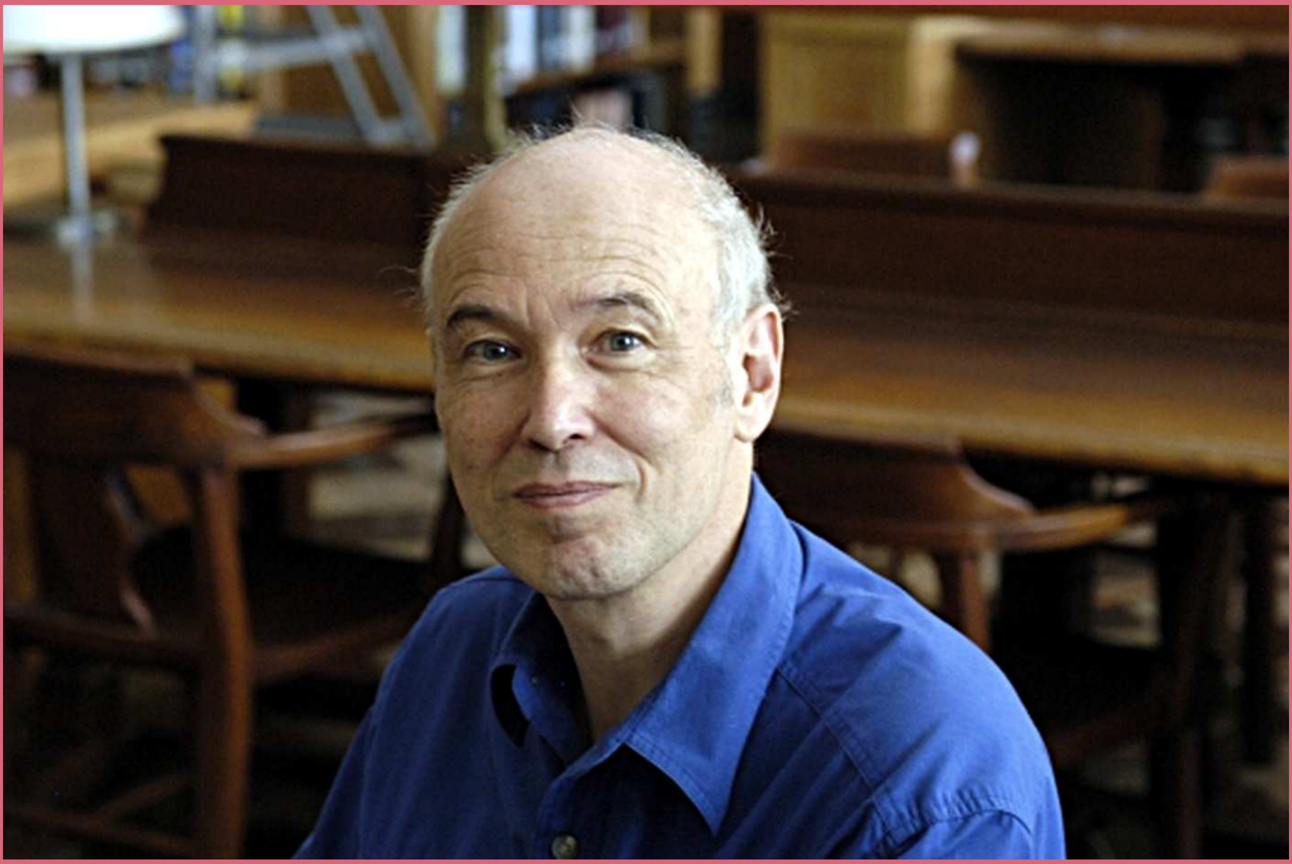
bulletinen

Svenska Matematikersamfundet

Nr 7 Maj 2013



Abelpriset 2013 till Pierre Deligne

Hörmanders vetenskapliga arbete

SMS årsmöte

SMS bulletinen

utkommer fyra gånger per år, i februari, maj, oktober och december. Manusstopp är den första i respektive månad.

Ansvarig utgivare	Mats Andersson
Redaktör	Per-Anders Ivert pa.ivert@gmail.com
Adress	SMS bulletinen c/o Sara Maad Sasane Matematikcentrum Matematik LTH Box 118 221 00 LUND

Manus kan insändas i allehanda format *.pdf, .doc, .docx, .odt*. Som tillägg önskas dock en ren textfil. Alla texter omformas till LaTeX.

Svenska Matematikersamfundet

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem, betala in avgiften på samfundets *plusgirokonto* **43 43 50–5**.
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter	*(per år)*
Individuellt medlemsskap	200 kr
Reciprocitetsmedlem	100 kr
(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal)	
Doktorander gratis under två år	
Gymnasieskolor	300 kr
Matematiska institutioner	större 8 000 kr, mindre 3 000 kr
(institutionerna får själva avgöra om de är större eller mindre)	
Ständigt medlemsskap	2 500 kr (engångsinbetalning)

Man kan även bli individuell medlem av EMS genom att betala in 250 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

Hemsida

http://www.swe-math-soc.se

Här återfinns bl.a. protokoll från möten.

Styrelse

ordförande	Mats Andersson 031–772 35 71 president@swe-math-soc.se
vice ordförande	Pär Kurlberg 08–790 65 82 vice-president@swe-math-soc.se
sekreterare	Elizabeth Wulcan 031–772 35 10 secretary@swe-math-soc.se
skattmästare	Milagros Izquierdo Barrios 013–28 26 60 treasurer@swe-math-soc.se
5:e ledamot	Jana Madjarova 031–772 35 31 bm5@swe-math-soc.se

Innehåll

Omslagsbilden: Pierre Deligne Abelpristagare 2013. Fotograf: Cliff Moore

Detta nummer

Per-Anders Ivert

Återigen hög tid för ett nummer av SMS bulletinen. Februarinumret ägnades åt personligt avfattade minnestexter om Lars Hörmander, som gick bort i november förra året. I det här numret bereder vi plats för beskrivningar av hans vetenskapliga gärning. Vår behandling är naturligtvis långt ifrån uttömmande, att åstadkomma detta vore ett stort matematikhistoriskt projekt, och det kommer nog att låta vänta på sig. Genom välvilligt tillmötesgående från Lars Hörmanders dotter Sofia Broström kan vi publicera ett fotografi av Hörmander som nybakad student. Som pendang till detta en bild från utdelningen av Wolfpriset år 1988. Mellan de tillfällen då dessa två bilder togs ligger en anmärkningsvärd vetenskaplig karriär, som fortsatte långt efter det senare tillfället. När det talas om svenska vetenskapsmäns internationella inflytande har jag ibland hört jämförelser mellan Lars Hörmander och botanikens Carl von Linné.

I övrigt uppmärksammar vi naturligtvis Abelpriset, som utdelas nu i dagarna. Det tillfaller den belgiske matematikern Pierre Deligne, som ju även hedrades med Fieldsmedaljen 1978 och Crafoordpriset 1988.

Det har inte kunnat undvikas att vissa texter i detta nummer är tekniskt avancerade och kanske svårtillgängliga för gemene man. Alla lämpar sig inte för högläsning i brasans sken under familjekvällar. Den matematik som Abelpristagaren ägnat sig åt är kanske inte den som den allmänmatematiskt intresserade i gemen är särskilt förtrogen med. Jag hoppas att läsarna inte ska känna sig alltför ”exkluderade”(det heter väl så?) genom det flera gånger använda uttrycket ”som bekant” i artikeln om Weilhypoteserna; det är i så fall en känsla som delas av redaktören, men jag är glad ändå.

Min företrädare på denna post, vår faste reporter Ulf Persson, har författat ett upprop för tidskriften Normat, vars redaktör han är och vars existens är i fara.

Nämnas bör också Wallenbergpriset, som i år gick till två göteborgsmatematiker. Vi har tyvärr inte hunnit få med utförligare presentationer av dessas arbeten, men vi hoppas kunna återkomma med detta i oktobernumret. Detsamma gäller Tidsvinklat, som gör ett uppehåll denna gång.

Matematikersamfundets årsmöte avhålls på KTH i slutet av månaden, och jag hoppas på en god uppslutning, samtidigt som jag själv inte kan bidra till en sådan. Beklagligtvis kolliderar evenemanget med ett opponentuppdrag i ett grannland.

Så överlämnar jag majnumret 2013 av SMS bulletinen i läsarnas händer och ser fram emot ett återseende i oktober.

Abelpriset 2013

Den norska vetenskapsakademin DNVA (Det Norske Videnskaps-Akademi) har beslutat att tilldela den belgiske matematikern **Pierre Delig**ne från Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, USA, 2013 års Abelpris ”*for meget betydningsfulle bidrag till algebraisk geometri, og for disse bidragenes gjennomgripende innflytelse på tallteori, representasjonsteori og relaterte felt*”. Priskommittén bestod av Noga Alon, Ragni Piene, Stanislav Smirnov, Terence Tao och Gang Tian. Prissumman uppgår till 6 000 000 norska kronor, som tas ur Niels Henrik Abels minnesfond. Denna instiftades den 1 januari 2002 i just detta syfte. Priset har utdelats en gång per år sedan 2003. Pristagaren väljs ut av en av DNVA tillsatt Abelkommitté, bestående av fem matematiker. Prisutdelningen äger rum i Oslo universitets aula den 21 maj. Dagen före prisutdelningen medverkar pristagaren vid en kransnedläggning vid Abelmonumentet i Slottsparken i Oslo. Den 22 maj håller Deligne sin prisföreläsning på universitetet. Enligt en tradition som utvecklats under åren inbjuds Abelpristagaren även till en annan universitetsstad än Oslo, och i år är det Trondheim och NTNU som får besök. Den 23 maj besöker Deligne Trondheim och ger bl.a. en föreläsning för studenter och andra intresserade.

Pierre Deligne

Ulf Persson

Pierre Deligne föddes den 3 oktober 1944 i Belgien, närmare bestämt i Etterbeek nära Bryssel. Han var ett matematiskt underbarn; redan som 14-åring upptäckte han Bourbaki, och därefter var det ingen återvändo. Som många stora män var han blygsam. När han började vid universitetet i Bryssel var hans ambition att bli gymnasielärare och ägna sig åt matematiken under sin fritid. Dock kom han i Bryssel i kontakt med Jacques Tits (abelpristagare 2008), vilket vidgade hans vyer om vad som var möjligt i livet. Han doktorerade i Bryssel 1968 och tog sig sedan till Paris, först som ”fri student” (auditeur libre) vid École Normale Supérieure, sedan som gäst vid Institut des Hautes Études Scientifiques (IHÉS). Där blev han omhändertagen av de två ledande matematikerna i Paris (och därmed i Frankrike), Jean-Pierre Serre och Alexander Grothendieck. 1970 blev han permanent medlem i IHÉS, och 1972 fick han sitt ”doctorat d'État ès Sciences Mathématiques” vid Paris-Sud 11. Han besökte institutet i Princeton under ett par år under 70-talet, och blev, till många matematikers sorg, kvar där permanent sedan 1984. Sorg? Jo som Milne förklarade, man vallfärdar mycket hellre till Paris än till Princeton.

Deligne skolades som nämnts av Serre och Grothendieck och blev deras mönsterelev, den som mer än någon annan kunde förverkliga deras visioner. Framför allt gäller detta Grothendiecks. Detta gör det ytterst svårt att presentera Delignes arbeten i ett allmäntillgängligt perspektiv. Tröskeln därvidlag är mycket hög. Dock bör alla matematiker kunna förknippa en sak med Deligne, nämligen lösandet av Weils förmodan, närmare bestämt den tredje och absolut djupaste och som kan ses som en geometrisk parallell till Riemannhypotesen[1]. Jag minns uppståndelsen detta föranledde sommaren 1973 när han annonserade sitt resultat[2]. Harvard och MIT (tillsammans med Brandeis) ordnade en fullsatt seminarieserie om detta samma höst. I minnet har den inledande föreläsningen, given av den långe John Morgan från Texas, etsat sig fast. Denne började med att hänvisa till Lefschetz (som hade dött ett år tidigare) och hans intention att använda den framväxande algebraiska topologin som en harpun mot den val som utgjordes av den algebraiska geometrin. Jag var doktorand och förstod inte mycket av de följande föredragen (kanske inte heller topologen Morgan) men kommer ihåg att det var ständiga hänvisningar till ”Hard Lefschetz”, som tycktes vara något av en stötesten. Nämnas bör dock att Grothendieck hade målat fram den allmänna strategin, och kritiskt därvidlag var utvecklandet av en lämplig kohomologiteori (den algebraisk-topologiska harpunen) som sedan kom att utgöra den så kallade étale-kohomologin. Vad som var slående i detta sammanhang var hur begrepp och idéer som utvecklats i den kontinuerliga kategorin, som Lefschetz fixpunktsformel, även hade mening i den diskreta, nämligen för varieteter över ändliga kroppar, och därvidlag hade Grothendieck spelat en central roll, men man skall inte glömma att rötterna till detta allmänna synsätt går längre tillbaka i tiden och ingick i Weils vision när han formulerade sina hypoteser i slutet av 40-talet. Grothendick preciserade å sin sida strategin genom att formulera de så kallade ”conjectures standards” ur vilka Weils förmodan skulle falla som mogna frukter. Dessa standardförmodanden av Grothendieck har förblivit obevisade, men Deligne lyckades visa Weils förmodan ändå, genom att utnyttja idéer som gick utanför Grothendiecks program. Som en följd av detta blev denne missnöjd, ty ett naturligt bevis, menade han, skall följa ur allmänna principer och inte baseras på ”tricks”.[3] Delignes bedrift att slutligen bevisa hypoteserna belönades under slutet av samma decennium med en Fieldsmedalj i Helsingfors, och det svenska Craafoordpris som riktades till både Deligne och Grothendieck tio år senare hade som uppgift att även hedra Grothendiecks i sanning banbrytande insats. Som bekant avstod den senare från priset och vid den tiden hade hans förhållande till Deligne blivit något spänt. Men detta leder oss avsides och den intresserade kan konsultera Grothendiecks memoarer för detaljer. En av tillämpningarna, också påpekad av Deligne, av Weilhypotesen var den så kallade Ramanujan-Petersson-hypotesen. Den fundamentala modulära funktionen $\Delta(q) = q\prod_{n>0}(1-q^n)^{24}$ (där $q = e^{2\pi iz}$) har en utveckling $\sum_{n>0}\tau(n)q^n$, där τ refereras till såsom Ramanujans τ-funktion. Då gäller för varje primtal p att $|\tau(p)| \le 2p^{11/2}$. En olikhet som använts för att symboli-

[1]För en närmare presentation av Weils förmodan och Delignes bidrag därvidlag hänvisar jag till faktarutan

[2]Illusie förtäljer hur Deligne en vacker junidag vid IHÉS försynt berättade för honom över en lunch att han hade löst Weil-förmodan och att han hade förklarat nyckelidén för Serre som visat sig övertygad. En månad senare under en konferens ägnad Hodges sjuttioårsdag fick han hela sex timmar på sig att presentera sitt bevis. Han var tydligen aldrig nervös över att något skulle vara fel, själva beviset var så stabilt.

[3]Som Mumford har påpekat. Om vi kommer till en dalgång fyller Grothendieck först upp den med cement innan han korsar den, medan Deligne bygger en hängbro.

sera Delignes matematik på det belgiska frimärke som utgavs till hans ära.

Men Deligne var intresserad av mycket annat, redan i unga år. Jag vill framhålla den förhållandevis konkreta matematik som rör monodromier och Milnorfibrationer med rötter inom differentialtopologin, liksom hans insatser inom modulära former, som exemplifierats ovan. Vidare hans introduktion av så kallade blandade Hodgestrukturer som innebar en filtrering (via så kallade vikter) av klassiska Hodgedekompositioner för kompakta komplexa varieteter, med tillämpningar för öppna och singuljära varieteter. (Själv kom jag i kontakt med dessa när jag skrev min avhandling om degenerering av ytor där de spelade en mycket upplysande roll i att jämföra kohomologin för den allmänna fibern och den degenererade). Och sist men inte minst hans klassiska arbete tillsammans med Mumford om stabil degeneration av kurvor, där det mystiska begreppet ”stacks” introducerades, och som skulle spela en viktig roll ett kvarts sekel senare (inte minst inom strängteorin). Allt detta gjort före Weil-hypotesen och således före trettio års ålder. Jag vill därmed inte försöka göra en uppräkning av hans bedrifter under de följande trettio åren, och därmed inte nämna de så kallade motiven. Vem kan sammanfatta Delignes gärning bättre än Serre? ”Han är helt enkelt mycket bättre än oss alla andra”!

Trots detta är tveksamt om Deligne i våra dagar skulle ha kvalificerat till vad norrmännen kallar ”oppryck” (till professor). Enligt officiella källor har han bara haft tre studenter! Och dessa koncentrerade till tidigt 70-tal dessutom. Dessa tre är dock väl värda att nämnas vid namn och presenteras lite närmare. Den första studenten är den elegante vietnamesiske matematikern Le Dung Trang i Paris, som jag alltid förknippar med monodromi för singulariteter. Sedan följer, kanske något förvånande, engelsmannen Miles Reid vid Warwick, som är vida känd för sitt projekt om framför allt 3-falder, och vars matematiska temperament synes mig milsvitt från Delignes. Och sist, men definitivt inte minst, den som tydligast förvaltar den Delignska traditionen – österrikaren Michael Rapoport i Bonn,[4] som jag kopplar samman med så kallade Shimura-varieteter. Men en matematikers inflytande går inte bara via studenter (även om Deligne via studenters studenter har drygt 100 så kallade ”descendants” vilket borde imponera även på en byråkrat, varav en är Peter Scholze, student till Rapoport, med rykte om sig att vara det hetaste namnet bland unga matematiker runt om i världen) utan, som ovan antytts även via vallfärdande kolleger.

Deligne har blivit föremål för många hedersbetygelser under årens lopp, varav vi redan har nämnt några. En något annorlunda sådan är hans upphöjelse till Vicomte (vice-greve?) av den belgiske kungen Albert 2006. Deligne designade sin egen vapensköld där det mest framträdande utgörs av tre hönor tagna ur en fransk barnvisa. Deligne är, som redan ovan antytts, en mycket försynt person. Under min vistelse vid Tata vintern 1984 hade jag privilegiet att varje morgon äta frukost med honom och hans fru. Deligne var mycket förtjust i indiska Bollywoodfilmer med mycket dans och sång (och inget skjutande). Under min doktorandtid ryktades det om hur han regelbundet sökte sin tillflykt i skogen medtagandes bara en sovsäck och ett anteckningsblock. Inga böcker. Rent tänkande under stjärnhimlen. Enligt Illusie är han även en hängiven cyklist, och samma källa avslöjade under en middag i Paris häromveckan att Deligne planerar att vandra till Santiago de Compostela nu under våren.[5] Den kanske mest legendariska vallfärdsorten i den katolska världen. Men kanske detta är en hemlighet, i så fall ber jag läsarna att inte föra det vidare. Som detta antyder har Deligne ett naturintresse, som kanske tydligast framträder i hans legendariska engagemang i trädgårdsodling, såväl i Princeton som kanske framför allt i L’Ormaille. Typiskt är att han föredrar att låta en kronärtskocka utveckla sin vackra blomma än att ta till vara den och förtära den.

För den vars nyfikenhet har väckts av ovan ofullständiga skiss kan jag bara rekommendera ett kommande föredrag av Per Salberger på Samfundets kommande årsmöte.

[4] Denna nationalitetsbeteckning må vara förvånande för den någorlunde insatte. Jag vet inte om Rapoport någonsin satt sin fot i Österrike, däremot hade hans pappa gjort det. Rapoport är för övrigt född i Cincinnati av alla ställen, växte upp i det forna DDR, och då var österikiskt medborgarskap mycket praktiskt i och med att detta innebar full resefrihet.

[5] I själva verket företas denna fotvandring i skrivande stund

Weil-hypoteserna

Ulf Persson

Som vi alla vet är en algebraisk varietet utskuren av en ändlig samling polynom. Detta är meningsfullt över varje kropp, speciellt över varje ändlig kropp, och vi kan i sådana fall (nämligen när koefficienterna till polynomen tillhör en ändlig kropp) ställa den naturliga frågan hur många punkter har varieteten över en ändlig kropp $\mathbb{F}_q$ med q element.[6] I många enkla fall kan vi skriva ner antalet direkt. Det projektiva rummet $P^n(\mathbb{F}_q)$ har $\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = q^n + q^{n-1} + \ldots 1$ element, vilket inses direkt av definitionen. Man kan även skriva ner enkla slutna formler för kvadriker, men redan i det enkla fallet med kubiker i det projektiva planet blir det mer komplicerat. I princip kan man avgöra den allmänna frågan i varje enskilt fall, ty det är trivialt att programmera en dator att göra det, men för att det skall vara praktiskt genomförbart måste givetvis såväl kroppen som antalet variabler, grader och polynom vara någorlunda modesta i storlek. Frågan må synas speciell, men det väsentliga i den rena matematiken är inte svaret som sådant utan hur frågan och dess besvarande kopplas till andra delar av matematiken, och som vi skall försöka antyda visar sig denna fråga vara oväntat central.

Det kubiska fallet, så när som på några triviala tekniska detaljer, är ekvivalent med att lösa ekvationen $y^2 = x^3 + ax + b$, vilket motsvarar en ändlig elliptisk kurva. För varje x-värde får vi inget, ett eller två värden på y, beroende på huruvida polynomets värde är en icke-residy, noll eller en (icke-trivial) residy.[7] Det är som att singla slant, och i medeltal förväntar vi oss $q + 1$ lösningar.[8] Men i allmänhet har vi för enskilda fall en viss diskrepans.

Det finns ett annat sätt att formulera frågan om lösningar över ändliga kroppar. Vi kan gå till det algebraiskt slutna höljet $\hat{\mathbb{F}}_p$ av en primkropp $\mathbb{F}_p$. Naivt kan man tänka sig denna som unionen av alla ändliga utvidgningar av F_p. Den kommer givetvis att bli oändlig. Av Hilberts Nollställesats följer väsentligen att lösningarna över en algebraisk sluten kropp bestämmer varieteten. Den blir så att säga "synlig". För varje kropp av karaktäristik p kan vi betrakta Frobenius Fx givet av $x \mapsto x^p$. Denna är som bekant en automorfism ty vi vet alla att $(x + y)^p = x^p + y^p$ i karaktäristik p. En ändlig kropp $\mathbb{F}_q$ är karaktäriserad av att $x = x^q$ (d.v.s. $F^n = I$ där $q = p^n$. Det kan vara lämpligt att införa beteckningen F_q för F^n)[9]. Denna Frobenius F_q kan utvidgas till varieteten via $(x_0, x_1, x_2 \ldots x_n) \mapsto (F_q x_0, F_q x_1, F_q x_2 \ldots F_q x_n)$, förutsatt att polynomen kan väljas sådana att deras koefficienter tillhör kroppen $\mathbb{F}_q$. Man säger i detta fall att varieteten är definierad över $\mathbb{F}_q$. Antalet lösningar är då givet av antalet fixpunkter till F_q. Det tycks dock icke hjälpa oss nämnvärt. Men i vårt fall med den ändliga elliptiska kurvan har denna observation en slående konsekvens.

