios föreligger inte alls i matematikens samspel med ekonomi och biologi. Man kan härvidlag undra var man skall dra gränsen mellan matematik och fysik. Geometrin, även om den ursprungligen hade som ambition att beskriva och undersöka det fysikaliska rummet, anses naturligt nog vara matematik, men däremot mekaniken som lika gärna kan axiomatiseras anses vara fysik.⁴ Visst det är stor skillnad mellan geometrisk intuition och meka-

¹ Sekelskiftet 1800-1900 är väletablerat i språkbruket. Efter 2000 har pedanterna börjat tala om förra sekelskiftet. Till detta finns ingen anledning, det senaste sekelskiftet är ett millennieskifte och skall som sådant refereras till. Vi kan behålla vår gamla konnotation till sekelskiftet nästan hundra år till, och då kanske vi har andra problem att brottas med.

² Russell noterar ironiskt i sin "Inquiry into Meaning and Truth" att de logiska positivisterna med sina ultra-empiriska ambitioner i stället hamnade i ultra-idealism utan att egentligen ens inse detta.

³ Vi känner alla till det klassiska utbytet. Vad vilar sköldpaddan på? En sköldpadda. Och denna? En till sköldpadda, det är sköldpaddor hela vägen! Denna oändliga följd av sköldpaddor gör matematiken (och språket?) lätt till ett nytt begrepp - meta-sköldpaddan. Vad vilar denna på?...

⁴ Den engelska traditionen skiljer sig därvidlag från den tyska och den franska. Mathematical Tripos vid Cambridge, som för övrigt Hardy stred emot, dominerades av matematiskt fysikaliska problem. Och Newtons Principia är skriven i Euklides efterföljd.

nisk, men kan det inte också vara stor skillnad mellan geometrisk och algebraisk/analytisk också? Gauss och Euler tas ofta som föredömen bland praktiskt inriktade matematiker. Se här, de stora andarna gjorde ingen skillnad. De höll minsann inte för näsan. Man kan vända på det också. Att något råkar ha praktiska tillämpningar gör det inte nödvändigtvis mera värdefullt, man skall även ta i beaktande hur intressanta tillämpningarna egentligen är. Tillämpbarhet kan lätt degenerera till ett alibi. Jag påminnes om Dan Laksovs ord om en sökande av NFR bidrag. Halvtaskig matematik med heltaskiga tillämpningar.

Vad som är kritiskt i matematikens utveckling är fokusering på centrala problem, och det finns en risk i att mycket av matematisk verksamhet består i ett tröskande med kända tekniker. Att något är sant behöver inte betyda att det är intressant. Precis som man med modern teknik kan ta tekniskt fulländade fotografier av praktiskt taget allting, behöver det inte betyda att man skall. Den teoretiska fysiken är därvidlag mer koncentrerad. En ordinär matematisk föreläsning lyssnas till oftast mera av artighet än av intresse och ger således sällan upphov till några mera engagerade reaktioner hos åhörarna. Annorlunda är det i ett mer fokuserat ämne där alla är medvetna om de yttersta problemställningarna. Externa frågeställningar gjuter alltid nytt liv i gamla verksamheter.

Men det är en annan aspekt på matematikens tillämpbarhet som oftast debatteras, nämligen dess praktiska nytta. Till vilken grad bidrager matematiken till det mänskliga välbefinnandet? Med andra ord, tar matematiker sitt sociala ansvar, har de något existensberättigande? Detta är en moralisk fråga. För att undgå den moraliska aspekten kan man omformulera den. Hur kan matematiken försvaras ekonomiskt? Detta är frågor som sällan eller ens aldrig dyker upp när det gäller musik och sport. Varför lyssna till musik, varför sparka boll? Vad har musiken för praktiska tillämpningar, för att inte tala om bollspelet, det må gälla tennis eller fotboll. Eller kan det vara så att dessa utgör själva essensen av välbefinnandet, vad vi alla ytterst strävar efter. Så frågan kan således tillspetsas, vad tillför matematiken musiken och bollspelet? Att någon vill syssla med musik eller fotboll för sin egen skull ifrågasättes inte, men att någon frivilligt vill syssla med matematik väcker oftast de flesta människors förundran, stundom även förakt.