Som bekant är en elliptisk kurva över en godtycklig kropp en grupp. I fallet med $k = \mathbb{C}$ kan vi skriva denna grupp som $\mathbb{C}/\Lambda$ där Λ är en $\mathbb{Z}$-modul av rang två. Vi kan för varje heltal n betrakta avbildningen $x \mapsto nx$ som är en grupp-homomorfism, och vars kärna $\Lambda/n\Lambda$ är isomorf med $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$ och uppenbarligen består av n^2 element, vilka brukar refereras till såsom n-torsionselementen och spelar en analog roll till enhetsrötternas på cirkeln. Som ett kuriosum kan nämnas att för speciella gitter Λ kan man även multiplicera med vissa komplexa tal λ, sådana att $\lambda\Lambda \subset \Lambda$ man säger då att kurvan har komplex multiplikation. Detta är dock mycket speciellt, och i allmänhet har en elliptisk kurva endast heltalsmultiplikation. En elliptisk kurva definierad över $\mathbb{F}_q$ är uppenbarligen även definierad över $\hat{\mathbb{F}}_q$ och Frobenius F_q utgör en linjär avbildning som inte är av den triviala typen $x \mapsto nx$. De linjära avbildningarna i ändlig karaktäristik utgör således en rikare ringstruktur än $\mathbb{Z}$. Man kan på denna ring införa en kvadratisk form genom att betrakta graden. Normalt kan man tänka sig graden av en avbildning som kardinaliteten av dess fibrer, som i detta fall utgörs av kardinaliteten av kärnan, men i ändlig karaktäristik inträder ett nytt fenomen, nämligen inseparabilitet.[10] Frobenius är typexemplet på en inseparabel avbildning och det visar sig att dess grad är q. Däremot är multiplikation given av n separabel (om $p \nmid n$) och given av n^2. På grund av definitionen är denna form positivt definit. Antalet punkter

[6] Som bekant är varje ändlig kropp ett ändligt vektorrum över sin primkropp F_p där p är ett primtal. En ändlig kropp innehåller således $q = p^n$ element där n är dimensionen på vektorrummet, ekvivalent graden av utvidgningen. Utvidgningen, som är cyklisk, beror endast på graden, således är en ändlig kropp unikt bestämd av sin kardinalitet q.

[7] Med en residy menar vi en kvadratisk residy, d.v.s. en kvadrat. Hälften av alla icke-noll-element är residyer, de övriga icke-residyer. I fallet $p = 7$ har vi således listan $1, 4, 2$ som residyer samt $3, 5, 7$ som icke-residyer.

[8] Strikt taget räknar vi alla lösningar till den affina ekvationen ovan, samt nollan i oändligheten. Vidare om ε är en icke-residy, kan vi betrakta ekvationen $y^2 = \varepsilon(x^3 + ax + b)$ (eller ekvivalent $y^2 = x^3 + \varepsilon^2 ax + \varepsilon^3 b$) vilken är den konjugerade kurvan. Det är uppenbart att se att båda tillsammans ger $2(q + 1]$ lösningar.

[9] För $q = p$ är detta som bekant känt som Fermats lilla sats.

[10] Läsaren erinrar sig säkert att över kroppar med ändlig karaktäristik behöver inte det irreducibla polynomet splittras upp i distinkta rötter vid motsvarande utvidgning. Typexemplet är $x^p = t$ över kroppen $\mathbb{F}_p(t)$, där det irreducibla polynomet blir en p-potens efter utvidgningen.

på den elliptiska kurvan är således given av kardinaliteten av kärnan $I - F_q$, där I är enhetsavbildningen (ty denna avbildning är separabel). På grund av Cauchy-Schwarz och att $\deg F_q = q$ följer då att diskrepansen från $q+1$ är högst $2\sqrt{q}$ vilket är känt som Hesse-begränsningen.

Men vi kan göra en annan tolkning av detta. Om ℓ är ett primtal (lämpligen skilt ifrån p) kommer ℓ-torsionspunkterna E_ℓ utgöra ett 2-dimensionellt vektorrum över $\mathbb{F}_\ell$. Frobenius kommer att permutera dessa, och eftersom den är linjär kan den representeras av en linjär avbildning. Så fort man har en linjär avbildning frågar man sig vad den karaktäristiska ekvationen är, vilket i det två-dimensionella fallet betyder spåret och determinanten.

> Även fallet $\ell = 2$ ger en del instruktiv information. $GL(2, \mathbb{F}_2)$ är som bekant isomorf med $\mathfrak{S}_3$ - den symmetriska gruppen på tre element. Vi har determinanten 1 och spåret givet av 0 eller 1. Spåret 1 motsvaras av cykliska, medan spåret 0 motsvaras antingen av den minimala ekvationen $X - I = 0$ d.v.s. identiteten. Eller att avbildningen är av formen $I + N$ där N är nilpotent, d.v.s. involutionerna. Gruppen permuterar de icke-triviala, d.v.s. de primitiva 2-torsionselementen som kan identifieras med rötterna till kubiken f om den elliptiska kurvan gives av $y^2 = f$. De tre givna fallen korresponderar till inga, tre respektive en rot till f över $\mathbb{F}_q$. Notera att F_q verkar som Galoisgrupp av f, och att representationen av Frobenius är kubikens Galoisrepresentation. Om f inte har några rötter är gruppens ordning udda. Om f har en rot är $\mathbb{Z}_2$ en delgrupp, men inte $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ty det senare inträffar precis när alla rötterna ligger i $\mathbb{F}_q$. För fallet $\ell = 3$ kan man även relativt lätt skriva upp en fjärdegradsekvation vars rötter korresponderar till ett par $\pm\eta$ av primitiva 3-torsionspunkter η. [11] I princip kan man för varje ℓ skriva upp ett polynom f_ℓ av grad $\frac{1}{2}(\ell^2 - 1)$ vars Galoisgrupp ger motsvarande information.

Man kan dock gå vidare och betrakta den så kallade Tate-modulen $T_\ell(E)$ som formellt är det inversa gränsvärdet av vektorrummen E_{ℓ^n} (via de naturliga projektionerna $E_{\ell^{n+1}} \to E_{\ell^n}$) och därmed visar sig vara en fri rang två-modul över de ℓ-adiska talen $\mathbb{Z}_\ell$ som är en välkänd ring med karaktäristik noll. Frobenius får därmed en representation via ℓ-adiska 2×2 matriser. Beteckna även denna med F_q. Den karaktäristiska ekvationen ger speciellt identiteten

$$\det(I - F_q) = 1 - \mathrm{Tr}(F_q) + \det(F_q)$$

Man kan relativt lätt förvissa sig om att $\deg(A) = \det(A)$ där A i vänsterledet betecknar ett element i endomorfismringen till E och i högerledet dess ℓ-adiska representation. Således är både vänsterledet och sista termen i högerledet i ekvationen ovan heltal, och därmed även $\mathrm{Tr}(F_q)$.[12] Vi sluter således att den karaktäristiska ekvationen har koefficienter i $\mathbb{Z}$ oberoende av ℓ. Det är inte heller så svårt att visa att denna kvadrik $(1 - at + qt^2)$ är irreducibel över $\mathbb{R}$ och har två konjugerat komplexa lösningar $\alpha, \bar{\alpha}$, således med $\alpha + \bar{\alpha} = a$ och $\alpha\bar{\alpha} = q$ och således $|\alpha| = |\bar{\alpha}| = q^{\frac{1}{2}}$

Vidare noterar vi att vänsterledet ovan ger antalet lösningar i $\mathbb{F}_q$ som således kan skrivas $q + 1 - \mathrm{Tr}(F_q)$ där $|\mathrm{Tr}(F_q)| \leq 2\sqrt{q}$ och att högerledet för tankarna till Lefschetz spårformel (fixpunktsformel), till vilken vi skall återkomma. En slutsats är att om vi känner antalet punkter över $\mathbb{F}_q$ känner vi det över alla ändliga utvidgningar. Allt är kodat i den kvadratiska karaktäristiska ekvationen. Det är elementärt att uttrycka $\alpha^n + \bar{\alpha}^n$ i termer av $\alpha + \bar{\alpha}$ och $\alpha\bar{\alpha}$.[13] Ett annat sätt är att notera att $-\log(1-t) = \sum_{n>0} \frac{t^n}{n}$, således följer att

$$\begin{aligned}
&\exp \frac{q^n + 1 - \alpha^n - \bar{\alpha}^n}{n} t^n = \\
&= \exp(\log(1 - \alpha t) + \log(1 - \bar{\alpha} t) - \log(1 - t) - \log(1 - qt)) = \\
&= \frac{1 - at + qt^2}{(1-t)(1-qt)}
\end{aligned}$$

Det är nu naturligt att koda alla antalen N_{q^n} av punkter över $\mathbb{F}_{q^n}$ av en varietet X (defined over $\mathbb{F}_q$) med den genererade funktionen

$$Z(X, q, t) = \sum_{n \geq 1} \frac{N_{q^n}}{n} t^n,$$

den så kallade (lokala) zeta-funktionen.

---

[11] Om f_3 är kvartiken, och x är en rot till den, kommer $(x, \pm\sqrt{f(x)})$ vara två primitiva 3-torsionspunkter.

[12] Detta gäller även för en godtycklig endomorfism A

[13] Om A är en 2×2 matris gäller t.ex. att $\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(A)^2 - 2\det(A)$, vilket enklast fås från $A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I = 0$.

Det är enkelt enligt ovan att beräkna $Z(P^n, q, t) = \frac{1}{(1-t)(1-qt)\ldots(1-q^n t)}$. Vidare inser man att zeta-funktionen är rationell om och endast om det finns (komplexa) tal α_i så att N_{q^n} gives av summor av $\pm\alpha_i^n$. Denna, den så kallade första Weil-hypotesen, bevisades redan av Dwork 1960. Den andra rör en funktionell ekvation för zeta-funktionen nämligen

$$Z(1/q^n t) = \pm q^{nE/2} t^E Z(t)$$

där n är dimensionen och E ett lämpligt heltal. Detta bevisades av Grothendieck 1965.

Låt oss återkomma till Lefschetz spårformel. Antag att vi till varieteten X kunde associera en kohomologiteori så att denna fixpunktsformel gäller. Till varje kohomologigrupp H^i skulle vi kunna associera F_q^* som en linjär avbildning och associera den duala karaktäristiska ekvationen $P_i(t)$.[14] Vi skulle då kunna skriva zeta-funktionen på formen

$$\frac{P_1(t)P_2(t)\ldots P_{2n-1}(t)}{P_1(t)\ldots P_{2n}(t)}$$

och E i funktionalekvationen ovan skulle då bli den associerade Eulerkaraktäristiken. Denna idé går tillbaka till Weil. Vi har bevisat detta för elliptiska kurvor ovan i och med att Tate-modulen ger vårt H^1. Weil visade det mera allmänt för abelska varieteter, och via kurvors jakobianer (som utgör speciella abelska varietteteter) lyckades även verfiera det för kurvor. Vidare visade han att polynomen i detta fall har heltalskoefficienter och att rötterna α till polynomen[15] satifierar $|\alpha| = q^{1/2}$. Detta mer precisa påstående[16] utgör den tredje och absolut djupaste formuleringen av Weil-hypoteserna. Innan Deligne åstadkom beviset var endast några enstaka fall utöver Weils resultat kända. Det vore att gå för långt att försöka skissera vad Deligne gjorde för att ro det i hamn. Den intresserade hänvisas till en översikt av Nick Katz i Proc. Sympos. Pure Math. XXVIII (Northern Ill. Univ.), Part 2, 537- 557, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.

Som avslutning kan man notera att om X är en komplex varietet utskuren av polynom med algebraiska koefficienter är det möjligt att reducera ekvationerna till en ändlig kroppsutvidgning $\mathbb{F}_q$ för varje primtal p. (Om koefficienterna är rationella, kan man antaga att de är heltal, och därmed på sedvanligt sätt reducera modulo primtalen.) Bettitalen för den kohomologiteori vi alluderat till kan då jämföras direkt med Bettitalen för den ursprungliga komplexa varieteten och skall då vara lika.(Talet E i funktionalekvationen kommer då att utgöras av Eulertalet för den ursprungliga komplexa varieteten.) Man skall dock ha i åtanke att inte alla varieteter av ändliga kroppar kan ”lyftas” till karaktäristik noll, men de som trots allt kan är av speciellt intresse. Vidare kan man genom en lämplig formulering

$$\zeta(X, s) = Z(X, q, q^{-s})$$

göra en analogi mellan zeta-funktionen till en varietet och den Riemannska och tolka likheterna $|\alpha| = q^{1/2}$ som en motsvarighet till den klassiska Riemannhypotesen för de geometriska zeta-funktionerna.

Jag vill dessutom tacka Per Salberger för att ha ögnat igenom mina två texter om Deligne och Weil-hypotesen och därmed besparat mig mer än en blunder. Ansvaret för innehållet förblir dock naturligtvis mitt.

Ett upprop för Normat

Ulf Persson

Normat, tidigare känd som Nordisk Matematisk Tidskrift, utkom med sitt första band 1953 och firar således 60 år i år. Det är stor fara att den i och med detta även går i graven. Detta är sorgligt, ty det rör sig egentligen om en tradition som går vida längre tillbaka. Norsk matematisk tidskrift utkom första gången redan 1919 och var då avsedd som medlemstidskrift för den norska matematikerföreningen som hade bildats året innan (drygt trettio år före den svenska motsvarigheten). Bland dess bidragsgivare märktes den unge gymnasisten Atle Selberg. År 1953 splittrades den i två grenar, dels den ovan nämnda tidskriften, vars syfte var att presentera populärt skriven matematik och dels den mer forskningsinriktade Mathematica Scandinavica.

[14] Låt $p(t]$ vara ett polynom av grad n och associera det duala $t^n p(1/t)$, d.v.s. vi vänder bara på koefficienterna. Ett polynom säges vara palindromt om det sammanfaller med sin dual.

[15] Och således de inverterade egenvärdena till Frobenius på de olika kohomologigrupperna.

[16] Tilläggas skall att $P_0(t) = 1 - t$ och $P_{2n}(t) = (1 - q^n t)$

Som det står skrivet i introduktionen till det första numret:

> *Nordisk Matematisk Tidskrift*, som her presenterer sitt første hefte, er av elementær karakter og vender seg til alle som interesserer seg for matematik i disse landen [de nordiska].

Introduktionen hänvisar även till andra nordiska tidskrifter av det slaget, som den danska *Matematisk Tidskrift* (med anor från 1859!, och som i likhet med sin norska systerskrift inlemmades i den nya nordiska), den svenska *Elementa* (sedan 1917) och den finska *Arkhimedes* (1949), och betonar värdet av en *fellesnordisk* tidskrift. I programförklaringen står

> *hovedspråkene i tidskriftet skal være dansk, norsk og svensk, de språk som binder Norden sammen, og som kan leses i alla våre fem land. Bare unntaksvis vil engelsk, fransk eller tysk bli brukt.*.

Vidare slås det fast att

> Redaksjonen vil ta sikte på at innholdet skal kunne foerståes uten særlig innsikt på spesielle og høyereliggende områder. Alt skal kunne oppfattes av lesere som har kunskaper som svarer til et par års universitetsstudium i matematikk, og en betydelig del skal være tilgjenglig for lesere med vesentlig mindre forutsetninger.

samt uttryckes förhoppningen

> ...at tidskriftet vil bidra til å knytte forskning och undervisning sammen, til å skape faglige och personlige kontakter innenfor kretsen av matematikk-intresserte og til å motvirke isolering och stagnasjon.

Redaktionen uppmuntrar även mindre erfarna skribenter och aviserar att erbjuda dessa råd och bistånd, facklig såväl som språklig *slik att bidragene kan bli så lødige og lettfattelige som mulig.* och avslutar med en uppmaning

> Den [redaktionen] oppfordrer leserne till å sende inn oppgaver och oppgaveløsninger, samt forslag till emner som de ønsker behandlet. *Den hensteller till alle interesserte å abbonera på tidskriftet og bidra til at også andre, så vel institutjoner som personer, tegner abonnement*[min kursivering]. Og sidst, men ikke minst, ber den leserne avse tid til å leve sig inn i det som tidskriftet bringer. Bare ved en slik aktiv medvirkning fra mange sider vil redaksjonen og leserne komme i den rette kontakten med hverandre, og bara på den måten vil Nordisk Matematisk Tidskrift kunne virke etter sin hensikt og bli et betydningsfullt bindeledd mellom matematikens dyrkare i de nordiske land, slik som redaksjonen ønsker og håper.

Såväl vackra som förståndiga ord som man bara kan instämma i, och som jag tänker återkomma till nedan. Frestelsen är stor att bläddra i de första tre ”binden”. Det inledes med en elegant skriven runa om Nils Erik Fremberg av Åke Pleijel. Därefter finner man bidrag av bland annat Viggo Brun (generaliserad Simpsonformel), Otto Frostman (en sats av Fary), Rolf Nevanlinna (den fyrdimensionella rymden), Germund Dahlquist (Monte Carlo-Metoden)[17], Thøger Bang (stora primtal), Carl-Erik Fröberg (Numeriska beräkningar på siffermaskiner), Ernst Selmer (Den ubestemte ligning $X^3+Y+3=AZ^3$), Arne Pleijel (Om konvexa kurvor) och Hans Rådström (Några elementära funktionalekvationer och Hilberts femte problem). Två artiklar är skrivna på engelska, en av Viggo Brun som med eleganta bilder visualiserar Leibniz formel för π, och en av Magnus Tideman om ett elementärt bevis för ett teorem om unicitet hos positiva harmoniska funktioner, och ett på tyska av Dijksterhuis om Arkimedes integrationsmetoder. Vidare återfinner man ett stort antal notiser med anknytning till analytisk geometri för kägelsnitt, som utgjorde en central komponent i gymnasieundervisningen på den tiden. Man finner artiklar om Abel och Eneström, historiska översikter som ”Da sandsynlighedsregning blev videnskap”, tillämpningar som ”von Neumanns spilteori”, och en hel del didaktiska artiklar av författare som Gårding, Sandgren[18] och Kay Piene. Vidare recenserars ett stort antal böcker, alltifrån en problemsamling för två betyg av Hörmander och Sandgren till klassiker som Polyas klassiker Plausible Reasoning och Øysten Ores Abelbiografi. Problemlösningsuppgifter (oppgaver) är ett regelbundet återkommande inslag, som även innefattar studentexamensproven i de nordiska länderna, samt tävlingsproblem för skolelever, som initierades i våra grannländer betydligt tidigare än i Sverige. Det kan i sammanhanget vara intressant att ta närmare del av en notis av Sandgren. Tidskriften hade hösten 1954 anordnat en pristävling för svenska gymnasister.

[17] Redaktörerna tyckte att den artikeln kanske var lite väl vansklig, men fann att intresset av en översikt av detta nya område berättigade inklusionen.

[18] bland annat ”Nya kursplaner och metodiska anvisningar i matematik för gymnasiet i Sverige”

En uppgift löd

> Som bekant är $\sin x < x$ för $x > 0$. Bestäm det minsta värde på a för vilket $\sin x > x - ax^3$ då $x > 0$.

Ingen gymnasist förmådde ge en korrekt lösning till detta. Sandgren förmodar att problemet inte skulle ha gett danska gymnasister samma svårigheter, inte för att deras gymnasiekurs i funktionsläran vore mer omfattande utan för att denna kurs är inriktad på centralare frågeställningar än den svenska. Sedan följer en diskussion om avsaknaden av stringens i gymnasieframställningen i funktionslära (för att inte tala om alla felaktigheter som florerar i läroböckerna) och att danskarna hade en betydligt längre tradition (analysen fick redan i början av 1900-talet en central ställning i skolkursen) än svenskarna. Samtidigt varnar han även för att ge alltför mycket betoning på "precisionsmatematik" ty det kan verka hämmande på spekulativt och intuivt tänkande. Han betonar att detta ändå är charmen med matematik och beklagar att det i skolan endast får sitt utlopp i lösandet av mer eller mindre knepiga problem.

Och till slut kan man även notera att tidskriften fortfarande tjänade som medlemsskrift, ty regelbundet ges de listor över de föredrag (med föredragshållare) som givits i de olika nordiska samfunden under årets lopp.

Jag lånade den inbundna samlingen för att ta del av Pleijels runa över Fremberg i samband med min artikel om Hörmanders disputation i förra numret av Bulletinen, men jag har varit mycket obenägen att lämna tillbaka den, ty det är så många artiklar jag är lockad av att läsa. Tar man ner en godtycklig tidskrift ur hyllan är detta nästan aldrig fallet. Artiklarna är av nödvändighet alltför tekniska och specialiserade. Typiskt, endast, om ens då, är man motiverad om artikeln har en direkt anknytning till ett forskningsproblem man brottas med. Och i detta fall läser man sällan från A till O utan skummar igenom för att koncentrera sig på en eller annan detalj. Att skriva populärt betyder inte nödvändigtvis bara att skriva för en okunnig allmänhet utan även för sina förhoppningsvis något mera insatta kolleger.

Klart är att Nordisk Matematisk Tidskrift fyllde en mycket viktig funktion för sextio år sedan. Kan man säga detsamma nu? Tiderna har förändrats och därmed det matematiska landskapet. För sextio år sedan förelåg en bildad matematisk allmänhet, huvudsakligen bestående av läroverkslärare, ute i skolorna. Det fanns även en fungerande koppling mellan den akademiska världen och skolans värld via censorer och det faktum att lektorerna ute i skolorna hade en matematisk forskarutbildning bakom sig och därmed besatt en djupare akademisk koppling. NMT verkade i denna tradition och utgjorde en levande förbindelselänk mellan skola och akademi. Tyvärr tvingas man inse att detta numera är orealistiskt. Man får vara glad om svenska lärare läser Nämnaren (samt övriga nordiska lärare dess motsvarigheter)[19]. För att Normat skall kunna överleva och ha ett berättigande måste den engagera den akademiska kåren som kärnpublik. En matematisk kår som är vida större än den var för sextio år sedan. Många av den tidens skollärare skulle vara professorer och lektorer idag. En uppenbar lösning vore att göra Normat till en gemensam medlemsskrift för samtliga nordiska samfund. Jag har pläderat för detta men det har än så länge inte föranlett någon respons. Ett allvarligt problem är de nordiska samfundens modesta ekonomier, bland annat beroende på att de flesta medlemmar (i likhet med undertecknad) är ständiga medlemmar. Den mer realistiska lösningen vore istället att fler professionella matematiker stödjer utgivandet via prenumerationer. Men varför skulle de göra det?

Normat är utsatt för uppenbar konkurrens. American Mathematical Society erbjuder högklassiga matematiska artiklar ämnade för en större matematisk allmänhet, främst via sin Bulletin. Vidare finns en uppsjö av sådana att leta upp på nätet. Numera översköljs man av information av allehanda slag och den viktigaste uppgiften är inte att ta till sig den, utan att värja sig från den. Ett annat problem är att många matematiker är inriktade på sin egen snäva professionella verksamhet och det finns ingen plats eller intresse för matematik såsom ren fritidssysselsättning. Det är betecknande att många unga matematiker avböjer att publicera i Normat ty det ger inga poäng (det är en formalitet och tecken tyder på att detta kan ändras). Jag finner detta mycket beklagligt, men om det är den förhärskande attityden finns det ingen anledning att fortsätta med Normat och en epok går i graven. För att en tidskrift som Normat skall vara levande och utgöra en inspiration för blivande matematiker måste professionella matematiker aktivt bidraga. En tidskrift som bara baseras på material som amatörmatematiker levererar blir oerhört torftig. Det finns så mycket matematik som faktiskt är ganska elementär och tillgänglig för en större skara, men som ligger förborgad i facktidskrifter.

En vanlig missuppfattning när det gäller skrivandet av populära artiklar är att man skall ta sitt eget tekniska specialområde, förenkla och urvattna och vifta med händerna. Resultatet kan ofta bli lika obegripligt för experten som för lekmannen. Istället skall man skriva till barnet inom sig. Att ta ett oskyldigt perspektiv kan inne-

[19]En av mina goda idéer är att låta varje artikel i Normat ackompanjeras av en liten blänkare i Nämnaren där de elementärare aspekterna berörs flyktigt och innehåller en inbjudan till vidare fördjupning med hänvisning till Normat. Men en god idé är värdelös om den inte går från ord till handling.

bära att man inom sig själv väcker upp den nyfikenhet och fascination som ursprungligen ledde in en på den matematiska banan, endast då kan man hoppas att väcka läsarens nyfikenhet som i bästa fall kan leda till fascination. Om någon sådan inte föreligger, är det inte mycket att göra åt saken. För att precisera, låt mig ta några personliga exempel. Som realskoleelev träffade jag för första gången på de platonska kropparna. Det var för övrigt i en samling av Martin Gardner. Jag blev djupt fascinerad, gjorde egna modeller av papp och drömde om att finna motsvarigheterna i fyra dimensioner. Detta var uppenbarligen en uppgift som låg långt utöver min förmåga. Många år senare lärde jag mig av Coxeter att beskriva de platonska kropparnas symmetrigrupper, vilka är intimt förknippade med speciella projektioner. Vi har här på en elementär nivå en fusion av geometrisk kombinatorik och linjär algebra. Vad händer om jag gör motsvarande sak för hyperkuben (som jag träffade på i Gamow före de platonska kropparna)? Symmetrigrupperna för de 4-dimensionella regelbundna polytoperna är givetvis kända sedan länge. Det är bara att googla. Om man håller på att skriva en artikel för en facktidskrift och behöver ha information om detta är det legitimt att så göra. Det är som att gå till affären och köpa en komponent. Enkelt och behändigt. Men om man bara är nyfiken? Då är det som att kika i facit innan man börjar lösa en uppgift. Hur mycket roligare är det inte att göra det själv! Man startar från scratch med en basal matematisk allmänbildning. Det blir en liten upptäcksresa, inte mindre av en upptäckt bara för att andra har varit där tidigare. Jag har mycket roligt. Under resans gång upptäcker jag av en tillfällighet en ”ny” regelbunden polytop med 24 hörn och 24 celler, som jag finner kallas för oktaplexen. Jag bestämmer dess symmetrigrupp. Jag skriver program i C som manipulerar 4×4 matriser, och räknar ut konjugatklasser och finner de sekulära ekvationerna. Jag skriver program i PostScript som visar de olika symmetriska projektionerna utifrån konjugatklasserna. Några av dessa projektioner är slående vackra. Jag anknyter till kvaternioner, finner för mig okända ändliga delgrupper därav, varav vissa tycks relaterade till Heisenbergsgruppen över Z_2 vilket jag kan bekräfta. Jag finner hela arbetet betydligt mera matematiskt tillfredställande än att skriva en typisk fackuppsats. Allt är känt, arbetet ger min inga poäng, ingen ära, ingen uppskattning (bortsett från min egen personliga). Är det värt detta? Jag tycker så. Det lär vara så att de flesta matematiska fackuppsatser skrivs bara av meriteringsskäl och i bästa fall läses av granskaren. Vad är det för fel att skriva matematik av ren glädje? Ett annat exempel går även detta tillbaka till en fundering jag hade som realskoleelev. Jag insåg att i varje riktning finns det en linje som delar ett område i två halvor med samma area. Jag framkastade hypotesen att alla dessa linjer skär varandra i en punkt, som därmed skulle kunna betecknas som den ”rätta” medelpunkten. Jag försökte bevisa detta utan framgång, ty vad jag inte insåg då, var att det inte ens stämmer för trianglar, något som jag däremot som mogen matematiker och redaktör för Normat omedelbart insåg när jag begrundade frågan på nytt drygt fyrtio år senare. Istället beskriver skärningspunkterna av sådana halverande linjer en intressant kurva som jag började närmare undersöka. Återigen fick jag tillfälle att programmera från scratch i C för att kunna rita upp exempel. Och säkert är det känt. Ytterligare exempel är ett elementärt problem som Bengt Ulin tog upp, nämligen icke-kongruenta trianglar med samma omkrets och area. Det slog mig att dessa parametriseras naturligt med Riemanns theta-funktion, och icke utan möda skrev jag ut detaljerna. Sammankopplingen mellan elementär och ”högre” matematik är fängslande, som Felix Klein väl insåg. Jag skulle kunna göra listan lång men vill inte tära på läsarens tålamod. Jag vill inte heller kommentera hur framgångsrika mina försök har varit, ty till detta är jag uppenbarligen inte rätte mannen, det enda jag kan göra är att redovisa mina bevekelsgrunder och motivation, i hopp om att andra läsare däri må finna lite inspiration. Däremot står det mig fritt att ge eloger till kolleger som bidragit, och jag vill speciellt framhålla Jan Boman, som inte bara bidrog tillsammans med Jan-Erik Björk om vad som hände med Fugelsangs tappade skiftnyckel under rymdpromenaden (celest mekanik och astronomiska tillämpningar är ett ypperligt ämne, ty jag misstänker att de flesta matematiker under sin barndom var fängslade av just astronomi) utan även gjorde en elegant kommentar till Ulins ovannämnda artikel, och sist men inte minst presenterade tomografin, vars matematiska bas bör tillhöra allmänbildningen.

Jag har en uppsjö av uppslag för kommande artiklar i den anda som jag redan antytt, men det ser illa ut om jag som redaktör skriver samtliga artiklar, mitt uppdrag är istället att inspirera andra att så göra. Men är det hopplöst? Föreligger inget intresse av matematik som en kulturmanifestation? Det är svårt för oss matematiker att kommunicera över våra specialområden. Tyvärr är det så att ett matematiskt seminarium sällan skiljer sig från en veritabel föreläsning. Folk sitter av artighet och lyssnar och ställer möjligen av plikt någon fråga efteråt. Jag har deltagit i seminarier i filosofi. Då är det en helt annan fart på deltagarna. Oerhört roligt. Vad Normat vill spegla är en gemensam matematisk kultur. Att låta sig beröras av andra områden än dem man sysslar med som specialitet. Jag är övertygad om att detta kan inte vara annat än stimulerande, även för den egna forskningen. Men kanske jag är naiv. Jag ser dock ett visst hopp i det faktum att Normats problemavdelning tydligen har uppskattats under alla dessa år och kan vara den huvudsakliga anledningen till att en trogen, om än krympande, prenumerantskara har hållit ut i alla dessa år. Vad jag har skisserat ovan borde vara den naturliga vidareutvecklingen av problemavdelningen.

Jag skulle även vilja tillägga att det givetvis finns utrymme för andra typer av artiklar än de rent matematiska. Runor är ett uppenbart exempel, och tillhör närmast plikten, men även intervjuer. Under 2008 lär jag publicera i varje nummer ett avsnitt av den intervju som Christian Skau och Nils Baas gjorde med Selberg strax före hans död. Utan Normat skulle det ha varit svårt att publicera denna i sin helhet. Kanske den bedrift som jag är stoltast över angående Normat är att ha lyckats kontakta Herman Weyls son som gav sitt tillstånd att publicera ett brev som hans far skrivit med anledning av Selberg-Erdős kontroversen, ett brev som AMS inte vågade publicera. Detta visar även vitsen med en tidskrift, när det gäller finns det ett lämpligt forum. Andra exempel är historiska översikter och filosofiska betraktelser som oftast är tillgängliga långt utanför en snävare krets.

Det passar ypperligt att avsluta med en uppmaning. Normats utgivning är av olika anledningar försenad. Först och främst för att sammanställningen av ett temanummer (det blev ett dubbelnummer) för Galois blev en propp i systemet. Faktum är nu att inte ett enda nummer av årgång 2012 har sett dagens ljus. Vi hoppas kunna få ut samtliga dessa nummer över sommaren och tidiga hösten. Manustillgången är dock för torftig för att redan nu fylla dessa nummer. Visserligen skulle jag kunna fylla ut dem på egen hand, men detta vore av många anledningar olyckligt. För presumtiva författare finns här ett gyllene tillfälle att snabbt få något publicerat.

Wallenbergpriset 2013

Svenska Matematikersamfundet har tilldelat Håkan Samuelsson Kalm och Elizabeth Wulcan 2013 års Wallenbergpris. Priset har delats ut sedan 1983 till löftesrika unga svenska matematiker, och bekostas sedan 1987 med medel från Marianne och Marcus Wallenbergs stiftelse.

Foto: Setta Aspström

Elizabeth Wulcan disputerade vid Chalmers tekniska högskola 2007 med avhandlingen *Residue Currents and their Annihilator Ideals*. Hon var därefter postdoktor vid Institut Mittag-Leffler och University of Michigan. Sedan 2010 har hon anställning som forskarassistent vid Matematiska vetenskaper. Elizabeths forskningsområden är komplexanalys i flera variabler och hon är särskilt intresserad av flerdimensionell residyteori och komplex dynamik.

Foto: Marie Kalm

Håkan Samuelsson Kalm disputerade vid Göteborgs universitet 2005 med avhandlingen *On residue currents and multivariate operator calculus*. Därefter var han bl a postdoktor på Erwin Schrödinger-institutet i Wien, Universität Wuppertal, Göteborgs universitet, Universität Wien och Universitetet i Oslo, och universitetslektor vid Lunds universitet. Han har en forskartjänst vid Matematiska vetenskaper sedan 2012 och är för närvarande föräldraledig. Håkans forskningsområde är komplex analys och ett centralt tema i hans forskning är integralformler och kalkyl för residyströmmar.

Vi hoppas kunna ge en utförligare presentation av pristagarna och deras arbete i nästa nummer av SMS bulletinen. Informationen har tagits från webbplatsen för Chalmers/Göteborgs universitet.

Lars Hörmanders tidiga bidrag till partiella differentialekvationer

Anders Melin

18 maj 2013

Inledning

I denna redogörelse vill jag försöka beskriva några av Lars Hörmanders anmärkningsvärda tidiga bidrag till lineära partiella differentialekvationer.

Det är välkänt att Lars Hörmander tilldelades Fieldsmedaljen vid Internationella matematikerkongressen i Stockholm 1962.[1] Jag vill hedra Hörmanders minne genom att påminna om några idéer som såg dagens ljus i hans avhandling och som har kommit att ha en bestående inverkan på utvecklingen av lineära differentialoperatorer. Även om ett imponerande stort antal grundläggande frågor besvarades redan i hans avhandling, födde denna också frågor, vilkas lösning krävde flera årtionden eller till och med ett halvt århundrade.

Det ligger nära till hands att förmoda att inte så mycket är känt bland yngre matematiker om Hörmanders tidiga arbete och om vad som föranledde det internationella matematiska samfundet att tilldela honom detta prestigefyllda pris. Med tanke på den snabba utvecklingen av teorin för differentialoperatorer under det senaste halvseklet kanske detta redan anses vara historia. Utvecklingen av ny teori och teknik, inom vilken Hörmander bibehöll en ledande ställning, gör det möjligt, t.o.m. för en nybörjare på området, att lösa problem som föreföll oöverstigliga vid den tid då han började. Förutom att vara en oumbärlig lärobok för en forskarstuderande som vill lära sig området (eller, mer realistiskt, en del av det), utgör Hörmanders omfattande monografi [9] en utmärkt referens till utvecklingen av lineära differentialoperatorer.

Hörmanders avhandling [4], publicerad i Acta Mathematica 1955, är i alla avseenden ett mästerverk. Den är inte bara ett dokument som presenterar fullständiga bevis för förbluffande resultat från den tiden, utan den innehåller även en rikedom på idéer, så talrika att Hörmander inte behöver använda dem alla. Det finns några kvar åt läsaren, och de kan användas till alternativa bevis för några grundläggande resultat, kanske i en något svagare form, men ändå tillräckligt starka för att ge läsaren många stimulerande erfarenheter. Kanske är det skillnad på avhandlingen och Hörmanders senare arbeten, som ibland kunde ge läsaren det felaktiga intrycket att det inte fanns några frågor kvar inom forskningsområdet.

När jag skriver om Hörmanders arbete, särskilt om bidragen i hans avhandling, har jag försökt att ge läsaren en uppfattning om vad som senare hänt med resultat och metoder som infördes i ett tidigt skede av en stor matematikers karriär. För att kunna presentera idéerna har jag valt att ge översiktliga bevisskisser som ibland är fullständiga så när som på formaliteter. En läsare som tycker att det är långtråkigt eller svårt att läsa dessa kan helt enkelt hoppa över dessa partier. Jag har tagit mig friheten att ibland omorganisera idéer från avhandlingen i en annan form eller ordningsföljd. Det tyckte jag var nödvändigt för en kort och sammanhängande framställning, och redogörelsen är långt ifrån uttömmande. I stället har jag försökt introducera läsaren till en anmärkningsvärd karriär

[*] Jag vill tacka Ingrid Beltiţă för värdefulla kommentarer

[1] Den andre pristagaren var John W. Milnor. Fieldsmedaljörernas arbeten presenterades av Lars Gårding och Hassler Whitney. Jag rekommenderar en läsning av Gårdings tal, se [3]. Kongresstrycken från IMU-kongressen kan laddas ned från `http://ada00.math.uni-bielefeld.de/ICM/ICM1962.1/ICM1962.1.ocr.pdf`.

genom att välja exempel. Förhoppningsvis kan samtidigt några nyttiga matematiska insikter förmedlas till icke-experten. Jag vill också bestämt deklarera att alla eventuella matematiska misstag i mina förklaringar enbart beror på mig.

Lineära differentialoperatorer. Lite bakgrund

En lineär (partiell) differentialoperator i en öppen mängd Ω i $\mathbf{R}^n$ är en ändlig summa

$$P = \sum_\alpha a_\alpha(x) D^\alpha,$$

där a_α är komplexvärda funktioner i Ω, indicerade med multiindex $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, och

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},\ D_j = i^{-1}\partial_{x_j}.$$

Typiska exempel är:

$$\begin{aligned}
&D_1 + iD_2, \quad \text{Cauchy-Riemann-operatorn}\\
&\Delta = -|D|^2 = -(D_1^2 + D_2^2 + \cdots + D_n^2), \quad \text{Laplaceoperatorn}\\
&D_1^2 + \cdots + D_n^2 - D_{n+1}^2, \quad \text{vågoperatorn}\\
&D_1^2 + \cdots + D_n^2 + iD_{n+1}, \quad \text{värmeledningsoperatorn}
\end{aligned}$$

tillsammans med modifieringar med icke-konstanta koefficienter. I dessa exempel representerar x_{n+1} tiden, medan de övriga variablerna vanligen betraktas som rumsvariabler.

Funktionen $p(x,\xi) = \sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$ i $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ är *symbolen* för P, och P är av *ordning* m om m är det minsta heltal för vilket a_α är identiskt lika med 0 då $|\alpha| = \sum \alpha_j > m$. Nu är $p_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ *principalsymbolen* för p. Operatorn är *elliptisk* om $p_m(x,\xi) \neq 0$ då $\xi \neq 0$. Vi kommer att använda beteckningssättet $p^{(\alpha)}(x,\xi) = \partial_\xi^\alpha p(x,\xi)$.

De grundläggande frågorna i anslutning till differentialekvationerna $Pu = f$ gäller existens och regularitetsegenskaper för lösningarna u. Detta kan bara diskuteras sedan lämpliga villkor har formulerats för koefficienterna a_α och högerledet f. Vid användning som fysikaliska modeller, till exempel, måste ytterligare villkor ställas på ekvationerna för att lösningar ska vara entydigt bestämda. Sådana villkor skulle kunna vara begynnelsevillkor, randvillkor eller strålningsvillkor i oändligheten.

När f och koefficienterna till P är reellt analytiska funktioner kan man, genom att utveckla u och f i potensserier, visa att ekvationen $Pu = f$ är lokalt lösbar nära varje punkt y i $\mathbf{R}^n$ sådan att $p_m(y,\eta) \neq 0$ för något η. Efter ett affint variabelbyte kan man anta att $y = 0$, $\eta = (0,\ldots,0,1)$ och då finns enligt *Cauchy-Kovalevskys sats* en öppen omgivning U av origo så att *Cauchyproblemet*

$$Pu = f \text{ in } U,\ D_n^j u = 0 \text{ i } U \cap \{x;\, x_n = 0\}, j < m$$

är entydigt lösbart för varje f som är reellt analytisk i U. Denna sats gäller även i den icke-lineära situationen där koefficienterna också kan bero på u. Ett specialfall bevisades av Cauchy [1] kring 1840 och det allmänna fallet behandlades av Sonja Kovalevsky [2].

Även om mycket var känt kring mitten av förra århundradet om de differentialoperatorer som kom till användning inom olika tillämpningar av matematiken, saknades en allmän teori, även för klassen av differentialoperatorer med konstanta koefficienter. Den situationen ändrades med Hörmanders avhandling.

I den här korta presentationen är det inte möjligt för mig att ge en historisk bakgrund, men jag kan inte avstå från att ge några glimtar från den tid då Hörmander gjorde entré. Han påbörjade sina forskarstudier år 1950 vid Matematiska institutionen i Lund. Den legendariske professor Marcel Riesz, vars intressen täckte mycket viktiga områden inom matematisk analys, däribland partiella differentialoperatorer, blev hans lärare. Riesz emeriterades 1952 och år 1953 utnämndes Åke Pleijel och Lars Gårding till professorer i matematik i Lund. De var bägge experter på partiella differentialekvationer och Gårding, som blev Hörmanders avhandlingshandledare efter Riesz, hade gett flera viktiga bidrag till elliptiska och hyperboliska ekvationer som även påverkade Hörmander. Bland de internationella auktoriteter inom partiella differentialoperatorer som tycks ha haft inflytande på Hörmander vill jag främst nämna den sovjetiske matematikern Ivan Petrovsky. Han var känd för sitt arbete om hyperboliska system av differentialoperatorer och för resultat om analyticitet av lösningar till elliptiska system med analytiska data.

Det är också viktigt att nämna den franske matematikern Laurent Schwartz som 1950-51 publicerade sitt arbete om distributioner [13]. Hörmander insåg snart vikten av att använda distributioner i teorin för partiella differentialoperatorer, även om de nya idéerna möttes med skepsis av vissa matematiker, däribland hans lärare Marcel Riesz.[2] Ett skäl till att använda distributionsteori var att den gav en enhetlig uppfattning om begreppet svag lösning till en partiell differentialekvation. Att betrakta sådana lösningar blev nödvändigt eftersom de flesta differentialekvationer bara kunde angripas med funktionalanalytiska metoder.

En annan matematiker som hade inflytande på Hörmander var Bernard Malgrange som år 1953 hade konstruerat fundamentallösningar till allmänna lineära differentialoperatorer med konstanta koefficienter [12]. Om P är en sådan operator säger vi att en distribution E är en *fundamentallösning* om den löser ekvationen $PE = \delta$, där δ är Diracs deltafunktion som till varje testfunktion ordnar dess värde i origo. Då en fundamentallösning E väl har konstruerats, löses varje ekvation $Pu = f$, där f är en distribution med kompakt stöd, av $u = E * f$, där $E * f$ är faltningen mellan E och f.[3] Malgranges resultat medförde lösbarhet för varje ekvation med konstanta koefficienter i $\mathbf{R}^n$ vars högerled har kompakt stöd, med det gav inte mycket information om lösningens egenskaper och var inte tillräckligt starkt för konstruktion av lösningar då $\mathbf{R}^n$ ersätts med delområden. Ett banbrytande steg framåt togs således av Hörmander redan i första delen av hans avhandling, där han bevisade att ekvationen $Pu = f \in L^2(\Omega)$ alltid har en lösning $u \in L^2(\Omega)$, där Ω är vilken som helst öppen delmängd av $\mathbf{R}^n$.[4] Jag ska förklara detta mer utförligt i kommande avsnitt för att ge en antydan om den teknik som Hörmander införde i sin avhandling och sedan fortlöpande utvecklade i sina senare arbeten.

Redskapen

Hörmander var en mästare när det gällde att tillämpa metoder från vitt skilda områden av matematiken, där hörnstenarna var reell och komplex analys, kombinerad med funktionalanalys. Senare blev geometriska överväganden viktigare då han angrep djupa frågor gällande differentialekvationer med variabla koefficienter. Genom hela sitt matematiska liv fortsatte han att fördjupa sina insikter inom flera områden såsom differentialgeometri, algebra, hamiltonsk mekanik och konvexitetsteori, bara för att nämna några.

För en lineär partiell differentialoperator P, särskilt en med variabla koefficienter (vi antar att de är glatta), är det i allmänhet omöjligt att skriva ned lösningsformler för ekvationen $Pu = f$. I stället måste man använda funktionalanalys för att bevisa att en lösning u existerar, och därefter kan andra metoder ge mer information.

Den funktionalanalys som Hörmander använder i sin avhandling är en kombination av Hilbertrumsmetoder och distributionsteori. I det följande betecknar jag med $C^k(\Omega)$, där $0 \leq k \leq \infty$, rummet av k gånger kontinuerligt deriverbara funktioner i Ω, och $C_0^k(\Omega)$ betecknar delklassen av funktioner som är identiskt noll utanför en kompakt delmängd av Ω. Med $\mathcal{D}'(\Omega)$ menar vi rummet av distributioner i Ω.[5]

$L^2(\Omega)$ är Hilbertrummet bestående av kvadratiskt integrabla funktioner i Ω med skalärprodukt och

[2] Se anmärkningen i avsnittet om hypoellipticitet

[3] Om f och g är lokalt integrabla funktioner och en av dem har kompakt stöd, är $(u*v)(x) = \int u(y)v(x-y)\,dy$. Denna operation kan lätt överföras till distributioner.

[4] Här och framöver ska ekvationen $Pu = f$ tolkas i distributionsteorins mening om ingen ytterligare regularitet som medger en klassisk tolkning nämns

[5] Dessa är lineära former på $C_0^\infty(\Omega)$ som satisfierar vissa kontinuitetsvillkor.

norm definerade genom

$$(f,g) = \int_\Omega f(x)\bar{g}(x)\,dx,\ \ \|f\| = (f,f)^{1/2}.$$

Om A är en lineär operator som är kontinuerlig från $C_0^\infty(\Omega)$ till $L^2(\Omega)$, så definieras dess formellt adjungerade operator $A^* : L^2(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ av villkoret $(Au, v) = (u, A^*v)$ då $u \in C_0^\infty(\Omega)$ och $v \in L^2(\Omega)$.[6] Vi säger att A är formellt självadjungerad om $A^* = A$. Om p är symbolen för P, så följer av Leibniz formel att symbolen p^* för P^* ges av

$$p^*(x,\xi) = \sum_\alpha D_x^\alpha (iD_\xi)^\alpha \bar{p}(x,\xi)/\alpha!. \tag{1}$$

Detta visar att principalsymbolen för P^* är konjugatet av motsvarande symbol for P.