Nu skall man separera välbefinnande och ekonomi. Musiken, speciellt popmusiken, omsätter stora summor, detsamma gäller sporten. Således finns det goda ekonomiska skäl till att uppmuntra sådana aktiviteter. Ekonomin, liksom matematiken, hänger ihop och det lär vara vanskligt att urskilja det goda från det dåliga, till vilket vi skall återkomma. Adam Smith påpekar ju att det inte är omsorgen om sina kunders välbefinnande som får bagaren att gå upp tidigt på morgonen, utan girigheten; något som dagens marknadsliberaler tagit till hjärtat och som får samtida politiker att framför allt värna om tillväxt.⁵ Folk måste konsumera, det spelar tydligen ingen roll vad, huvudsaken är att det konsumeras, ty detta skapar nya jobb. Hur ofta har man inte hört detta mantra? Det är lätt se en skrämmande tomhet i all denna febrila aktivitet, och allvarligt oroa sig över vart detta skall i slutändan leda. Ett sätt att hantera denna ångest är nuförtiden att oroa sig över klimatet, ty denna oro mer än någon annan gör det möjligt att uttrycka den fruktan som människans blindade inverkan på naturen innebär. Det behöver inte betyda att oron är obefogad, även om så kallade klimatskeptiker vill betona orons psykologiska bevekelsegrunder, men i detta tänker jag inte fördjupa mig i nu. Rika människors "conspicuous consumption" må kännas provocerande och väcka vår harm och indignation, men när dessa möjligheter så att säga "demokratiseras" (det rör sig inte så mycket om demokrati som egalitarism) väcker de istället skräck och avsky. Vi är drabbade av mass-bilism, mass-turism, prylsamlande, slit och släng, och allt annat som är ekonomiskt rationellt men synnerligen kontra-intuitivt. Då och då beklagas det över denna utveckling med proforma-hänvisningar till att den skall vändas till en så kallad hållbar. Få personer tycks dock vara villiga att göra de offer som är nödvändiga därtill, det räcker inte att köra bilen på bio-bränsle som i själva verket är än värre än fossilt bränsle.⁶ De enda som är beredda att ta en radikal strid mot det västerländska konsumtionssamhället och de värderingar som ligger till grund för denna, är Usama bin Laden och hans gelikar, och sådant ideologiskt sällskap drar sig de flesta från att hamna i.⁷ Kort kan sägas att min dragning till matematiken som tonåring bottnade i att inte ta del av denna konsumtionskarusell, att inte bidra till den förment välsignande industrialismen om vilket det ordades mycket under 60-talet. Detta berodde inte på något vänster-engagemang från min sida, även om tidsepoken

⁵Adam Smith har mycket riktigt blivit marknadsliberalismens profet, men de flesta har knappast läst honom. Därmed har han fått ett oförtjänt rykte. Smith är betydligt subtilare än sina senare adepter. Han är väl värd att läsas, om inte annat för sin utsökta 1700-tals engelska, skriven i samma sirligt flytande tradition som Hume och Gibbon.

⁶Visst kan vi med biobränsle få en koldioxidbalans, men detta förutsätter att vi bara använder det biobränsle vi förmår producera på de arealer som blir över efter att födoämnen har odlats. Detta skulle innebära en drastisk förminskning av transporter, speciellt de flyg- och bilburna, vilket kanske inte var avsikten med dessa visioner.