Följande lemma är ett av de redskap från funktionalanalys som var oundgängliga i Hörmanders arbete. Vi ska ge fler exempel senare.

Lemma 1. *Om det finns en konstant C, sådan att*

$$\|v\| \le C\|P^*v\|, \quad v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2}$$

så har ekvationen $Pu = f$ en L^2-lösning u för varje f i $L^2(\Omega)$.

Bevis. Låt $f \in L^2(\Omega)$. Att $u \in L^2$ löser ekvationen $Pu = f$ betyder att $(h,u) = (v,f)$ om $h = P^*v$ och $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Eftersom v är entydigt bestämd av h på grund av uppskattningen (2) är avbildningen av h på (v,f) en lineär form på $P^*C_0^\infty(\Omega)$. Uppskattningen (2) visar, tillsammans med Hahn-Banachs sats att denna form kan utvidgas till en kontinuerlig lineär form på $L^2(\Omega)$. Det finns alltså ett element u i det Hilbertrummet sådant att $(P^*v, u) = (v, f)$ då $v \in C_0^\infty(\Omega)$, och då är $Pu = f$. □

Jag vill också nämna ett enkelt lemma som användes av Malgrange då han visade existensen av fundamentallösningar. Som vi ska se senare användes detta också av Hörmander för att visa existens av L^2-lösningar, men han utvecklade också detta lemma till mycket starkare versioner som gjorde det möjligt att konstruera fundamentallösningar med optimala regularitetsegenskaper. Det finns en mycket elegant och förvånansvärt enkel konstruktion av fundamentallösningar till lineära differentialoperatorer med konstanta koefficienter i avsnitt 7.3 i [9]. Dessa fundamentallösningar, som Hörmander kallade *reguljära*, analyserades sedan mycket utförligt i kapitel 10 i samma monografi.

Lemma 2. *Låt $q(z) = a_m z^m + \cdots + a_0$ vara ett polynom och φ analytisk i enhetsskivan och kontinuerlig på dess slutna hölje. Då gäller*

$$|a_m\varphi(0)|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})|^2\,d\theta. \tag{3}$$

Bevis. Vi kan anta att $a_m \ne 0$. Låt

$$r(z) = q(z)\prod_l \frac{1-\bar{z}_l z}{z - z_l},$$

där produkten tas över nollställen till q i den slutna enhetsskivan och tolkas som 1 om det inte finns några. Då ser man lätt att $|a_m| \le |r(0)|$, och eftersom $|q(z)| = |r(z)|$ på enhetscirkeln ger detta

$$\begin{aligned} |a_m\varphi(0)| \le |r(0)\varphi(0)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |r(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})|\,d\theta &\le \Big(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |q(e^{i\theta})\varphi(e^{i\theta})|^2\,d\theta\Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

[6]Om v är en distribution, så definieras dess konjugat $\bar{v}$ på ett naturligt sätt, och vi använder skrivsättet (φ, v) för verkan av $\bar{v}$ på testfunktionen φ.

Osäkerhetsprincipen och L^2-lösbarhet i begränsade områden

Låt X_j beteckna multiplikation med x_j/i och observera att $X_j^* = -X_j$, $D_k^* = D_k$ och

$$[X_j, D_k] = \delta_{j,k} I, \tag{4}$$

där vi använder beteckningen $[A, B]$ för kommutatorn $AB - BA$ till två operatorer.

Som förberedelse för nedanstående diskussioner påminner jag läsaren om osäkerhetsprincipen som jag formulerar i följande form:

Lemma 3. *Om $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ har stöd i ett klot med radie R gäller*

$$\|u\| \leq 2R\|D_j u\| \tag{5}$$

för varje j.

Bevis. Vi kan anta att klotet har medelpunkt i origo. Det följer av (4) med $j = k$ att

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &\leq |(X_j D_j u, u)| + |(D_j X_j u, u)| \\ &= |(X_j D_j u, u)| + |(u, X_j D_j u)| \leq 2\|u\| \cdot \|X_j D_j u\| \leq 2R\|u\| \cdot \|D_j u\|. \end{aligned}$$

□

Nedanstående lemma är en omedelbar och användbar följd av ovanstående. Definiera

$$\|u\|_k = \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|$$

för $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Lemma 4. *Antag att u har stöd i ett klot B med radie R i $\mathbf{R}^n$. Om $k \in \mathbf{N}$ så är*

$$\|u\|_k \leq 2R\|u\|_{k+1}. \tag{6}$$

Med inspiration från avhandlingen ska vi nu presentera en mycket starkare version av osäkerhetsprincipen.[7]

Lemma 5. *Antag att Ω är en begränsad öppen delmängd av $\mathbf{R}^n$, innehållen i ett klot med radie R, och att p är ett polynom av grad m. Då är*

$$\|p^{(\alpha)}(D)u\| \leq (2R)^{|\alpha|}(m!/(m - |\alpha|)!)\|p(D)u\| \tag{7}$$

för $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Bevis. Efter translation och skaländring kan vi anta att $R = 1$ och att Ω är innehållet i enhetsklotet. Sätt $p^{(j)}(\xi) = \partial_{\xi_j} p(\xi)$. Vi visar först med induktion över m att

$$\|p^{(j)}(D)u\| \leq 2m\|p(D)u\|, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{8}$$

Eftersom (8) trivialt gäller då $m = 0$ kan vi anta att $m > 0$ och att påståendet redan har bevisats för mindre heltal.

Eftersom D är formellt självadjungerad följer att $\bar{q}(D)$ är den formellt adjungerade operatorn till $q(D)$ då q är ett polynom, och eftersom $q(D)\bar{q}(D) = \bar{q}(D)q(D)$, gäller också $\|q(D)u\| = \|\bar{q}(D)u\|$ för $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Vi ska använda detta och även att $p^{(j)}(D) = [X_j, p(D)]$. Nu får vi

$$\begin{aligned} \|p^{(j)}(D)u\|^2 &= (X_j p(D)u - p(D)X_j u, p^{(j)}(D)u) \\ &= (X_j p(D)u, p^{(j)}(D)u) - (X_j u, p^{(j)}(D)\bar{p}(D)u) \\ &= (X_j p(D)u, p^{(j)}(D)u) + ([X_j, \bar{p}^{(j)}(D)]u, \bar{p}(D)u) - (X_j \bar{p}^{(j)}(D)u, \bar{p}(D)u). \end{aligned}$$

[7] Den här versionen formuleras inte explicit i avhandlingen, men den följer av en kombination av idéer i den.

Induktionsantagandet, tillämpat på $\bar{p}^{(j)}$,ger

$$\|[X_j, \bar{p}^{(j)}(D)]u\| \leq (2m-2)\|\bar{p}^{(j)}(D)u\| = (2m-2)\|p^{(j)}(D)u\|,$$

och då $\|X_j v\| \leq \|v\|$ för $v \in L^2(\Omega)$ följer att

$$\|p^{(j)}(D)u\|^2 \leq 2m\|p^{(j)}(D)u\| \cdot \|p(D)u\|.$$

Detta bevisar (8).

Det är nu lätt att bevisa (7) med induktion över $|\alpha|$. Uppskattningen gäller då $|\alpha| = 0$. Vi kan därför anta att $|\alpha| > 0$ och att (7) gäller för lägre värden på $|\alpha|$. Välj j och β så att $p^{(\alpha)} = q^{(j)} = \partial_{\xi_j} q$, där $q = p^{(\beta)}$. Nu följer av induktionsantagandet att

$$\|q(D)u\| = \|p^{(\beta)}(D)u\| \leq 2^{|\alpha|-1}(m!/(m+1-|\alpha|)!)\|p(D)u\|.$$

Om vi använder (8) med m ersatt med $m + 1 - |\alpha| = \deg(q)$ får vi

$$\|p^{(\alpha)}(D)u\| = \|q^{(j)}(D)u\| \leq 2(m+1-|\alpha|)\|q(D)u\|.$$

Olikheten (7) följer om denna uppskattning kombineras med föregående olikhet. $\square$

Låt $0 \neq P = p(D)$ vara en differentialoperator av ordning m med konstanta koefficienter och låt Ω vara en icke-tom, öppen och begränsad delmängd av $\mathbf{R}^n$. Låt C genomgående beteckna konstanter som kan bero på P och Ω. Följande resultat uppnåddes med energiintegralmetoder i Hörmanders avhandling. Med utnyttjande av föregående lemma blir beviset mycket kort.

Sats 6. *Det finns en konstant $C = C(P, \Omega)$, sådan att*

$$\|u\| \leq C\|Pu\|, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{9}$$

Korollarium 7. *Ekvationen $Pu = f \in L^2(\Omega)$ har en lösning i $L^2(\Omega)$.*

Bevis för korollariet. Uppskattningen (9) gäller även för P^*, och resultatet följer genom en tillämpning av Lemma 1. $\square$

Bevis för Sats 6. Genom att välja α i (7) så att $p^{(\alpha)}$ är en konstant $\neq 0$ får vi uppskattningen (9). $\square$

I sin avhandling visade Hörmander först existensen av L^2-lösningar genom att använda Lemma 2 och betrakta Fourier-Laplace-transformen

$$\hat{u}(\zeta) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\langle x,\zeta\rangle} u(x)\, dx, \quad \zeta \in \mathbf{C}^n$$

för u i $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Detta är den hela analytiska fortsättningen av Fouriertransformen av u. Hörmander bevisade följande uppskattning:

Lemma 8. *Antag att $f = p(D)u$, där p är ett polynom av grad m. Om $\eta \in \mathbf{R}^n$ så är*

$$|p_m(\eta)|^2\|u\|^2 \leq \int_{\mathbf{R}^n} |J_0(2\langle x, \eta\rangle) f(x)|^2\, dx, \tag{10}$$

där

$$J_0(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{s\sin\theta}\, d\theta$$

är Besselfunktionen av ordning 0.

Bevis. Om $\xi \in \mathbf{R}^n$ så är $p_m(\eta)$ den ledande koefficienten i polynomet $q_\xi(z) = p(\xi + z\eta)$. Det följer därför ur Lemma 2, eftersom $\hat{f}(\xi + z\eta) = q_\xi(z)\hat{u}(\xi + z\eta)$, att

$$|p_m(\eta)|^2|\hat{u}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\hat{f}(\xi + e^{i\theta}\eta)|^2\, d\theta. \tag{11}$$

Eftersom $\xi \mapsto \hat{f}(\xi + w)$ är Fouriertransformen av $x \mapsto e^{-i\langle x,w\rangle} f(x)$ då $w \in \mathbf{C}^n$ ger integration med avseende på ξ i (11) tillsammans med Parsevals sats

$$|p_m(\eta)|^2\|u\|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\Big(\int\limits_{\mathbf{R}^n} |e^{-ie^{i\theta}\langle x,\eta\rangle} f(x)|^2\, dx\Big)\, d\theta = \int\limits_{\mathbf{R}^n} |J_0(2\langle x,\eta\rangle) f(x)|^2\, dx.$$

□

Ovanstående lemma leder till ett alternativt bevis för Sats 6 om man väljer η så att $p_m(\eta) \neq 0$. Om stödet för u är innehållet i ett klot med radie R så växer konstanten i den satsen som ges av Lemma 8 exponentiellt i R medan tillväxten som ges av Lemma 5 är polynomiell.

Anmärkning. Antag att $0 \neq P$ är en differentialoperator med konstanta koefficienter och att f är en distribution i en öppen begränsad delmängd Ω av $\mathbf{R}^n$. Låt ω vara en öppen mängd med kompakt hölje i Ω. Om N är stort så är $f = (1+|D|^2)^N f_N$ i ω, där $f_N \in L^2(\omega)$, och $f_N = Pw_N$ för något $w_N \in L^2(\omega)$. Sätt $u = u_N = (1 + |D|^2)^N w_N$. Då gäller

$$Pu = (1 + |D|^2)^N Pw_N = (1 + |D|^2)^N f_N = f$$

i ω. Detta visar att ekvationen $Pu = f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ har en distributionslösning i varje öppen delmängd med positivt avstånd till randen av Ω. Detta är i stort sett så långt man kan komma genom att använda ovanstående satser och det bästa man kan hoppas på i avsaknad av ytterligare villkor på P och Ω. Surjektivitetsegenskaper för P i rummen $C^\infty(\Omega)$ och $\mathcal{D}'(\Omega)/C^\infty(\Omega)$ (med begränsningsvillkor på Ω borttagna) beror på komplicerade konvexitetsegenskaper (P-konvexitet) hos Ω, formulerade i termer av operatorn P. Hörmander har gett viktiga bidrag till förståelsen för dessa frågor, och vi hänvisar läsaren till avsnitten 10.6 och 10.7 i [9]. Om Ω är konvext gäller surjektivitet för P i $C^\infty(\Omega)$ och $\mathcal{D}'(\Omega)$ utan ytterligare villkor på P, och om P är elliptisk gäller surjektivitet utan några villkor på Ω. Dessa är ytterlighetsfallen, och P-konvexitet är i allmänhet ett svagare villkor än konvexitet.

Definitionsområden för de maximala resp. minimala operatorerna

Hörmander inför i [4] två realiseringar av $P = p(D)$ i $L^2(\Omega)$. Dessa är minimaloperatorn $P_{\min}$ och maximaloperatorn $P_{\max}$. Deras grafer i Hilbertrummet $L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ definieras genom

$$\operatorname{graph}(P_{\min}) = \operatorname{closure}\Big(\{(u, Pu);\ u \in C_0^\infty(\Omega)\}\Big), \tag{12}$$

och

$$\operatorname{graph}(P_{\max}) = \{(u, Pu);\ u, Pu \in L^2(\Omega)\}, \tag{13}$$

där Pu evalueras i distributionsteorins mening. Man ser lätt att detta definierar tätt definierade och slutna lineära operatorer i $L^2(\Omega)$. Kom ihåg att om A är en sluten, tätt definierad lineär operator i $L^2(\Omega)$ så är den adjungerade operatorn A^* definierad genom

$$\operatorname{graph}(A^*) = (\operatorname{graph}(A))^*,$$

där G^* betecknar det ortogonala komplementet i $L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$ till underrummet $\{(g, -f); (f, g) \in G\}$ när G är ett lineärt underrum till $L^2(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$. Då är A^* en sluten, tätt definierad lineär operator och $(A^*)^* = A$. Låt $\bar{P}$ vara operatorn $\bar{p}(D)$. Man kan lätt kontrollera att $\bar{P}_{\min} = P^*_{\max}$ och $\bar{P}_{\max} = P^*_{\min}$.

Operatorn $P_{\max}$ är surjektiv i $L^2(\Omega)$ enligt Korollarium 7. Av Leibniz formel

$$p(D)(\varphi u) = \sum_\alpha (D^\alpha \varphi) p^{(\alpha)}(D)u/\alpha!, \quad \varphi \in C^\infty(\Omega),\, u \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

och uppskattningarna (7) följer att definitionsområdet för $P_{\min}$ är invariant under multiplikation med funktioner i $C_0^\infty(\Omega)$. Detta är inte sant för definitionsområdet till $P_{\max}$. Dessa operatorers definitionsområden, särskilt det för $P_{\max}$, diskuteras utförligt i avhandlingen. Definitionsområdet för $P_{\max}$ är mycket känsligt för geometrin hos Ω och bestämmer polynomet nästan entydigt. Hörmander bevisade följande resultat, som är mycket starkt:

Sats 9. *Antag att $n \geq 2$ och att p och q är polynom som beror genuint på mer än en variabel och låt $P = p(D)$, $Q = q(D)$. Om* $\mathrm{Dom}(P_{\max}) \subset \mathrm{Dom}(Q_{\max})$ *så gäller*

$$q = a + bp \tag{14}$$

där a och b är konstanter.

Beviset för denna sats är komplicerat och kräver redskap från algebraisk geometri.

Situationen är myckeet enklare för minimaloperatorn $P_{\min}$. Dess definitionsområde $\mathrm{Dom}(P_{\min})$ bestäms av styrkan av p, ett begrepp som införs i avhandlingen. Hörmander gjorde definitionen

$$\tilde{p}(\xi) = \Big(\sum_\alpha |p^{(\alpha)}(\xi)|^2\Big)^{1/2}$$

och bevisade följande resultat.

Sats 10. *Antag att $p \neq 0$. Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för* $\mathrm{Dom}(P_{\min}) \subset \mathrm{Dom}(Q_{\min})$ *är att polynomet q är svagare än polynomet p i den meningen att $\tilde{q} \leq C\tilde{p}$ för någon konstant C.*

Beviset för den här satsen följer vägar man ofta finner i Hörmanders arbeten när han har att göra med avbildningsegenskaper hos lineära differentialoperatorer. I ett första steg används funktionalanalys för att uttrycka avbildningsegenskapen i form av en apriori-uppskattning som (2), och sedan används metoder ur analys i ett andra steg för att bevisa eller vederlägga den uppskattningen.

Bevis för satsen. Om $\mathrm{Dom}(P_{\min}) \subset \mathrm{Dom}(Q_{\min})$ så är den naturliga inklusionen från grafen för $P_{\min}$ till grafen för $Q_{\min}$ sluten, och det följer av satsen om den slutna grafen att det finns en konstant C sådan att $\|Qu\| \leq C(\|u\| + \|Pu\|)$ då $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Här kan termen $\|u\|$ i höger led försummas på grund av (9). Eftersom det omedelbart följer från definitionerna av minimaloperatorerna att uppskattningen $\|Qu\| \leq C\|Pu\|$ medför att $\mathrm{Dom}(P_{\min}) \subset \mathrm{Dom}(Q_{\min})$ har vi reducerat beviset till att visa att apriori-uppskattningen

$$\|Qu\| \leq C(\|Pu\|), \quad u \in C_0^\infty(\Omega) \tag{15}$$

gäller om och endast om q är svagare än p.

Om $a(\xi)$ är en lokalt begränsad mätbar funktion på $\mathbf{R}^n$ av högst polynomiell tillväxt i oändligheten och $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ så definierar man

$$a(D)u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} a(\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi.$$

Då är $a(D)u$ en glatt funktion på L^2, och

$$\|a(D)u\| = (2\pi)^{-n/2}\|a\hat{u}\|$$

enligt Parsevals sats. Därför gäller $\|b(D)u\| \leq \|a(D)u\|$ om b är mätbar och $|b| \leq |a|$. Lemma 5 visar att det finns en konstant C_1, som beror på enbart m och Ω, så att

$$\|\tilde{p}(D)u\| \leq C_1\|p(D)u\|$$

då $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Eftersom $|q| \le C_2\tilde{p}$ om $\tilde{q} \le C_2\tilde{p}$ inser man att (15) gäller med $C = C_1C_2$.

Det återstår att bevisa att (15) medför att q är svagare än p. Välj $u \neq 0$ i $C_0^\infty(\Omega)$ och definiera $u_\eta(\xi) = e^{i\langle x,\eta\rangle}u(x)$. Eftersom Fouriertransformen av Qu_η är funktionen $q(\xi)\hat{u}(\xi-\eta)$ och motsvarande för Pu_η, följer av (15), med u ersatt av u_η, och Parsevals sats att

$$\begin{aligned}(2\pi)^{-n}\int |q(\xi+\eta)|^2|u(\xi)|^2\,d\xi &= (2\pi)^{-n}\int |q(\xi)|^2|u_\eta(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \|Qu_\eta\|^2 \le C^2\|Pu_\eta\|^2 \\ = C^2(2\pi)^{-n}\int |p(\xi)|^2|u_\eta(\xi)|^2\,d\xi &= C^2(2\pi)^{-n}\int |p(\xi+\eta)|^2|u(\xi)|^2\,d\xi.\end{aligned}$$

Detta ger

$$N(q_\eta) \le CN(p_\eta), \tag{16}$$

där $q_\eta(\xi) = q(\xi+\eta)$, $p_\eta(\xi) = p(\xi+\eta)$, och

$$N(r) = \Big(\int |r(\xi)|^2|\hat{u}(\xi)|^2\,d\xi\Big)^{1/2}.$$

Här är $N(r)$ en norm i vektorrummet V av polynom r av grad m', där $m' = \max(\deg(p), \deg(q))$, och $\tilde{r}(0)$ måste då vara en ekvivalent norm. Det följer nu från (16) att det finns en konstant C' sådan att $\tilde{q}(\eta) \le C'\tilde{p}(\eta)$. $\square$

Anmärkning. I sin avhandling definierar Hörmander också allmänna randvärdesproblem för operatorer $P = p(D)$ i Ω. Låt γ_P vara kvotavbildningen $\operatorname{Dom}(P_{\max}) \to \operatorname{Dom}(P_{\max})/\operatorname{Dom}(P_{\min})$. Vi har sett att $P_{\max}$ är surjektiv i $L^2(\Omega)$. Detta är inte sant för $P_{\min}$. I själva verket gäller att om u tillhör definitionsområdet för $P_{\min}$ så är $f = P_{\min}u$ gränsvärdet i $L^2(\Omega)$ av en följd Pu_j i $C_0^\infty(\Omega)$. Om $\zeta \in \mathbf{C}^n$ och $p(-\zeta) = 0$ så gäller

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x)e^{i\langle x,\zeta\rangle}\,dx &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega (p(D)u_j)(x)e^{i\langle x,\zeta\rangle}\,dx \\ &= \lim_{j\to\infty}\int_\Omega u_j(x)p(-\zeta)e^{i\langle x,\zeta\rangle}\,dx = 0.\end{aligned}$$

Detta ger restriktioner på elementen i värderummet till $P_{\min}$, och definitionsområdet för $P_{\min}$ måste utvidgas för att man ska få en surjektiv operator. För att undersöka detta låter Hörmander varje lineärt underrum B av $\operatorname{Dom}(P_{\max})/\operatorname{Dom}(P_{\min})$ tilldelas restriktionen P_B av $P_{\max}$ till $\{u \in \operatorname{Dom}(P_{\max});\ \gamma_P u \in B\}$. Detta är ett abstrakt randvärdesproblem som sägs vara *korrekt ställt* om det finns en kontinuerlig lineär operator S i $L^2(\Omega)$ med värderum innehållet i definitionsområdet för P_B, sådan att $P_BSu = u$ då $u \in L^2(\Omega)$.

Regularitetsresultat

Ett av avhandlingens mera betydande resultat är en algebraisk karakterisering av *hypoelliptiska operatorer*. Dessa är operatorer med egenskapen att u är glatt när Pu är glatt. Det var en stor överraskning att det fanns stora klasser av icke-elliptiska operatorer med denna egenskap. Som ovan är Ω en öppen begränsad delmängd av $\mathbf{R}^n$, och vi betraktar en operator $P = p(D)$, där p är ett icke-konstant polynom.

Definition. Operatorn P sägs vara hypoelliptisk i Ω om nollrummet till $P_{\max}$ är innehållet i $C^\infty(\Omega)$.

Definition. Polynomet p sägs vara hypoelliptiskt om imaginärdelen till ζ går mot oändligheten då ζ går mot oändligheten inom nollställemängden V_p till p i $\mathbf{C}^n$.

Ett av de viktigaste resultaten i avhandlingen är att dessa definitioner är ekvivalenta. Den terminologi som används här är inte densamma som i avhandlingen. Hörmander använder begreppet lokal och fullständig operator. Operatorn P är *lokal* om definitionsområdet för $P_{\max}$ är invariant under multiplikation med funktioner i $C_0^\infty(\Omega)$, och den är *fullständig* om p beror på alla variabler, d.v.s. $\mathbf{R}^n \ni \eta = 0$ om $p(\xi + t\eta) = p(\xi)$ då $\xi \in \mathbf{R}^n$ och $t \in \mathbf{R}$.

Jag sammanfattar några av avhandlingens regularitetsresultat i följande sats som visar att definitionen av hypoellipticitet kan formuleras på flera olika sätt.

Sats 11. *Följande villkor är ekvivalenta:*

1. *Polynomet p är hypoelliptiskt.*
2. *Operatorn $P = p(D)$ är hypoelliptisk i Ω.*
3. *Operatorn P är lokal och fullständig.*
4. *Om $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ så är u glatt i varje öppen mängd där Pu är glatt.*
5. *Operatorn $p(D)$ har en fundamentallösning E som är glatt utanför origo.*

Bevisskiss. Antag först att p är hypoelliptisk. Låt $\xi \in \mathbf{R}^n$ och låt $d(\xi)$ vara dess avstånd till V_p. Välj $\zeta \in V_p$ så att $|\xi - \zeta| = d(\xi)$. Då ger Taylors formel

$$0 = p(\zeta) = p(\xi + \zeta - \xi) = \sum_\alpha p^{(\alpha)}(\xi)(\zeta - \xi)^\alpha/\alpha!.$$

Detta visar att

$$|p(\xi)| \le \sum_{\alpha \ne 0} |p^{(\alpha)}(\xi)| d(\xi)^{|\alpha|}/\alpha!. \tag{17}$$

Å andra sidan, om w är vilken som helst enhetsvektor i $\mathbf{C}^n$, så gäller $|z| \ge d(\xi)$ närhelst $z \in \mathbf{C}$ är ett nollställe till $p(\xi + zw)$. Det medför att

$$|p(\xi + zw)| \le 2^m |p(\xi)|$$

då $|z| \le d(\xi)$. Om detta kombineras med Cauchys olikhet för analytiska funktioner i flera variabler leder det till uppskattningarna

$$|p^{(\alpha)}(\xi)| d(\xi)^{|\alpha|}/\alpha! \le 2^m |p(\xi)|.$$

Tillsammans med (17) visar detta att det finns en konstnt C_m sådan att

$$1 \le \sum_{1 \le |\alpha| \le m} \frac{|p^{(\alpha)}(\xi)|}{|p(\xi)|} d(\xi)^{|\alpha|}/\alpha! \le C_m \tag{18}$$

då ξ är tillräckligt stort för att säkerställa att $p(\xi) \ne 0$. Eftersom $d(\xi) \to \infty$ då $\xi \to \infty$ bevisar detta att

$$r(\xi) = \sum_{|\alpha| \ne 0} |p^{(\alpha)}(\xi)|/|p(\xi)| \to 0 \quad \text{då } \xi \to \infty \text{ i } \mathbf{R}^n. \tag{19}$$

Genom att använda ett resultat från [14] om beslutsmetoder i elementär algebra bevisade Hörmander att (19) medför att det finns positiva konstanter C och c så att

$$r(\xi) \le C(1 + |\xi|)^{-c} \tag{20}$$

för stora ξ. Jag ska illustrera hur denna uppskattning medför implikationen från (i) till (iv), och för detta antar jag först att

$$p(\xi) \ne 0 \quad \text{för } \xi \in \mathbf{R}^n, \tag{21}$$

så att uppskattningen (20) gäller överallt.

Definiera distributionen E i $\mathbf{R}^n$ genom

$$\langle u, E\rangle = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} q(\xi)\hat{u}(-\xi)\,d\xi, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n), \tag{22}$$

där $q(\xi) = 1/p(\xi)$. Detta är en fundamentallösning eftersom q är en begränsad glatt funktion, och

$$\begin{aligned}\langle u, p(D)E\rangle = \langle p(-D)u, E\rangle &= (2\pi)^{-n} \int q(\xi)p(\xi)\hat{u}(-\xi)\,d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int \hat{u}(-\xi)\,d\xi = u(0) = \langle u, \delta\rangle.\end{aligned}$$

Om

$$E_\alpha = (i^{-1}x)^\alpha E,$$

så gäller

$$\langle u, E_\alpha\rangle = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \hat{u}(-\xi)q^{(\alpha)}(\xi)\,d\xi. \tag{23}$$

För att uppskatta $q^{(\alpha)}$ betraktar vi vektorrummen M_k som genereras av funktionerna

$$f_\beta = \frac{1}{p} \cdot \frac{p^{(\beta_1)}}{p}\frac{p^{(\beta_2)}}{p} \cdots \frac{p^{(\beta_l)}}{p},$$

där β är en följd av längd l av multiindex β_ν sådan att $|\beta_\nu| \geq 1$ och $\sum |\beta_\nu| = k$. Man visar lätt med induktion över $|\alpha|$ att $\partial^\alpha M_k \subset M_{k+|\alpha|}$. Eftersom $q \in M_0$ visar detta att

$$q^{(\alpha)} \in M_{|\alpha|}. \tag{24}$$

Om p är av grad m och f_β är som ovan så är $f_\beta = 0$ om $k > ml$. Om å andra sidan $k \leq ml$, d.v.s. $l \geq k/m$, så är

$$|f_\beta(\xi)| \leq |q(\xi)| r(\xi)^l,$$

och eftersom $r(\xi)$ är en begränsad funktion kan högerledet uppskattas uppåt med en konstant gånger $|q(\xi)| r(\xi)^{k/m}$. Nu ger (20) tillsammans med (24) upphov till uppskattningarna

$$|q^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-c|\alpha|/m}. \tag{25}$$

Låt $k \in \mathbf{N}$. Om $|\alpha|$ är tillräckligt stort så är funktionen $(1 + |\xi|)^k q^{(\alpha)}(\xi)$ integrabel, och om $|\beta| \leq k$ så är

$$D_x^\beta E_\alpha(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} \xi^\beta q^{(\alpha)}(\xi)\,d\xi$$

en kontinuerlig funktion. Med detta argument blir det uppenbart att E är glatt utanför origo.

Hörmander undviker problemet med reella nollställen till p genom att ändra integrationsväg i Fouriers inversionsformel. På så sätt får han en fundamentallösning även då p har reella nollställen. Om vi tar för givet att P har någon fundamentallösning kan vi resonera på ett lite annorlunda sätt. Välj $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ så att $\chi = 1$ i en öppen omgivning av $V_p \cap \mathbf{R}^n$ och ersätt den tidigare definitionen av E med

$$\langle u, E\rangle = (2\pi)^{-n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} (1 - \chi(\xi))q(\xi)\hat{u}(-\xi)\,d\xi. \tag{26}$$

En lätt modifiering av föregående argument visar att E är glatt utanför origo och att $PE = \delta - \varphi$, där

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\langle x,\xi\rangle} \chi(\xi)\,d\xi$$

är en glatt funktion. Genom att ersätta E med χE, där $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ är lika med 1 i en öppen omgivning till origo och med litet stöd kan vi konstruera distributioner E med godtyckligt små stöd kring origo så att $PE - \delta \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Om $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ och $Pu \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ så måste u vara glatt eftersom

$$u = \delta * u = E * (Pu) + (\delta - PE) * u.$$

Genom att använda att stödet till E är litet kan man resonera på liknande sätt för att bevisa (iv). Nu gäller (v) eftersom varje fundamentallösning måste vara glatt utanför origo.

För att bevisa att (i) medför att P är lokal använder man att $p^{(\alpha)}/p$ är begränsad i oändligheten. Detta följer av (19) och medför att de operatorer som avbildar v på $p^{(\alpha)}(D)E * v$ är kontinuerliga på L^2. Detta kan användas för att bevisa att $p^{(\alpha)}(D)u$ är lokalt i L^2 nära en punkt $y \in \Omega$ om detta är sant för Pu, där $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Speciellt gäller

$$P(\chi u) = \sum (D^\alpha \chi) p^{(\alpha)}(D)u/\alpha! \in L^2(\Omega),$$

om $u \in \mathrm{Dom}(P_{\max})$ and $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$. Detta bevisar att P är lokal.

Om P är hypoelliptisk följer från satsen om den slutna grafen att C^k-topologin i rummet $V = \{u \in C^k(\Omega);\ Pu = 0\}$ inte beror på k. Följaktligen finns, om K är en kompakt delmängd av Ω, en annan kompakt mängd K', så att

$$\max_K |\operatorname{grad} u(x)| \le \max_{K'} |u(x)|$$

då $u \in V$. Låt ζ gå mot oändligheten i nollställemängden för p i $\mathbf{C}^n$. Då är $u_\zeta(x) = e^{i\langle x,\zeta\rangle}$ i V, och genom att sätta in u_ζ i ovanstående olikhet finner vi att $\mathrm{Im}(\zeta)$ måste gå mot oändligheten. Detta visar att (ii) medför (i), och med den kommentaren avslutar vi det skissartade beviset för satsen. $\square$

Anmärkning. Det faller sig naturligt att tro att alla fundamentallösningar till hypoelliptiska operatorer är lokalt integrabla funktioner. Det var till exempel vad Marcel Riesz trodde, och han bad Hörmander ge ett bevis. Som emeritus tog Hörmander upp frågan igen och visade i [10] att fundamentallösningar till hypoelliptiska operatorer i $\mathbf{R}^n$ inte behöver vara lokalt integrabla om $n \ge 14$. Detta resultat innebär ett starkt stöd för nödvändigheten av att använda distributioner i teorin för differentialoperatorer, även om det kom fram vid en tidpunkt då debatten om denna fråga nästan var över och distributionsteorin allmänt accepterad.

Lösbarhetsproblem och operatorer av principaltyp

I den sista delen av Hörmanders avhandling behandlas differentialoperatorer

$$P = p(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

med variabla koefficienter. Sådana operatorer är mycket svårare att hantera än de med konstanta koefficienter, med undantag för elliptiska operatorer som kan behandlas med perturbationsmetoder. Den naturliga klass för vilken man kan vänta sig några allmänna resultat är klassen av operatorer av *principaltyp.* Att P är av principaltyp innebär att

$$\partial_\xi p_m(x, \xi) \ne 0 \quad \text{för } \xi \ne 0. \tag{27}$$

Vi säger att P är av *reell principaltyp* om dessutom

$$p_m(x, \xi) \in \mathbf{R}. \tag{28}$$

För enkelhetens skull antar vi fortsättningsvis att P är definierad i hela $\mathbf{R}^n$ och att koefficienterna är glatta där.

Det är praktiskt att göra följande definition.

Definition. Operatorn P är lösbar vid y om det finns en öppen omgivning ω till y så att $P\mathcal{D}'(\omega) \supset C_0^\infty(\omega)$. Om det finns en omgivning ω så att $PL^2(\omega) \supset L^2(\omega)$ säger vi att P är L^2-lösbar vid y.

Det är uppenbart att L^2-lösbarhet medför lösbarhet. Med funktionalanalytiska argument kan man bevisa följande.

Sats 12. *Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att P ska vara lösbar vid y är att det finns en öppen omgivning ω till y, ett icke-negativt heltal k och en konstant C så att*

$$|(f, v)| \leq C\|f\|_k \|P^* v\|_{k}, \quad f, v \in C_0^\infty(\omega). \tag{29}$$

Ett nödvändigt och tillräckligt villkor för att P ska vara L^2-lösbar vid y är att det finns en öppen mängd ω som ovan och en konstant C så att

$$|(f, v)| \leq C\|f\| \cdot \|P^* v\|, \quad f, v \in C_0^\infty(\omega). \tag{30}$$

Naturligtvis skulle villkoret (30) kunna ersättas med villkoret att $\|v\| \leq C\|P^* v\|$ då $v \in C_0^\infty(\omega)$.

Sats 13. *P är L^2-lösbar vid varje y om P är av reell principaltyp.*

Det här resultatet ingår i Hörmanders avhandling. I själva verket kunde han genom att använda algebra för energiintegraler härleda apriori-uppskattningen (30) under mycket svaga regularitetsförutsättningar på koefficienterna i P^*.

Vi ska skissera de viktigaste stegen som för till Sats 13. Låt B_ε vara det öppna klotet med radie ε och medelpunkt i origo och sätt

$$P_{m,j} = p_m^{(j)}(x, D) = [X_j, p_m(x, D)], \tag{31}$$

där X_j är multiplikation med x_j/i som tidigare.

Lemma 14. *Antag att P är av principaltyp. Om ε är tillräckligt litet så finns en konstant C så att*

$$\|u\|_{m-1} \leq C \sum_{j=1}^n \|P_{m,j} u\|, \quad u \in C_0^\infty(B_\varepsilon). \tag{32}$$

Bevisskiss. Förutsättningen att P är av principaltyp medför att det finns en positiv konstant c så att

$$\sum_{j=1}^n |p_m^{(j)}(0, \xi)|^2 \geq c|\xi|^{2m-2}.$$

Eftersom normen $\|u\|_{m-1}$ är ekvivalent med normen i L^2 av $|\xi|^{m-1}\hat{u}(\xi)$ finns en konstant C så att

$$\|u\|_{m-1} \leq C \sum_{j=1}^n \|p_m^{(j)}(0, D)u\|, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Eftersom $a_\alpha(x)$ går mot $a_\alpha(0)$ då x går mot 0, följer att

$$\|p_m^{(j)}(0, D)u - P_{m,j}u\| \leq c(\varepsilon)\|u\|_{m-1}, \quad u \in C_0^\infty(B_\varepsilon),$$

där $c(\varepsilon)$ går mot 0 då $\varepsilon \to 0$. Dessa observationer ger lemmat. □

Lemma 15. *Antag att P är av reell principaltyp. Om ε är tillräckligt litet finns en konstant C så att*

$$\|u\| \leq C\|Pu\|, \quad u \in C_0^\infty(B_\varepsilon). \tag{33}$$

Bevis. Betrakta operatorerna

$$A_j = X_j(P_m^* P_{m,j} - P_{m,j}^* P_m), \tag{34}$$

$$B_j = P_{m,j}^* X_j P_m + (P_{m,j}^* X_j P_m)^* = P_{m,j}^* X_j P_m - P_m^* X_j P_{m,j}$$

och

$$C_j = P_{m,j,j}^* P_m,$$

där $P_{m,j,j} = [X_j, P_{m,j}]$. Genom att utnyttja att $[X_j, Q]^* = [X_j, Q^*]$ då Q är en differentialoperator ser vi att

$$[X_j, P_m^*] = P_{m,j}^*,\ [X_j, P_{m,j}^*] = P_{m,j,j}^*,$$

och det är lätt att kontrollera att

$$P_{m,j}^* P_{m,j} = A_j + B_j + C_j. \tag{35}$$

Eftersom p_m är reellt följer att $P_m^* P_{m,j} - P_{m,j}^* P_m$ är en differentialoperator av ordning $2m-2$. Genom att kombinera detta med Lemma 4 kan man visa att det finns en konstant C sådan att

$$|(A_j u, u)| \le C\varepsilon \|u\|_{m-1}^2, \quad u \in C_0^\infty(B_\varepsilon), 0 < \varepsilon < 1. \tag{36}$$

Vi har också uppskattningen

$$|(B_j u, u)| \le 2\|X_j P_m u\| \cdot \|P_{m,j} u\| \le C\varepsilon \|u\|_{m-1} \|P_m u\|.$$

Eftersom det också finns en konstant C sådan att

$$\|P_m u\| \le \|Pu\| + C\|u\|_{m-1}$$

får vi (med ett annat C) uppskattningen

$$|(B_j u, u)| \le C\varepsilon(\|Pu\|^2 + \|u\|_{m-1}^2), \quad u \in C_0^\infty(B_\varepsilon),\ 0 < \varepsilon < 1. \tag{37}$$

En användning av Lemma 4 visar att det finns en konstant C så att $\|u\|_{m-2} \le C\varepsilon\|u\|_{m-1}$. Detta leder till uppskattningen

$$|(C_j u, u)| \le C\varepsilon(\|Pu\|^2 + \|u\|_{m-1}^2), \quad u \in C_0^\infty(B_\varepsilon),\ 0 < \varepsilon < 1. \tag{38}$$

Nu följer av (35)–(38) att

$$\|P_{m,j} u\|^2 \le C\varepsilon(\|Pu\|^2 + \|u\|_{m-1}^2), \quad u \in C_0^\infty(B_\varepsilon),\ 0 < \varepsilon < 1. \tag{39}$$

Lemmat följer sedan genom summation över j och användning av Lemma 14. □

Bevis för Sats 13. Det innebär ingen inskränkning att anta att $y = 0$. Då följer satsen av föregående lemma, tillämpat på P^*, tillsammans med andra delen av Sats 12. □

Situationen blir mycket mer komplicerad då p_m inte är reellvärd och mycket viktigt arbete om lineära differentialoperatorer (och senare om pseudodifferentialoperatorer) kom att koncentreras på lösbarhetsproblem för operatorer med icke-reella principalsymboler. En utgångspunkt för detta intresse kan vara differentialekvationen

$$-iD_1 u + D_2 u - 2(x_1 + ix_2) D_3 u = f \tag{40}$$

till vilken Hans Lewy [11] år 1957 konstruerade en glatt funktion f, sådan att det inte finns någon distributionslösning i någon icke-tom öppen delmängd av $\mathbf{R}^3$. Hörmander härledde år 1960 (se [5]) ett viktigt nödvändigt villkor för att ekvationen $Pu = f$ ska vara lösbar vid en punkt y. Han införde funktionen

$$C_p(x,\xi) = i \sum_{1\le j\le n} \Big(p^{(j)}(x,\xi)\overline{p_{(j)}(x,\xi)} - \overline{p^{(j)}(x,\xi)} p_{(j)}(x,\xi) \Big), \tag{41}$$

där $p^{(j)} = \partial_{\xi_j} p$, $p_{(j)} = \partial_{x_j} p$, och bevisade följande:

Sats 16. *Om P är lösbar vid $y \in \mathbf{R}^n$ och $p_m(y,\eta) = 0$ så är $C_p(y,\eta) = 0$.*

För att ge läsaren en uppfattning om beviset ger vi ett enkelt exempel på en första ordningens operator av principaltyp som inte är lösbar vid origo och sedan ska vi diskutera lösbarhet för andra ordningens operatorer för att presentera ytterligare idéer som kommer till användning i samband med detta slags problem. Vi hänvisar till kapitel VI i [6] för fullständiga bevis.

Exempel. Låt

$$P = p(x,D) = D_1 + (ix_1 - 1)D_2 \tag{42}$$

i $\mathbf{R}^2$. Detta är en första ordningens differentialoperator av principaltyp, och $C_p(x,\xi) = 2\xi_2$. Låt $\eta = (1,1)$. Nu är $p_1(0,\eta) = 0$ medan $C_p(0,\eta) = 2 \neq 0$. Vi observerar att $P^* = D_1 - (1 + ix_1)D_2$, och att principalsymbolen $p_1^*(x,\xi)$ till P^* är lika med $\xi_1 - (1 + ix_1)\xi_2$. Definiera

$$\varphi(x) = x_1 + x_2 + i(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2/2) - x_1^3/2 - x_1^2x_2/2 - ix_1^4/8. \tag{43}$$

Man kontrollerar lätt att

$$p_1^*(x, \varphi'(x)) = 0, \tag{44}$$

och på grund av den speciella formen för P är det också sant att

$$P^*(e^{i\lambda\varphi(x)}) = 0 \tag{45}$$

då $\lambda \in \mathbf{R}$. Vi ska välja λ stort och positivt. Eftersom den kvadratiska formen $x_1^2 + x_1x^2 + x_2^2/2$ är positivt definit, finns positiva konstanter c och ε_0 med $\varepsilon_0 < 1$ så att

$$\mathrm{Im}(\varphi(x)) \geq c|x|^2 \tag{46}$$

då $|x| < \varepsilon_0$. Låt $k \in \mathbf{N}$. Vi ska visa att uppskattningen (29) inte kan gälla då $\omega = B_\varepsilon$ och $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Låt $0 \leq \chi \in C_0^\infty(B_\varepsilon)$ satisfiera $\chi(x) = 1$ i $B_{\varepsilon/2}$ och välj

$$v(x) = v_\lambda(x) = \chi(x)e^{i\lambda\varphi(x)}, \; f(x) = f_\lambda(x) = \overline{v(x)},$$

där λ är stort och positivt. Då gäller

$$|(f,v)| = \int \chi^2(x)e^{-2\lambda(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2/2 - x_1^4/8)}\,dx \geq \int\limits_{|x|<\varepsilon/2} e^{-4\lambda|x|^2}\,dx.$$

Av detta följer lätt uppskattningen

$$|(f,v)| \geq c/\lambda, \quad \lambda \geq 1, \tag{47}$$

sedan c har bytts ut mot en mindre positiv konstant. Om $|x| \leq \varepsilon$ kan vi uppskatta $|\partial_x^\alpha e^{i\lambda\varphi(x)}|$ uppifrån med en positiv konstant gånger $\lambda^{|\alpha|}$, och om $\varepsilon/2 \leq |x| \leq \varepsilon$ kan vi uppskatta samma funktion uppifrån med en positiv konstant gånger λ^{-N}, där N kan vara ett hur stort positivt heltal som helst. Eftersom

$$P^*v(x) = (P^*\chi(x))e^{i\lambda\varphi(x)},$$

där $P^*\chi(x) = 0$ då $|x| < \varepsilon/2$, måste uppskattningen

$$\|f\|_k \leq C\lambda^k, \; \|P^*v\|_k \leq C\lambda^{-(k+2)}, \quad \lambda > 1, \tag{48}$$

gälla för någon konstant C. Då avtar $\|f\|_k\|P^*v\|_k$ som λ^{-2} då λ går mot oändligheten, och tillsammans med (47) motsäger detta uppskattningen (29). Vi har alltså bevisat att P inte är lösbar vid origo.