⁷Man kan även undra hur asketiska dessa ledare är i sitt privata leverne, men att spekulera om detta vore en ointressant digression från huvudtemat.

skulle så indikera, utan byggde snarare på sentimentala och reaktionära politiska värderingar, men distinktionen kan i sammanhanget vara ganska så subtil. I klarspråk: Den klara inställningen är att matematiken inte skall besudlas av nytto-aspekter som vid närmare inspektion inte visar sig vara annat än kommersialism, utan istället vara ren. Hardy gör som bekant det lätt för sig att mot den rena matematiken ställa den fula som står i krigets tjänst.⁸

Skulle det vara möjligt att isolera de goda tillämpningarna från de förkastliga, att renodla den sociala verksamheten till att producera nyttiga födoämnen och bekämpa sjukdomar och farsoter? Ty den civilisationsleda (som jag ovan gett uttryck för och som även Freud berör) brukar sällan även innefatta läkarvetenskapens landvinningar speciellt under de senaste hundra femtio åren. Visst skulle det vara mysigt att leva på medeltiden, så länge man inte drabbades av en sjukdom.⁹ Men, som redan påpekats, mänskliga aktiviteter är sammankopplade, och säg framsteg inom läkarvetenskapen är beroende av andra framsteg utan uppenbara kopplingar. Ett exempel på detta är den digitala utvecklingen som även kommer medicinen till godo. Denna utveckling har varit möjlig tack vare digitalteknikens kommersiella intresse (som kan vara nog så motbjudande, säg elektronisk överföring av pornografiska filmer) vilket i praktiken innebär att man "lurar" en stor grupp människor att bidra med resurser. Med andra ord, lika lite som det är möjligt att

urskilja den "nyttiga" matematiken från den "onyttiga", är det möjligt att skilja mellan goda tillämpningar och dåliga, vilket bör mana till eftertanke.

Matematiken har i motsats till humaniora mycket lättare att motivera sin existens gentemot anslagsmyndigheter och övriga finansiärer, låt vara att des handfasta tillämpningar som åberopas med sådan entusiasm har föga med den matematiska verksamheten att göra och mycket sällan om ens aldrig utgör någon djupare motivation. Humaniora har sett sig föranledd att hänvisa till att kulturen gör människan bättre, kanske rentav högre. Detta är en farlig väg. Hitler var en hängiven operabesökare i sin ungdom, och man kan hävda att hans äventyrspolitik var som hämtat ur en "Götterdämmerung". Många SS-officerare uppvisade en remarkabel blandning av högkultur och grymhet, ett slående exempel på detta är Heydrich som t.o.m. Hitler ansåg ha ett hjärta av järn. Men lika litet som matematiken är humaniora isolerad från världen i övrigt, även om, som påpekats, konkreta tillämpningar är svårare att peka på. Dock, liksom med konsten, tycks humanioras "onyttighet" vara lättare att förstå och fördraga för folk i allmänhet.

Således har denna diskussion gått varvet runt och vi har mer eller mindre återkommit till utgångspunkten (med eller utan monodromi?). Fortsätt som vanligt och bekymra dig inte, förr eller senare går allt till det bästa (eller åt helvete) och det är inte mycket vi kan göra åt saken.

⁸Ironiskt nog är inte heller Hardy helt ren. Han gjorde med vänster hand en insats inom genetiken genom att tillämpa binomialteoremet, som sedan dess i biologiska sammanhang lär refereras till som Hardys sats!

⁹Men kan givetvis även ifrågasätta den moderna läkarvetenskapens framsteg. Det finns starka indikationer att det nomadliv människan evolutionärt utvecklats till var betydligt hälsosammare än den senkomna fasta bosättningsmodellen. Så om vi lever tillräckligt primitivt, och tillräckligt få av oss, i en fauna- och floramässigt rik miljö, kan vi kanske hålla hälsan ändå. Med andra ord en återgång till Eden. Ett sådant leverne vore även en realistisk lösning på hållbarhetskravet, men hur många av oss vore villiga till sådana uppooffringar, och framför allt hur många av oss skulle få njuta återgången till paradiset? Sex sju miljarder är för tok för många sökande, kanske några tiotal miljoner vore mera realistiskt. Att politiskt iscensätta ett sådant scenario vore ogörligt i vårt nuvarande samhälle, som bygger på demokratisk konsensus och respekt för liv och lem.