Bevisskiss för Sats 16 då $m = 2$. Vi ska bara ge en antydan om beviset. Vi antar att $Q = P^*$ bara har termer av ordning två, så att $Q = q(x, D) = q_2(x, D)$. Återigen betraktar vi lösbarhet vid 0. Antag att $C_p(0, \eta) \neq 0$, $p(0, \eta) = 0$, och att uppskattningen (29) gäller i B_ε för något $\varepsilon > 0$. Vi ska visa att detta leder till en motsägelse. Eftersom C_p är udda i variabeln ξ kan vi anta att $C_p(0, \eta) > 0$. Om

$$z = (q_{(1)}(0, \eta), \ldots, q_{(n)}(0, \eta)), \quad w = (q^{(1)}(0, \eta) \ldots, q^{(n)}(0, \eta)),$$

betyder detta att $\operatorname{Im}\langle z, \bar{w}\rangle < 0$. Det är en enkel övning i lineär algebra att bevisa att det finns reella symmetriska $n \times n$-matriseer S och T, med T positivt definit, så att $z + (S + iT)w = 0$[8]. Eftersom

$$q(x, \eta + \xi) = \langle x, z\rangle + \langle \xi, w\rangle \bmod O_2,$$

där O_k är rummet av funktioner med nollställe av minst ordning k i origo, ser vi att

$$q(x, \varphi'_x(x)) \in O_2,$$

där $\varphi(x) = \langle x, \eta\rangle + \langle (S + iT)x, x\rangle/2$. Här kan φ modifieras med termer av ordning 3 eller högre för att uppnå att

$$p(x, \varphi'_x(x)) \in O_N, \tag{49}$$

där N är stort, och det finns en positiv konstant c så att

$$\operatorname{Im}(\varphi(x)) \geq c|x|^2 \tag{50}$$

i B_ε om ε är tillräckligt litet. Detta var väsentligen så mycket som vi behövde i exemplet där P är ett vektorfält, men i föreliggande fall är det inte längre sant att $Q(e^{i\lambda\varphi}) = 0$, och vi måste välja en amplitudfunktion $A(x) = A_\lambda(x)$ framför $e^{i\lambda\varphi(x)}$ med omsorg. Om F_λ är den operator som avbildar en funktion A på

$$e^{-\lambda\varphi(x)} q(x, D)\big(A(x)e^{i\lambda\varphi(x)}\big),$$

finner man att

$$(F_\lambda A)(x) = \lambda^2 q(x, \varphi'_x(x))A(x) + \lambda LA(x) + QA(x), \tag{51}$$

där

$$L = \sum_{j=1}^{n} q^{(j)}(x, \varphi'_x(x))D_j + q_0(x),$$

och $q_0(x) = iq(x, D)\varphi(x)$. Man kan finna ett polynom a_0 så att $La_0 \in O_N$, $a_0(0) = 1$, och även välja polynom a_j rekursivt för $j \geq 1$ så att $La_j + Qa_{j-1} \in O_N$, $a_j(0) = 0$ då $j > 0$. Om

$$A = \sum_{0 \leq j \leq N} \lambda^{-j} a_j,$$

följer att

$$|(F_\lambda A)(x)| \leq C_N \lambda^2 (|x|^N + \lambda^{-N})$$

då $\lambda > 1$ och $x \in B_\varepsilon$. Härur får man efter en del räknande uppskattningen

$$\|P^* v_\lambda)\|_k = \|Qv_\lambda\|_k \leq C\lambda^{k+2-N/2},$$

där $v(x) = \chi(x)A(x)e^{i\lambda\varphi(x)}$, och χ har samma egenskaper som i exemplet. Om $f(x) = \overline{v(x)}$ så är $(f, v) = \|v\|^2$ nedåt begränsad av en positiv konstant gånger $\lambda^{-n/2}$, vilket följer av liknande argument som dem som användes i exemplet. Eftersom $\|v\|_k \|P^* v\|_k$ avtar mycket snabbare i λ om N är tillräckligt stort får vi en motsägelse. □

Anmärkning. Villkoret att $C_p = 0$ i nollställena till p är ett nödvändigt villkor för lösbarhet som kan ersättas med ett mycket starkare villkor som måste formuleras inom ramen för hamiltonsk mekanik (se kapitel 26 i [9]). Mycket av Hörmanders senare arbete om differential- och pseudodifferentialoperatorer vilade på betraktelser i symplektisk geometri. Detta gäller speciellt hans kalkyl för Fourierintegraloperatorer [7] och Weylkalkyl för pseudodifferentialoperatorer [8]. Funktionen C_p som kommer in har en naturlig tolkning som en Poissonklammer.

[8]Genom att om nödvändigt byta ut z, w mot iz, iw kan man anta att $\operatorname{Re}(w) \neq 0$, och sedan kan man välja en reell symmetrisk matris S_0, sådan att $z_0 = z + S_0 w$ är rent imaginär. Sedan löser man problemet för z_0 i stället.

Referenser

[1] Augustine Cauchy, Mémoire sur l'integration des équations linéaires, *C.R. Acad. Sci. Paris* **8**(1839).

[2] Sophie von Kowalevsky, Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **80**(1875), 1–32.

[3] Lars Gårding, Hörmander's work on linear differential operators, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Institut Mittag-Leffler, Djursholm 1963, pp. XLIV-XLVII.

[4] Lars Hörmander, On the theory of general partial differential operators, *Acta Math.*, **94**(1955), 161–248.

[5] Lars Hörmander, Differential equations without solutions, *Math. Ann*, **140**(1960), 169–173.

[6] Lars Hörmander, Linear partial differential operators, *Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg*, 1964.

[7] Lars Hörmander, Fourier integral operators I, *A*cta Math, **127**(1971), 79–183

[8] Lars Hörmander, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *C*omm Pure Appl. Math, **32**(1979), 359–443.

[9] Lars Hörmander, The analysis of linear partial differential operators I-IV, *Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo*, 1983–1985.

[10] Lars Hörmander, On local integrability of fundamental solutions, *A*rk. Mat., **37**(1999), 121–140.

[11] Hans Lewy, An example of a smooth linear partial differential equation without solution, *Ann. Math.*, **66** (1957), 155–158.

[12] Bernard Malgrange, Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. I. Solution élémentaire, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **237**(1953), 1620–1622.

[13] Laurent Schwartz, Théorie des distributions I,II, *Hermann, Paris*, 1950–1951.

[14] Abraham Seidenberg, A new decision method for elementary algebra, *Ann. of Math.*, **60**(1954), 365–374.

Den engelskspråkiga originaltexten har översatts av redaktionen. Anders Melin är professor emeritus vid Lunds universitet.

Hörmanders L^2-uppskattningar för $\bar{\partial}$ -ekvationen

Bo Berndtsson

19 maj 2013

Även om Lars Hörmanders arbeten om $\bar{\partial}$ -ekvationen kan sägas ligga lite vid sidan av hans huvudintressen, så hör de till hans allra mest inflytelserika bidrag till matematiken. Huvudartikeln här är "L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$-operator" i Acta Mathematica 1965. Jag skall börja med att försöka beskriva vad jag själv uppfattar som det viktigaste resultatet i den artikeln. Därefter skall jag säga något om vilken betydelse Hörmanders arbete har fått i komplex analys och i komplex algebraisk geometri och samtidigt säga något om dess historiska rötter.

Vad är då $\bar{\partial}$ -ekvationen ? Låt oss börja med det allra enklaste fallet, en komplex variabel $z = x + iy$. $\bar{\partial}$ -operatorn är då den partiella differentialoperatorn

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}).$$

Betydelsen hos den här operatorn ligger i att en funktion $h(z)$ är holomorf om och endast om den löser den *homogena $\bar{\partial}$-ekvationen*

$$\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0.$$

(Den komplexanalytiskt oskyldige kan översätta ekvationen till den vanliga formuleringen av Cauchy-Riemanns ekvationer genom att dela upp $h = u + iv$ i real- och imaginärdel.) Den klassiska komplexa analysen i en variabel består alltså av ett studium av lösningar till den ekvationen. Detta gör att det också blir av stort intresse att studera motsvarande *inhomogena* ekvation

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = g. \tag{1}$$

Exempelvis kan holomorfa funktioner med bestämda eller önskade egenskaper ofta konstrueras genom att man först bildar en glatt (ickeholomorf) funktion med egenskapen i fråga, och sedan "korrigerar" den genom att lägga till en lämplig lösning till (1). Redan detta synsätt introducerades förmodligen med Hörmanders artikel, i alla händelser kommer en mycket stor del av idéns popularitet därifrån. Klassiska läroböcker i komplex analys betonade istället serieframställning och produktformler som metoder att konstruera holomorfa funktioner, och även det faktum att den fullständiga varianten av Cauchys integralformel innehåller en term som ger en explicit lösning till (1) spelar en ganska undanskymd roll. Som Hörmander själv skriver i introduktionen till sin bok "An introduction to Complex Analysis in several variables" , är denna formel *"unfortunately missing in many elementary texts"*.

För att skriva ned $\bar{\partial}$-ekvationen i flera variabler är det praktiskt att använda formalismen med differentialformer. Vi skriver då

$$\bar{\partial} u := \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

i en variabel och sedan

$$\bar{\partial} u := \sum_j \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j,$$

i flera variabler. Den homogena ekvation $\bar{\partial} u = 0$ har som lösningar holomorfa funktioner av flera variabler och den inhomogena ekvationen kan skrivas kort

$$\bar{\partial} u = f \tag{2}$$

där $f = \sum f_j d\bar{z}_j$ är en differentialform (av *bigrad* $(0,1)$). Detta leder också till en analog ekvation för former av högre grad, men jag skall enbart hålla mig till fallet när lösningen är en form av grad noll, dvs en funktion. Låt oss bara notera att för att ekvationen (2) skall vara lösbar så krävs att kompatibilitetsvillkoret $\bar{\partial} f = 0$, dvs $\partial f_j / \partial \bar{z}_k = \partial f_k / \partial \bar{z}_j$, är uppfyllt.

För att formulera Hörmanders sats behöver vi ytterligare två begrepp. En reellvärd funktion ϕ definierad på ett område i $\mathbb{C}^n$ är *plurisubharmonisk* om dess restriktion till varje komplex linje är subharmonisk som funktion av en komplex variabel. Noga taget krävs det också att ϕ skall vara uppåt halvkontinuerlig, men för ögonblicket skall vi till och med anta att ϕ är glatt. Vi säger sedan att ett område i $\mathbb{C}^n$ är *pseudokonvext* om det finns en plurisubharmonisk funktion definierad där som går mot oändligheten när vi närmar oss randen. Som ordet antyder skall vi tänka oss pseudokonvexitet, och även plurisubharmonicitet, som en sorts komplex motsvarighet till konvexitet. Varje område som är konvext i vanlig mening är också pseudokonvext, men begreppet är betydligt mer allmänt än så. T ex så är varje område i $\mathbb{C}$ pseudokonvext, precis som varje område i $\mathbb{R}$ är konvext. En glatt funktion ϕ är (strikt) plurisubharmonisk precis då matrisen

$$(\phi_{jk}) := \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right)$$

är (strikt) positivt definit överallt.

Vi kan nu skriva ned en ganska allmän variant av Hörmanders stora sats.

Sats 1 *Låt $f = \sum f_j d\bar{z}_j$ vara en differentialform som uppfyller $\bar{\partial} f = 0$ i det pseudokonvexa området Ω. Låt ϕ vara (strikt) plurisubharmonisk i Ω. Då finns en lösning u till ekvationen $\bar{\partial} u = f$ som uppfyller*

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\phi} \leq \int_\Omega \sum \phi^{jk} f_j \bar{f}_k e^{-\phi}, \tag{3}$$

där (ϕ^{jk}) är transponatet av inversen till (ϕ_{jk}).

Observera att i en variabel så säger olikheten (3) att

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\phi} \leq \int_\Omega \frac{|f|^2}{\Delta \phi} e^{-\phi},$$

om vi låter

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \bar{z}}$$

vara den komplexa Laplacen av ϕ. Här gäller alltså satsen för vilket område som helst i $\mathbb{C}$ och för vilken (strikt) subharmonisk viktfunktion som helst. Det är värt att understryka att även detta enklaste fall för t ex Ω lika med enhetskivan bevisades första gången i Hörmanders arbete!

Inte desto mindre är satsen enormt användbar. Exempelvis så ger den ganska direkt enkla bevis för grundläggande resultat som Mittag-Leffler sats och Runges approximationssats genom att man konstruerar lämpliga subharmoniska funktioner, vilket är betydligt enklare än att kontruera holomorfa funktioner direkt. Poängen är att den metoden kan utvidgas till flera variabler på ett helt analogt sätt. Detta ger ett nytt och kraftfullt alternativ till de klassiska metoderna att bevisa t ex Oka-Weils approximationssats (Runge i flera variabler) och också mycket mer precisa resultat. Jag citerar en artikel av F Nazarov om Bourgain-Milmans sats som också använder denna filosofi, kopplad med Hörmanders sats, för ett problem i konvex geometri: *"This amazing theorem has become the main tool for constructing analytic functions in $\mathbb{C}^n$ with good growth/decay estimates. It has essentially wiped out all previous ad hoc procedures based on power series, Cauchy integrals and such".*

En annan poäng är att när satsen väl är bevisad för glatta plurisubharmoniska funktioner följer liknade resultat för allmänna plurisubharmoniska funktioner lätt med approximation, eftersom konstanten i uppskattningen (=1!) är uniform. Man kan t ex välja ϕ så att $e^{-\phi}$ inte blir lokalt integrerbar i närheten av vissa punkter. Högerledet i uppskattningen (man får ersätta (ϕ_{jk}) med en undre begränsning till den matrisen) kan ändå vara ändligt om f försvinner på mängden av singulariteter där vikten inte är lokalt integrerbar. Man får då en lösning som också måste försvinna på den singulära mängden. Denna idé kommer ursprungligen från Bombieri, som använde den för att visa en sats i algebraisk talteori.

Bombieris idé visade sedan vägen till vidare tillämpningar i algebraisk eller analytisk geometri. $\bar{\partial}$-operatorn har mening även på komplexa mångfalder och spelar en viktig roll i Hodgeteori. Det visar sig att varianter av Hörmanders sats gäller även på komplexa mångfalder, där vi istället för funktioner tittar på sektioner till en holomorf linjebunt. Motsvarigheten till den plurisubharmoniska vikten är en metrik med positiv krökning på linjebunten. I själva verket upptäcktes en svagare variant av Hörmanders sats för ”positiva linjebuntar” över kompakta mångfalder redan 1954 av Kodaira. Det Kodaira hade visat var ekvivalent med en sats om lösbarhet av $\bar{\partial}$-ekvationen, men Kodaira formulerade inte detta explicit och hans arbete saknar också den fundamentala uppskattningen av lösningen. En huvudanvändning av Kodairas sats var hans karaktärisering av vilka kompakta mångfalder som går att bädda in i projektiva rummet, och beviset av den satsen leder just till ett $\bar{\partial}$-problem där man vill få en lösning som försvinner i en given punkt. Kodaira gick runt det problemet genom att studera en ny linjebunt över en uppblåsning av mångfalden. Med Hörmanders uppskattningar och Bombieris trick får man direkt en lösning.

Utvecklingen av dessa idéer har sedan fortsatt och visar inga tecken på att mattas av, med viktiga bidrag av t ex Siu, Demailly, Skoda och Ohsawa. Ett sent bidrag här är Sius bevis för deformationsinvariansen av plurigenera, som spelat en viktig roll i fullbordandet av det s k minimala modell programmet.

I Hörmanders sats möts flera olika matematiska teman. Hörmanders egen utgångspunkt kom säkert från partiella differentialekvationer och han understryker att en motivering för införandet av viktfuktionerna kom från Carlemans arbeten om entydighet för hyperboliska problem. Samtidigt svarar de plurisubharmoniska viktfunktionerna mycket väl mot positivt krökta metriker på linjebuntar, och Hörmanders metod har därigenom blivit grundläggande och stilbildande för analytiska tekniker i algebraisk geometri. Ett tredje tema är de reella motsvarigheterna till Hörmanders uppskattningar som spelar en stor roll i konvex analys. Detta är de s k Brascamp-Lieb olikheterna som upptäcktes senare än de mer komplicerade komplexa uppskattningarna. En fjärde viktig trend är de mycket subtila resultaten för randregularitet i samband med $\bar{\partial}$-problemet. För speciellt det sista ämnet, men också mycket annat, hänvisar jag till Hörmanders egen personligt färgade och mycket underhållande ”A history of existence theorems for the Cauchy-Riemann complex in L^2- spaces”, JGEA 13 (2003).

Bo Berndtsson är professor i matematik vid Chalmers tekniska högskola

Lars Hörmander mottar Wolf-priset från Israels president

Lars Hörmander och den mikrolokala analysen

Johannes Sjöstrand*
Institut de Mathématiques de Bourgogne, Université de Bourgogne
9 avenue Alain Savary - BP 47870
21078 Dijon cedex
johannes.sjostrand@u-bourgogne.fr
och UMR 5584 du CNRS

1 Introduktion

Min första kontakt med Lars måste ha varit på hösten 1967 eller tidigt på våren 1968 när jag bad om ett ämne till en avhandling. Han hade då återvänt från Princeton och var förstås redan en världsberömd matematiker, så det var med en viss bävan från min sida, men vi elever blev väl omhändertagna och det var nog först senare som jag började inse hela hans storhet.

Vid den tidpunkten var Lars i full gång med att utveckla pseudodifferentialoperatorer och sedan Fourierintegraloperatorer och att sätta sin prägel på denna teori som senare (genom M. Sato, M. Kawai och M. Kashiwara) kom att kallas för mikrolokal analys. Denna korta text är långt ifrån fullständig och det blev naturligt att framför allt behandla bidrag av Lars som spelat en roll för mitt eget arbete.

Kanske kan man se det som ett misstag av historien att den mikrolokala analysen inte blev utvecklad redan i samband med kvantmekaniken, för den är så intimt förknippad med grundläggande kvantmekaniska begrepp som osäkerhetsrelationen och spridning av vågpaket. Den s.k. BKW- (eller JBKW-) metoden för konstruktion av asymptotiska lösningar till (partiella) differentialekvationer kom f. ö. att spela en viktig roll. Förklaringen är nog att distributionsteorin ännu inte fanns, och att kvantmekanikens impulser först måste stimulera till andra matematiska utvecklingar.

Det blev istället inom de partiella differentialekvationerna som den föddes (omkring 1965) bl.a. med en artikel av J.J. Kohn och L. Nirenberg om pseudodifferentialoperatorer. André och Julianne Unterberger hade vid ungefär samma tid skrivit ett par CRAS-noter och Caldéron-Zygmunds singulära integraloperatorer bildade en viktig bas.

Bland Lars egna arbeten som förebådar den mikrolokala analysen kan man nämna hans två arbeten i Math. Ann. om lokal lösbarhet för differentialoperatorer med variabla koefficienter (med Hans Lewys berömda motexempel som inspirationskälla). För att bevisa nödvändigheten av ett villkor (nämligen att Poissonklammern mellan principalsymbolen och dess konjugat är noll på den karakteristiska mängden) konstruerar Lars asymptotiska nollösningar för den adjungerade operatorn, som han sedan kombinerar på ett elegant och skolbildande sätt med satsen om den slutna grafen. Denna konstruktionen använder BKW-metoden med komplex fas som senare spelat en stor roll för Fourierintegraloperatorerna.

2 Pseudodifferentialoperatorer.

En pseudodifferentialoperator (som vi skall förkorta som "pop") är en operator $A : C_0^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$, där $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ är öppen, av formen

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\theta} a(x, \theta) u(y) dy d\theta. \tag{2.1}$$

*med ett stort tack till Per-Anders Ivert för hans noggranna spåkliga granskning av texten. Återstående fel och brister får jag svara för.

I Kohn-Nirenbergs version har symbolen a en asymptotisk utveckling i termer som är positivt homogena i θ av en grad som går mot minus oändligheten. När a är ett polynom i θ får vi en differentialoperator. Kohn och Nirenberg visade att denna klass väsentligen är sluten under sammansättning och andra operationer, samt att operatorer av ordning noll är L^2-kontinuerliga, vilket medför att man kan arbeta med L^2-baserade Sobolevrum. Teorin kom snabbt till användning för elliptiska ekvationer eftersom (approximativa) inverser till elliptiska differentialoperatorer är pop:er och spelar en viktig roll i Atiyah-Singers index-sats.

Lars tog snabbt upp ämnet, och visade i ett av sina första arbeten att om man utvidgar symbolklasserna något så får man nya resultat om subellipticitet, i ett annat arbete införde han fasrumslokaliseringar med partitioner av enheten som bestod av pop:er och uppnådde tillämpningar till degenererade randvärdesproblem och speciellt det sneda Neumann-problemet.

I många arbeten användes tidigt pop:er som avskärningsfunktioner analogt med vanliga avskärningar när man behandlar singulariteter hos distributioner[1]. I Hörmanders enkla och eleganta teori (från ca 1970 tror jag) infördes vågfrontsmängder för distributioner och allmänna operatorer. Dessa mängder kan antingen definieras i analogi med det singulära stödet, med pop:er i stället för glatta avskärningsfunktioner, eller genom direkt studium av det snabba avtagandet i vissa riktningar av trunkerade Fourier-transformer. Ett liknande begrepp inom ramen för analytiska funktioner och deras duala objekt, hyperfunktioner, hade införts något tidigare av M. Sato och här gav sedan Lars en variant.

På detta sätt, om u är en godtycklig distribution, så får vi en sluten konisk delmängd $\mathrm{WF}(u)$ av kotangentrummet minus nollsektionen, som beskriver inte bara det singulära stödet (via projektionen) utan även frekvenserna som ingår i singulariteterna. En enkel sats (praktiskt taget själva definitionen) är att om Au är glatt så är $\mathrm{WF}(u)$ innehållen i den karakteristiska mängden (dvs riktningarna i fasrummet där A ej är elliptisk). Lars gick sedan vidare och visade att för operatorer av reell principaltyp (med vågoperatorn som ett viktigt exempel) gäller att om u är en lösning till (pseudo)differentialekvationen $P(x, D_x)u = v$ med v glatt, så är $WF(u)$ invariant under det bikarakteristiska flödet till principalsymbolen[2] Detta resultat från ca 1971 (i ett arbete i L'enseignement mathématique) har gett upphov till en enorm aktivitet där man (ofta med framgång) studerat spridning av singulariteter för andra klasser av operatorer, t ex med multipla karakteristiker, för randvärdesproblem (diffraktion och reflektion) och t.o.m. för ickelineära problem.

Pseudodifferentialoperatorer, ofta i kombination med Fourierintegraloperatorer, har blivit ett standardverktyg för studiet av subellipticitet, lokal lösbarhet, spektralteori och matematisk fysik, I arbeten från ca 1973–76 införde R. Beals och C. Fefferman nya exotiska klasser av pop:er, pressade till osäkerhetsrelationens gräns och använde dom för att bevisa tillräckligheten för det s.k. villkoret (P) för lokal lösbarhet för partiella differentialekvationer. Detta blev en viktig ny stimulans och Lars svar dröjde bara några år och tog formen av ännu allmännare klasser med mycket tillfredsställande geometriska villkor och med systematiskt användande av Weyl-kvantiseringen (där man ersätter $a(x, \theta)$ med $a((x+y)/2, \theta)$ i (2.1)), vilket ofta är bättre än den vanliga, speciellt i gränssituationer med behov av maximal skärpa.

Hörmanders Weylkalkyl har nu blivit ett viktigt redskap. Lars själv har använt den i sin mycket utförliga studie av subelliptiska operatorer av principaltyp och spridning av singulariteter som kompletterar och fortsätter resultat bl. a. av Yu. Egorov. I Nils Denckers bevis (2006) för tillräckligheten av villkoret (Psi) för lokal lösbarhet för pop:er är den en viktig ingrediens.

[1] I en tidig version av min avhandling gjorde jag det vilket räckte för mina praktiska behov men kunde sedan omformulera allt med vågfrontsmängder.

[2] Om $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$ med $a_\alpha(x)$ glatta, $D_x = (i^{-1}\partial/\partial x_1, ..., i^{-1}\partial/\partial x_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \|\alpha\|_{\ell^1}$, $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} ... D_{x_n}^{\alpha_n}$, så ges principalsymbolen av $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ och det bikarakteristiska flödet i $p^{-1}(0)$ är flödet som ges av Hamiltonfältet $H_p = p'_\xi \cdot \partial/\partial x - p'_x \cdot \partial/\partial \xi$. Reell principal typ betyder grosso modo att p är reell och $dp \neq 0$ i alla reella punkter där $\xi \neq 0$.

3 Fourierintegraloperatorer

Dessa operatorer uppkommer naturligt i samband med BKW-metoden som spelar en viktig roll i kvantmekaniska sammanhang och som kan spåras ännu längre tillbaka i tiden. Ett viktigt steg mot den moderna teorin togs av Peter Lax som konstruerade asymptotiska lösningar till strängt hyperboliska problem (Duke Math. J. 1957) med hjälp av en BKW-metod. I sitt arbete i Acta Math. 1968, studerar Lars spektralfunktionen för positiva elliptiska självadjungerade pop:er på kompakta mångfalder av godtycklig positiv ordning m. Enligt R. Seeley är den m:te roten av en sådan operator en pop Q av ordning 1. Lars studerar den unitära gruppen $\exp(-itQ)$ för små reella tider och approximerar den med en Fourierintegraloperator (förkortning fop nedan) som har den allmänna formen

$$Au(x) = \iint e^{i\phi(x,y,\theta)} a(x,y,\theta) u(y) dy d\theta \tag{3.1}$$

Han kan då studera spåret $\mathrm{tr}\,(\exp(-itQ))$ och använda en Taubersats för att få en asymptotisk formel då $\lambda \to +\infty$ för spektralfunktionen, som definieras som inskränkningen till diagonalen av (distributions)kärnan till projektionen svarande mot spektrumet i intervallet $]-\infty, \lambda]$. Integration av detta resultat ger som korollarium Weyls lag för antalet egenvärden $\leq \lambda$ med en restterm som i allmänhet är optimal, vilket var ett nytt resultat för allmänna m.

Något tidigare hade Maslov skrivit sin bok ”Perturbation theory and asymptotic methods” som är svårläst men som innehåller mycket viktiga idéer om hur man kan ”kvantisera” objekt (med hjälp av en s.k. kanonisk operator) från den symplektiska geometrin. Yu. Egorov hade använt dessa idéer för sin berömda sats om hur man mikrolokalt kan transformera en pop genom konjugering med fop:er så att symbolen för den nya pop:en fås från den av den gamla m.hj.a. sammansättning med en kanonisk transformation. Lars (Acta Math. 1971) tog upp dessa idéer och utvecklade en global teori för fop:er, som mikrolokalt (i vågfrontsmening, d.v.s. med pseudodifferentiella avskärningar) ges av (3.1): Till varje sluten konisk Lagrangemångfald i kotangentrummet (”minus” nollsektionen) till en mångfald X kan man tillordna en klass av Fourierintegral- (eller Lagrange-) distributioner. När man ersätter X med en produkt $X \times Y$ får man klasser av fop:er som nu är tillordnade en kanonisk relation (med en kanonisk transform som specialfall).

Tack vare denna globala teori kan man få ett fastare grepp om $\exp(-itQ)$ ovan även för stora tider (dock inte likformigt när $t \to \infty$ vilket är ett fascinerande problem) och det dröjde inte länge förrän J. Chazarain och J.J. Duistermaat–V. Guillemin, sedan A. Weinstein, Y. Colin de Verdière och många andra kunde använda den för att få mer precis information om vad som döljer sig i resttermen i Weyl-asymptotiken under lämpliga förutsättningar om den klassiska dynamiken.

4 Några mer kommentarer

Under början av 80:talet skrev Lars sina fyra volymer om analysen av linjära partiella differentialekvationer, som nu är en huvudreferens till hela området. Därefter diversifierades hans arbeten mycket; ickelineära hyperboliska problem, ekvationer med konstanta koeffienter i samband med komplex analys och mycket mer.

Kanske är mikrolokal analys numera bara en av flera metoder som man skall ha i sin ”bag of tricks” (enligt Louis Nirenbergs terminologi). Området har breddats och utvecklats. För randvärdesproblem har det t.ex. uppfunnits en stor mängd (ofta närbesläktade) maskinerier med arbeten av L. Boutet de Monvel, G. Eskin, G. Grubb, R. Melrose, B.W. Schulze och många andra. Varje tes har sin antites och kanske det är värt att nämna V. Ivrii (ca 1980) som väsentligen bevisade en förmodan av H. Weyl om spektralasymptotik med två termer för klassiska randvärdesproblem. Hans ytterst remarkabla skalningsmetod gjorde att man kunde undvika tunga maskinerier. Mikrolokal analys spelar också en viktig roll för ickelineära ekvationer bl.a. genom J.M. Bonys paradifferentialoperatorer.

Låt mig till sist nämna några ytterligare resultat och idéer av Lars som varit viktiga för mitt eget arbete.

- Hans metod för behandling av $\overline{\partial}$-ekvationerna. Hans bok om detta är min definitiva favorit bland alla hans böcker. Jag tror mig veta att denna metod har revolutionerat studiet av holomorfa funktioner av flera komplexa variabler. Enligt min erfarenhet från partiella differentialekvationer och mikrolokal analys är den viktig också därför att den kan användas direkt, ofta utan andra komplex-analytiska maskinerier.

- Under de senaste 15 åren har vi bevittnat ett förnyat intresse för icke-självadjungerade operatorer och deras spektralteori. Ett viktigt fenomen här är spektralinstabilitet, som bl.a. tar sig utryck i att resolventen kan vara stor utanför en liten omgivning till spektrumet. I specialfallet med icke-självadjungerade Schrödingeroperatorer i en dimension påvisade Brian Davies detta genom en konstruktion av kvasimoder (d.v.s. approximativa egenfunktioner). M. Zworki observerade snabbt att det är ett specialfall av Lars konstruktioner i Math Annalen 1960 och Davies resultat kunde sedan lätt generaliseras till högre dimensioner och allmännare situationer.

- En annan personlig favorit är Hörmanders införande av nästan-analytiska utvidgningar av glatta funktioner i samband med hyperboliska operatorer med glatta men icke-analytiska koefficienter. Detta gjordes i ett preprint från ca 1968 (som jag har någonstans i mina kartonger som aldrig blev uppackade efter någon av mina flyttningar). Av någon anledning ville Lars inte publicera detta arbete, men jag tyckte att det var oerhört elegant och stimulerande. Bl a så kunde han där utföra parametrix-konstruktioner som vanligtvis kräver analyticitet, och om jag minns rätt förekommer termen ”Fourier integral operator” i själva titeln. Detta begrepp har använts av L. Nirenberg för att bevisa Malgranges preparationssats samt av Dynkin. Har själv använt det i olika arbeten bl. a. med Anders Melin och med Bernard Helffer.

Många stjärnmatematiker imponerar med en hög produktion av tekniskt svåra och ofta djupa arbeten. Det gjorde Lars också, men han bidrog med mycket mer, dels genom sin enastående förmåga att dra ut det väsentliga i andras arbeten och därmed komma fram till enkla, definitiva och användbara resultat, och dels genom väsentligt nya och skolbildande idéer och metoder. Hans texter karakteriseras av en fulländning som man inte alltid inser direkt utan först när man kommer tillbaka till dem efter någon tid.

Att få ha varit hans elev är ett stort privilegium. Att ha fått diskutera matematik med honom och se och beundra hans lekfulla sätt att lösa problem eller föreslå lösningar, var för mig som student en grundläggande upplevelse och kontakt med levande matematik.

Johannes Sjöstrand är professor i matematik vid Université de Bourgogne, Dijon, Frankrike

Lars Hörmander som student

Svenska matematikersamfundets årsmöte

Fredag 31 maj kl 17.10
i sal D2, Lindstedtsvägen 5, entréplan,
Kungliga Tekniska Högskolan.

1. Mötets öppnande.
2. Val av mötesordförande och mötessekreterare
3. Val av två justeringspersoner
4. Fastställande av dagordning
5. Framläggande av styrelseberättelse, balansräkning och revisionsberättelse
6. Frågan om beviljande av styrelsens ansvarsfrihet
7. Val av styrelse för verksamhetsåret 2013/2014
8. Val av lokalombud för verksamhetsåret 2013/2014
9. Val av två revisorer och två revisorssuppleanter för verksamhetsåret 2013/2014
10. Val av tävlingskommitté för verksamhetsåret 2013/2014
11. Val av valberedning för verksamhetsåret 2013/2014
12. Diskussion om Code of Practice
    se: http://www.euro-math-soc.eu/files/COP-approved.pdf
13. Diskussion om fonderna
14. Övriga frågor
15. Mötets avslutande.

Svenska matematikersamfundets årsmöte

i Stockholm 31 maj 2013

Svenska matematikersamfundets årsmöte äger rum
Fredag 31 maj 13.15 i sal D2, Lindstedtsvägen 5, entréplan,
Kungliga tekniska högskolan.
Rekommenderat hotell: Hotell Oden, Karlbergsvägen 24. Uppge bokningsnummer 346630 vid bokning.

Program

13.15 Välkomna

13.20-14.10 Andreas Rosén (Linköpings universitet och Göteborgs universitet):
Multivectors: A 19th century creation still not appreciated?

14.20-15.05 Per Salberger (Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet):
Presentation av årets Abelpristagare Pierre Deligne

15.05-15.30 Kaffe och smörgås

15.30-16.15 Alexander Berglund (Stockholms universitet):
Automorphisms of high dimensional manifolds and free groups

16.25-17.05 Mats Andersson (Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet):
Presentation av årets Wallenbergpristagare Håkan Samuelsson Kalm och Elizabeth Wulcan

17.05-17.10 Utdelning av årets Wallenbergpris

17.10 Årsmöte

ca 18.30 Gemensam middag på restaurang.

Svenska matematikersamfundets styrelseberättelse verksamhetsåret 12/13

Samfundet har 392 individuella medlemmar, varav 330 är ständiga medlemmar; sedan tillkommer 17 institutionella medlemmar. Styrelsen har för närvarande följande sammansättning:

Mats Andersson, ordförande
Pär Kurlberg, vice ordförande
Elizabeth Wulcan, sekreterare
Milagros Izquierdo Barrios, skattmästare
Jana Madjarova, femte ledamot

Denna styrelseberättelse avser verksamhetsperioden juni 2012–juni 2013. Styrelsearbetet har till allra största delen bedrivits via e-post, men även traditionella möten har förekommit.

Samfundets *höstmöte* ägde rum i Luleå fredagen den 23 november med det traditionsenliga temat *juniora matematiker*. Förutom huvudtalaren Kristian Bjerklöv deltog ett antal juniora talare från olika lärosäten som presenterade sin forskning. Mötet var lyckat och det är viktigt för samfundet med detta återkommande juniortema.

Styrelsen har under verksamhetsåret genomfört en översyn av medlemsmatrikeln. Detta har resulterat i att man skickat påminnelser och härigenom fått in ett antal medlemsavgifter, men det har också inneburit att ett antal namn i matrikeln har strukits. Detta är det huvudsakliga skälet till att medlemsantalet minskat sedan förra året.

Styrelsen har utsett Jan Stevens, Chalmers, att vid halvårsskiftet efterträda Sergei Merkulov som svensk representant i redaktionen för Mathematica Scandinavica. Styrelsen tackar Sergei Merkulov för ett förtjänstfullt arbete under tre år.

Skolornas matematiktävling, SMT, för gymnasister är en av samfundets viktigaste utåtriktade aktiviteter. Det svenska laget kom hem med en bronsmedalj från IMO 2012 i Argentina (Mårten Wiman). Kvalomgången 2012 hölls den 25 september. Det är glädjande att antalet deltagare är fortsatt högt. Det var ca 1000 gymnasieelever som skrev och (exakt!) 900 bidrag skickades in för rättning.

Det omfattande PR-arbetet från tävlingens sponsor, Brummer och Partners, bidrar till tävlingens ökade popularitet. För andra året i rad var det flera nya skolor som anmälde sig och deltog.

Finalen 2012 gick i Luleå och vanns av Mårten Wiman (Danderyds gymnasium).

Två träningsläger har genomförts under den aktuella perioden, ett gemensamt nordiskt i Sorö, Danmark, strax före IMO 2012, i vilket det svenska laget deltog, och ett tränings- och uttagningsläger för IMO 2013 i april 2013 med tio deltagare.

Den generösa sponsringen av SMT från Brummer & Partners är mycket viktig för genomförandet av tävlingen, träningslägren och inte minst för marknadsföringen av tävlingen. Samarbetet har också resulterat i andra åtgärder för att synliggöra svensk matematik; bl a har B&Ps VD tillsammans med samfundets ordförande och ordföranden för Svenska nationalkommitten för matematik skrivit en debattartikel. Samfundets ordförande medverkade också i en intervu i radio i juli 2012, med anledning av träningslägret i Sorö. Träningslägret i april 2013 hölls i B&Ps lokaler i Stockholm och i samband med detta anordnades för andra året i rad en ”duell” mellan gymnasisterna och matematiker på B&P. Duellen vanns av eleverna (även detta för andra året i rad). Träningslägret gav upphov till artiklar i DI och Affärsvärlden, samt ett inslag i de regionala nyheterna i ABC-området.

Tävlingskommitten har under 2012/2013 bestått av:

Jana Madjarova (ordf), MV, Chalmers/GU
Mats Boij, KTH
Thomas Gunnarsson, LTU
Axel Hultman, LiU
Dag Jonsson, UU
Peter Kumlin, MV, Chalmers/GU
Victor Ufnarovski, LTH
Paul Vaderlind, SU
Frank Wikström, LTH

Styrelsen vill tacka kommitten för det stora arbete som den lägger ned på tävlingen och det efterföljande arbetet med förberedelser och genomförande av olympiaddeltagandet.

Samfundets *årsmöte* 2013 äger rum i Stockholm, vid KTH. Årets huvudtalare är Andreas Rosén, Wallenbergpristagare 2012. Årets Wallenbergpris går i år till Håkan Samuelsson Kalm och Elizabeth Wulcan efter förslag från en kommitté som består av Nils Dencker (ordf), Carel Faber och Bernt Wennberg. Styrelsen vill tacka dem för deras noggranna arbete.

Till sist vill styrelsen tacka lokalombuden för att de ger samfundet en snabb informationskanal ut till våra medlemmar inom högskolesektorn samt att de förser SMS bulletinens redaktion med information.

Göteborg 07 maj 2013 å styrelsens vägnar

Mats Andersson
ordförande

Svenska matematikersamfundet

Resultaträkning för året 1 maj 2012 till 30 april 2013

Intäkter	
Medlemsavgifter, individuella årsbetalande	10 700 kr
Medlemsavgifter, institutioner årsbetalande	102 000 kr
Medlemsavgifter, ständiga medlemskap	20 000 kr
Medlemsavgifter, EMS	1 860 kr
Räntor och utdelningar	1 422 kr
Donation Wallenberg	300 000 kr
Summa	**435 982 kr**

Kostnader	
Möteskostnader	50 931 kr
Resestipendier och bidrag	34 713 kr
EMS-avgifter	15 395 kr
Förvaltningskostnader	5 262 kr
Diverse	7 866 kr
Wallenbergpriset	300 000 kr
Överskott	**21 815 kr**
Summa	**435 982 kr**

Balansräkning

Tillgångar och Skulder	**2013-04-30**	**2012-04-30**	
Postgiro	19 343 kr	8 333 kr	
SEB företagskonto	88 365 kr	134 076 kr	
SEB enkla sparkonto	36 900 kr	36 417 kr	
SEB fondkonto	1 040 503 kr	961 024 kr	
Summa	**1 185 111 kr**	**1 083 817 kr**	
Eget kapital			
Ingående balans			1 083 817 kr
Värdeökning fondkonto			79 479 kr
Överskott i verksamhet			21 815 kr
Eget kapital: Summa 30-04-2013			**1 185 111 kr**

Linköping 3 maj 2013

Milagros Izquierdo, skattmästare

Svenska matematikersamfundet

Resultaträkning för Linda Peetres minnesfond för året 1 maj 2012 till 30 april 2013

Intäkter	
Bidrag	0 kr
Summa	**0 kr**
Kostnader	
Stipendier	0 kr
Summa	**0 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2013-04-30**	**2012-05-01**
SEB checkkonto	25 935 kr	25 935 kr
SEB fondkonto	321 056 kr	303 733 kr
Summa	**346 991 kr**	**329 668 kr**

Skulder och eget kapital	
Ingående balans	329 668 kr
Värdeökning fondkonto	17 323 kr
Underskott i verksamheten	0 kr
Eget kapital: Summa 30-04-2012	**346 991 kr**

Linköping 3 maj 2013

Milagros Izquierdo, skattmästare för Svenska matematikersamfundet

Svenska matematikersamfundet

Resultaträkning för Matts Esséns minnesfond för året 1 maj 2012 till 30 april 2013

Intäkter	
Ränta	78 kr
Summa	**78 kr**
Kostnader	
Stipendier	3 200 kr
Förvaltningskostnader	0 kr
Summa	**3 200 kr**
Underskott i verksamheten	**3 122 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2013-04-30**	**2012-04-30**
SEB checkkonto	4 447 kr	7 569 kr
SEB fondkonto	109 217 kr	101 310 kr
Summa	**113 664 kr**	**108 879 kr**

Skulder och eget kapital	
Ingående balans	108 879 kr
Värdeökning fondkonto	7 907 kr
Underskott i verksamhet	3 122 kr
Eget kapital: Summa 30-04-2013	**113 664 kr**

Linköping 3 maj 2013

Milagros Izquierdo, skattmästare för Svenska matematikersamfundet

Svenska matematikersamfundet

Resultaträkning för Mikael Passarens minnesfond för året 1 maj 2012 till 30 april 2013

Intäkter	
Donationer	56 033 kr
Summa	**56 033 kr**
Kostnader	
Summa	**0 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2013-04-30**	**2012-05-01**
SEB placeringskonto	56 638 kr	0 kr
Summa	**56 638 kr**	**0 kr**

Skulder och eget kapital	
Ingående balans	0 kr
Insättning	56 033 kr
Värdeökning placeringskonto	605 kr
Eget kapital: Summa 30-04-2013	**56 638 kr**

Linköping 3 maj 2013

Milagros Izquierdo, skattmästare för Svenska matematikersamfundet

EUROPEISK-NORDISKA MATEMATIKERKONGRESSEN I LUND

Tillägnas minnet av Lars Hörmander

Den 26:e nordiska och 1:a europeisk-nordiska matematikerkongressen äger rum i Lund den 10–13 juni 2013. Nordiska matematikerkongressen, som fram till 1980-talet hette Skandinaviska matematikerkongressen, har arrangerats sedan 1909 och äger vanligtvis rum vart fjärde år. Den kommer nu tillbaka till Lund efter precis 60 år; den 12:e upplagan hölls där 1953.

De senaste åren har kongressen genomförts tillsammans med ett utländskt matematikersamfund för att stärka mötets internationella karaktär. I år är detta partnersamfund det Europeiska Matematikersamfundet (EMS).

EMS-föreläsaren 2013, Tamara Ziegler (Technion), kommer att ge en rad föreläsningar vid kongressen.

Inbjudna huvudtalare är

- Anton Alekseev, Université de Genève
- Artur Avila, IMPA, Rio de Janeiro och Institute de Mathématiques Jussieu, Paris
- Viviane Baladi, Köpenhamns universitet
- Adrian Constantin, King's College London och Universität Wien
- Carel Faber, KTH
- Jesper Grodal, Köpenhamns universitet
- Håkan Hedenmalm, KTH
- Svante Janson, Uppsala universitet
- Pekka Koskela, Jyväskylä universitet
- Kristian Seip, NTNU Trondheim
- Agata Smoktunowicz, University of Edinburgh
- Alexander Volberg, Michigan State University och Universität Bonn

Vetenskaplig kommitté: Ari Laptev, Imperial College & Mittag-Leffler-institutet; Tobias Ekholm, Uppsala universitet; Jan Philip Solovej, Köpenhamns universitet; Helge Holden, NTNU Trondheim; Eero Saksman, Helsingfors universitet, Hermann Thorisson, Islands universitet; Iain Gordon, universitetet i Edinburgh; Ursula Hamenstädt, universitetet i Bonn; Klaus Schmidt, universitetet i Wien.

Organisationskommitté: Alexandru Aleman, Lunds universitet; Magnus Fontes, Lunds universitet; Pavel Kurasov, Stockholms universitet; Sandra Pott, Lunds universitet; Tomas Persson, Lunds universitet; Jörg Schmeling, Lunds universitet; Tatyana Turova, Lunds universitet; Erik Wahlén, Lunds universitet.

Kongressens webbplats har adress `http://www.maths.lth.se/nordic26/`

Nyheter från EMS

Kenneth Appel 1932–2013

Kenneth Appel, som tillsammans med Wolfgang Haken bevisade fyrfärgssatsen, avled den 19 april vid 80 års ålder. Beviset, som publicerades i två delar i Illinois Journal of Mathematics år 1977, var det första viktiga bevis som stöddes på omfattande datorberäkningar.

Aktualisering av Europeiska vetenskapsrådets kallelser om förslag (2014)

Eftersom det nya programmet ”Horisont” inte har antagits definitivt av EU, kan Europeiska vetenskapsrådet bara tillhandahålla en riktgivande tidplan för kommande ERC-kallelser enligt följande: Publicering av den preliminära tidsplanen för nya kallelser (ERC:s arbetsprogram för 2014), sent under 2013; Öppnande och ansökningsfrister till nya ERC-kallelser under 2014:
– Öppnande och ansökningsfrister startanslag; första och andra kvartalet 2014
– Öppnande och ansökningsfrister för konsolideringsanslag; andra kvartalet 2014

Wallenbergstiftelsen stöder svensk forskning i matematik

Knut och Alice Wallenbergs stiftelse har i samarbete med Vetenskapsakademien fattat beslut om att stödja svensk forskning i matematik. Stiftelsen satsar nu upp till 200 miljoner kronor under en sexårsperiod för att ytterligare utveckla svensk forskning i matematik. Sammantaget kommer programmet att finansiera utlandsvistelser för 24 svenska forskare på postdoktornivå. Dessutom kommer 35 utländska postdoktorer och 25 gästprofessorer att beredas tillfälle att besöka svenska institutioner.

Marie Curie-åtgärdernas forskningsstipendier: Kallelse om ansökningar

Europeiska kommissionen har utfärdat en kallelse om ansökningar om stipendier inom programmet Marie Curie-åtgärderna (både för egen karriärutveckling i utomeuropeiskt land och för utomeuropeiska forskare för besök vid europeisk institution). Ansökningstiden löper till den 14 augusti 2013. Information: http://ec.europa.eu/research/mariecurieactions/index_sv.htm

Ny Poincaré-lärostol vid Institut Henri Poincaré (IHP)

IHP i Paris has startat ett nytt program, Poincaré-lärostolen, som under de närmaste fem åren finansieras av anslag från Clay Mathematics Institute som tidigare var reserverade för lösningen av problemet Poincarés förmodan. Initiativet möjliggör forskningsprogram under sex månader till ett år. Det är öppet för alla forskningsområden inom matematik. Avsikten är att ge unga forskare på tröskeln till en lovande internationell karriär en möjlighet att utveckla djupsinnig och djärva forskningsprojekt samt att etablera ett internationellt erkännande.

Bernoulli-sällskapet och EMS sponsrar föreläsningar

Bernoulli-sällskapet för matematisk statistik och sannolikhet samt Europeiska matematikersamfundet har kommit överens om att sponsra föreläsningar under det löpande temat ”Vad kan statistiken/matematiken göra för matematiken/statistiken?”. De har utsett en urvalskommitté som består av Herbert Edelsbrunner, Yves Meyer, Benedikt M. Poetscher och Michael Sørensen.

Abelpriset 2013 till Pierre Deligne

Den norska vetenskapsakademin DNVA (Det Norske Videnskaps-Akademi) har beslutat att tilldela Pierre Deligne, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, USA, Abelpriset för 2013 för nyskapande bidrag till algebraisk geometri och för dessas genomgripande inflytande på talteori, representationsteori och närbesläktade områden”. Deligne mottar priset av hans majestät kung Harald i Oslo den 21 maj.

GeoLMI 2013 - Konferens om geometri och algebra för lineära matrisolikheter

Detta är en konferens som arrangeras av Didier Henrion och Monique Laurent, i samarbete med det tredje mötet inom GeoLMI -projektet, finansierat av den franska nationella forskningsbyrån ANR (Agence nationale de la recherche). Målsättningen är att sammanföra olika forskare inom ren och tillämpad matematik (reell algebraisk geometri, kommutativ algebra, funktionalanalys, kontinuerlig och diskret optimering) som har intresse av lineära matrisolikheter och deras tillämpningsområden (operationsanalys, systemreglering, prestandaanalys av dynamiska system).

LMS minisymposium om avancerade uppdelningsmetoder för partiella differentialekvationer

Detta seminarium hålls från måndag 2 september till onsdag 4 september vid Kingston University. Syftet med detta minisymposium är att undersöka avancerade uppdelningsmetoder med avseende på diskretisering för evolutionsekvationer med tillämpningar på transportfenomen, värmeöverföringsmodeller, mikrovärmeöverföringsmodeller, finansiella och ekonomiska problem samt medicinska tillämpningar.

Europisk-nordisk kongress i Lund: Andra kungörelsen

Den 26:e nordiska och 1:a europeisk-nordiska matematikerkongressen avlöper vid Matematikcentrum vid Lunds universitet. Kongressen tillägnas minnet av Lars Hörmander (1931–2012). Arrangörerna har nu offentliggjort den andra kungörelsen om kongressen som publiceras på annan plats i detta nummer. Mer information: http://www.maths.lth.se/nordic26/

Robert Phelps 1926-2013

Robert Ralph Phelps, en amerikansk matematiker som var känd för sina enastående bidrag till analys, särskilt funktionalanalys och måtteori, avled den 4 januari. Han var professor i matematik vid University of Washington sedan 1962. Phelps mest kända resultat är förmodligen den berömda Bishop-Phelps sats som bevisades i samarbete med Errett Bishop.

Från institutionerna

Chalmers/Göteborgs universitet:

Richard Lärkäng disputerade i matematik den 15 februari på avhandlingen *Residue currents on singular varieties*.

Ida Säfström disputerade i matematik den 26 april i matematik på avhandlingen *Exercising Mathematical Competence: Practising Representation Theory and Representing Mathematical Practice*.

Linköpings universitet:

Nils Rutstam har disputerat i matematik på avhandlingen *Analysis of dynamics of the Tippe Top*.

Oleg Burdakov och **Vitalij Tjatyrko** har befordrats till biträdande professorer.

Lunds universitet:

Erik Wahlén har antagits som docent vid Matematik NF.

Johan Öinert har antagits som docent vid Matematik LTH.

Alma Masic disputerade vid Matematik LTH den 22 mars på avhandlingen *Investigation of a Biofilm Reactor Model with Suspended Biomass*.

Karl-Mikael Perfekt disputerade vid Matematik NF den 17 maj på avhandlingen *Articles on Potential Theory, Functional Analysis and Hankel Forms*.

KTH/Stockholms universitet:

Géométrie Algébrique en Liberté En konferens för unga forskare i algebraisk geometri äger rum vid KTH och Stockholms universitet den 24–28 juni 2013. http://www.mimuw.edu.pl/~gael/index.html

PDE and Mathematical Finance V Den femte konferensen om PDE-metoder inom finansiell matematik äger rum i Stockholm den 10–13 juni 2013. http://www.math.kth.se/pdefinance/2013/Welcome.html

NORCOM 2013 Den elfte nordiska konferensen i kombinatorik äger rum i Stockholm den 17–19 juni 2013. http://www.math.kth.se/NORCOM13/

Umeå universitet:

Gerold Jäger har antagits som docent i matematik.

Konferensen **Advances in numerical analysis and computational sciences** hålls i Umeå den 15–16 maj: http://www.org.umu.se/umit/english/conferences/workshop/

Ordet är mitt

Ulf Persson

Mina föräldrar var läroverkslärare i matematik och fysik (min mamma som vidareutbildad folkskolelärare min pappa som adjunkt). Tidigt hörde jag talas om skolpojkar som visade framfötterna i matematik (en av dem var Lars Wahlbin, sedermera professor och numeriker vid Cornell). Båda föräldrarna hade gått på den så kallade ”Spyken” i Lund, där de för övrigt även träffades, och berättade med beundran om den krävande matematikläraren Harry Malmheden (som strax därefter disputerade och sedan kom att då och då vikariera som professor). Min far studerade matematik och fysik och kom i kontakt med Lennart Sandgren och Nils Erik Fremberg och tenterade två betyg för Marcel Riesz samtidigt med Hörmander (min far brukade skämta om att de fick samma betyg[20]). Den senare utsattes givetvis inte för den sedvanliga muntan utan sattes i en vrå för att arbeta med några specialproblem, uppenbarligen för att tillfredställa Riesz nyfikenhet på vad han redan kunde vara mäktig. Således fick jag tidigt i min ungdom höra talas om detta skolljusens skolljus. De stora matematikerna kom jag ungefär samtidigt i kontakt med via Bells ”Matematikens män” som min pappa rekommenderade. De blev mina hjältar, men givetvis på ett abstraktare plan och utan denna direkta anknytning. Matematiken fick således tidigt ett ansikte för mig, och ovedersägligt bidrog detta starkt till att jag bestämde mig för den matematiska banan tidigt i livet. Huruvida detta var lyckligt eller inte är en annan fråga, men min erfarenhet pekar i vilket fall som helst tydligt på vikten av personliga förebilder. Hur många sådana kommer dagens elever i kontakt med när det gäller naturvetenskap? Mycket få om ens några. Hur många sparkar inte boll och drömmer om att bli en ”Zlatan”? Hörmander var en matematikens ”Zlatan” för att göra en vulgär och därmed allmänt tillgänglig liknelse. Han var kort sagt glamorös. Ja matematiken hade ett något av ett glamoröst skimmer fram till 60-talet, åtminstone uppfattade jag det så. Medan elever i andra ämnen kunde plugga sig fram, var denna väg inte framkomlig inom matematiken. Här var det förståelse och penetration som gällde. En slags mental atletism. Begåvningsskillnader var inte bara en fråga om grad utan av art.

Den gamla stammens lärare ansågs av sina elever ofta vara stofiler och dessutom inte sällan ringaktade av den akademiska världen som sådana som inte hade hållit måttet fullt ut. Det var således inte ovanligt med disputerade lärare även ute på landsorten. Rektorn i min skola på 50- och 60-talet hade disputerat i grekiska, en kristendomslärare var svensk expert på Carl Gustav Jung. De flesta lärare hade varit skolljus som elever och sådant, mer än något annat, sätter sin prägel på det intellektuella klimatet. Den gamle stofilen ersattes sedan med en mera pedagogiskt skolad produkt. Detta ansågs vara mera ändamålsenligt och effektivt. Vad jag tycker om detta behöver jag knappast skriva ut. En konsekvens av detta var att Hörmander var någon som var allmänt känd långt utanför matematikernas trånga krets. I en tid då professorer var ovanliga och oftast till åren komna, gav unga förmågor som Carleson och Hörmander genklang. Hur många skolelever skulle ha känt till en Hörmander om han hade gett sig till känna idag? Hade hans begåvning ens uppmärksammats och uppmuntrats över huvudtaget[21]?

Jag kan även nämna som ett kuriosum att Hörmanders bok om flera komplexa variabler av någon outgrundlig anledning fanns i vårt skolbibliotek. Hur hade den kommit dit? En förklaring kan vara att den sysslar med komplexa tal, och dessa är viktiga inom växelströmsläran.[22] Men visst bläddrade jag i den, förstod givetvis ingenting, men var desto mera förundrad och fascinerad och tyckte att det måsta vara höjden av lycka att kunna syssla med något sådant. Det enda verk jag faktiskt kom att läsa av Hörmander var det stencilerade kompendium i integrationsteori som fortfarande på slutet av 60-talet gick att köpa på den matematiska institutionen på Hagagatan i Stockholm. För några veckor sedan tog jag fram det ur hyllan av rent nostalgiska orsaker. En annan minnesbild från den tiden som etsat sig fast är ett besök i Almqvist och Wiksell på Gamla Brogatan. En man med

[20]m.a.o. spets. På den tiden var det ett stort manfall på ett- och tvåbetygsskrivningarna. Genomströmningen var med andra ord låg. Detta rättades till med början på 60-talet. Följden blev att något av studieglamouren med matematiken försvann.

[21]Gauss gamle lärare framställs ofta som en ”Caligula”, men hur många moderna matematiklärare skulle ens ha kommit på tanken på en sådan uppgift och framför allt insett att det rörde sig om en begåvning som måste tas om hand och vårdas?

[22]Eller helt enkelt för att Hörmander var ett sådant känt namn att den ansvarige på det bibliotek som ursprungligen tillhört ett tekniskt gymnasium av den anledningen kände sig föranlåten, vilket bekräftar mina tidigare spekulationer.

[23]Denne man träffade jag ett par år senare på som huvudbibliotekarie i ett obskyrt bibliotek på Hagagatan. Han dog 1980 och lämnade efter

en stor cigarr i munnen står och bläddrar i en bok. Det var Hörmanders bok om Partiella Differentialoperatorer.[23]

På grund av mina föräldrars erfarenheter från Lund fick denna universitetsstad ett romantiskt skimmer. Varför sökte jag mig inte dit? Speciellt som min far då och då ibland gav kvällskurser för ingenjörer tillsammans med Gårdings pensionerade far och därmed kunde förmedla lite skvaller från den matematiska institutionen där.[24] Vidare hade Per Martin-Löf, som jag träffade för första gången i samband med matematikolympiaden i Moskva 1968, hävdat att med Hörmanders återinträde skulle Lunds matematikinstitution inte bara bli Sveriges utan Europas bästa. Men fyrabetygsskrivningarna i Lund på den tiden var något i hästväg, och jag behövde bara kasta en blick på dessa tekniska obegripliga problem med distributioner för att hålla mig undan. Jag var med andra ord feg. Fegheten har ett otvivelaktigt överlevnadsvärde och det är som bekant bättre att fly än illa fäkta. Dessutom visade det sig att min smak och eventuella fallenhet stod att finna i andra fåror än dem som plöjdes i Lund. Man vet som bekant bara vad man kunnat missa i livet, inte vad man faktiskt har gått miste om. Och väl är det. Men jag har aldrig ångrat mitt beslut. Ens handlande är oftast mera realistiskt än ens drömmar, om så inte vore fallet, varför då drömma?

Men Hörmanders närvaro blev än mera levande när jag trädde in i den akademiska världen efter skolan. Det talades om hans enastående matematiska förmåga närmast med bävan. Han var om inte allsmäktig i alla fall matematiskt allvetande. Det gick historier om hur han stängde in sig på ett rum med en knippe matteböcker och kom ut igen med innehållet fullständigt absorberat. Som med alla historier som går i omlopp är det intressanta inte deras sanningshalt per se, utan att de formuleras och har en grogrund att spridas i. Hörmander var med andra ord mytomspunnen. När jag sedan kom ut i den vida matematiska världen förväntade jag mig givetvis inte att någon skulle känna till vare sig Sandgren eller Malmheden, men Hörmanders namn nämndes med aktning. Ju mera distans man fick, desto lyskraftigare framstod han, precis som med ljusstarka stjärnor vars relativa magnitud bara blir än mera framhävd ju längre bort man förflyttar sig. Jag minns hur jag en gång tog en promenad med bland annat Andreotti i redwoodskogen i Arcata, Californien under en sommarskola där i Algebraisk geometri 1974. Andreotti, denne namnkunnige algebraiske geometriker talade med vördnad om Hörmander. När man ställer en fråga till Hörmander skall man lyssna mycket noga, förklarade han andäktigt. Jag har sedan dess träffat på många andra exempel på mycket framstående matematiker som enligt egen utsago reducerats till skolpojkar inför den store. Inte nog med att han var en framstående matematiker, han hade detta extra som fick andra matematiker att projicera sina matematiska superegon på honom.

Första gången jag fick syn på honom var inte förrän ICM i Helsingfors 1978. Jag såg på avstånd en gående lång gestalt, omgiven likt en medeltida riddare av ett följe som svansade efter. Under Hörmanders korta tid vid Mittag-Leffler ett antal år senare blev jag upprepade gånger presenterad för honom utan att han lade min existens på minnet, tills en gång en för mig okänd japan utropade, ”Ulf Persson, world-famous in Algebraic Geometry” [sic]. Nu tvivlar jag på att detta imponerade nämnvärt på Hörmander, men han tog sig i alla fall tid att småprata lite och det visade sig att han mycket väl kände till Björkhagen där jag då bodde, ty han hade bott där själv under sin Stockholmstid. Detta visade sig i retrospekt vara den enda konversation jag någonsin skulle ha med honom. Därefter hade jag lite e-post-utväxling med honom i samband med Samfundets planerade 50-års jubileum vid millenieskiftet och ett par år senare angående Utskicket. Kontentan är att få svenska matematiker i min generation har haft så lite med honom att göra som jag (vilket bland annat innebär att jag i motsats till mina kolleger inte kan referera till honom med förnamn, ty det anser jag vore affekterat). Tack vare detta har det ursprungliga legendariska skimret i vilket han framstod för mig bevarats och kommer således för alltid att för mig associeras med hans namn.

Det är mänskligt att man blir personligt nyfiken på en sådan legend. Och samtidigt lite bedrövad över att han som en gång i tiden var känd i hela den svenska akademiska världen och kanske t.o.m. riksbekant tack vare lagen ”lex Hörmander” vid sitt frånfälle endast pliktskyldigast skulle uppmärksammas på familjesidorna. Hans död gav därmed större eko i den stora världen, bland annat exemplifierat av New York Times, än hemma i Sverige. Detta säger en del om skillnaden i det mediala klimatet i Sverige nu och för ett halvsekel sedan.

Nyfikenheten må vara mänsklig men inte alltid legitim. En författares och en kompositörs privatliv har mycket mindre att göra med den litterära och musikaliska verksamheten än man ofta tror. En politikers privatliv skall aldrig sammanblandas med rollen som politiker. I den mån de överlappar leder det nästan alltid till problem.

sig en stor samling matematiska böcker, vilka änkan omedelbart förpassade till ett lämpligt antikvariat, i detta fall Jones nära Odenplan. Under början av 80-talet var detta antikvariat en guldgruva för matematisk litteratur. Inte längre, och dessutom är antikvariatet spårlöst försvunnet.

[24] Det slår mig först nu i skrivande stund att detta kanske var den prosaiska förklaringen till att jag via min pappa kände till att Hörmander kallades till professuren 1968, istället för att detta faktum var allmänt känt i Sverige som jag i min naivitet alltid antagit.

När det gäller en matematikers privatliv och hans matematiska gärning råder det nästan inget samband alls, vilket Hörmander var väl medveten om och hade som följd att han värnade strängt om den förras helgd. Dit hade ingen utomstående tillträde. Detta kan man bara respektera. Men kanske en aspekt av hans personlighet kan trots allt vara värd att lyfta fram ty den ger en viss bakgrundsförståelse av hans matematiska gärning. Han lär ha ansett att denna var misslyckad. Med risk för att framstå som förmäten kan jag inte annat än sympatisera med psykologin bakom en sådan till synes absurd bedömning, ty den fick på ett närmast kusligt sätt bekräfta och därmed i minnet återuppväcka en profetia jag en gång formulerade som gymnasist: Att ju duktigare man var, desto större skulle gapet bli mellan vad man verkligen skulle kunna åstadkomma och ens ambitioner. Nu kan man spekulera i vad hans egentliga ambitioner kan ha varit och det ligger nära till hands att förmoda att han velat göra Lund till ett världscentrum i PDE. Klart är att han med sorg må ha sett på hur intresset för PDE dalat i Sverige, men han var ingen entreprenörsnatur. Carleson berättar hur han före Hörmanders avfärd till USA försökt intressera honom för ett återuppväckande av Mittag-Leffler-institutet, men att han inte visat något intresse för detta. En sådan bitterhet har troligen inte så mycket med konkreta projekt att göra utan är av en djupare existentiell natur. Hörmander var en perfektionist ut i fingerspetsarna. Reuben Hersh berättar att när Hörmander kom till Stanford och träffade Paul Cohen för första gången, anmärkte denne ”So you're Mr Perfect, the perfect mathematician, that's what I've heard.” För att komma från Cohen var detta ett uttryck för både en utmaning och en ärebetygelse. Ja, hans avhandling råkade innehålla ett trivialt fel, men som inte destomindre kom att gräma honom under hela livet. Kanske det inte är så underligt att Hörmander många gånger tackade nej till att närvara vid prestigefyllda konferenser ty han hade ingeting att säga! Vad som för de flesta av oss skulle framstå smått löjeväckande får här närmast majestätiska proportioner. Vidare kan det förklara det annars oförklarliga att han inte trivdes på IAS, en position för vilken man skulle tro att han var som klippt och skuren, utan kände pressen att leva upp till någonting han inte förmådde.

Han var inte lätt att ha som handledare. Med sådana omänskliga krav på sig själv var det inte underligt att något av detta skulle spilla över till omgivningen, och mången student må ha känt sig tillplattad.[25] Troskyldigt skriver han till Riesz under en vistelse i Chicago strax efter sin disputation att folk där är så okunniga när det gäller PDE, varje hypotes de framkastar kan han genast ge ett motexempel till. Vad gör han där? Endast närvaron av Chern ger honom en viss tröst. Nu skall man inte förneka att Hörmander då och då medvetet må ha utnyttjat sin överlägsenhet, frestelserna att så göra måste ha varit oemotståndliga, och det är mänskligt att inte vara ett helgon. Men oftast var han just ett helgon, ett matematiskt helgon, ren i anden och uteslutande motiverad av ett objektivt matematisk intresse i en diskussion. Klart att hans överlägsenhet då sken igenom. En förmåga som likväl som den kan inspirera också kan hämma, ja rentav krossa. Problemet ligger då helt hos avnämaren.[26] Således gick de som inte lät sig krossas stärkta ur, för att referera till ett ofta citerat uttalande av Nietzsche. På så sätt har Hörmander lagt ribban för svenska matematiker under en lång tid.

Hörmander har ibland liknats vid Grothendieck, vilket kan anses mycket långsökt, men kanske inte om man betraktar hans roll som matematisk imperiebyggare. Likt denne nöjde han sig inte med att bara lösa ett problem utan det skulle också ske på ett naturligt sätt som passade in i ett större sammanhang. Det är frestande att här tala om matematisk platonism i meningen att frilägga underliggande fundamentala principer som styr den synliga och sensuella matematiska världen. Hörmanders presentation av linjära PDE må inte ha varit lika radikal och nyskapande som Grothendiecks förvandling av den algebraiska geometrin, men den var destomera fulländad. Peter Lax klagade över att där Hörmander gått fram fanns inget kvar för mindre andar att tugga på.[27] Efter Hörmander kom icke-linjära PDE i ropet, och även om Hörmander slet med dessa, var det troligen inte något som passade hans kynne.[28]

Hörmanders matematiska kompetens spände över ett imponerande vitt fält, utan att för den skull vara encyclopedisk. Det var inte ett självändamål utan en naturlig följd av hans ambition att i grunden förstå vad han syss-

[25]Hersh berättar hur chockerad han blev över att Hörmander så bryskt avspisade en fråga Beurling ställde under ett seminarium vid Stanford.

[26]I Sokrates försvarstal låter Platon den nämnde yttra: *Och vad gäller den oenighet som skapar dessa fiendskaper och vredesutbrott käre vän? Låt oss tänka efter! Om du och jag blev oeniga om siffror och inte kunde enas om vilken av två mängder som är störst, skulle den oenigheten göra oss till fiender och vredgas på varandra? Skulle vi inte snarare sätta igång att räkna och snabbt försonas om saken?* (Jan Stolpes översättning). Med andra ord är matematiken något objekttivt. Att bli tillrättavisad är inte något personligt, snarare än att avsågas växer vi i insikt. Och den som tillrättavisar gör det inte för att hämnas utan refererar bara till hur det egentligen står till. Det är inte dennes fel att vi har fel. I många andra fall är det inte alls så, som Sokrates framhåller.

[27]Lax, enligt Hersh, använder termen ”glean”. Det var kutym att när bonden skördade vetet lät han lämna kvar axen som föll på marken för byns fattiga att plocka upp (”glean”).

[28]Detta påminner mig om en kollokviummiddag vid Columbia University i slutet av 70-talet under vilken Jürgen Moser var närvarande. Korteweg-de Vries ekvationen var då i ropet, och Moser uttryckte förhoppningen att ingen allmän teori skulle utvecklas för att förklara dem, utan de skulle likt livet och kärleken, förbli outgrundliga mysterier. En attityd till matematiken som må ha varit anatema till Hörmander.

lade med. En ambition som endast mycket framstående matematiker förmår att konsekvent genomföra, och som i hans fall, på grund av PDE's centrala position inom matematiken med så många beröringsområden, var ovanligt omfattande. Hans strävan efter "själv-tillräcklighet" tog sig även trivialare uttryck. Han lärde sig tidigt att skriva på maskin och hade sedan aldrig något behov av en sekreterare för renskrivning. Från hans tjänsterum på Kungstensgatan under hans tid i Stockholm hördes ett ständigt knatter. När han kom till Stanford förundrades Hersh över att han alltid hade färdigskrivna anteckningar att dela ut före sina föreläsningar. Ingen konst alls, genmälde Hörmander, och visade, som i en pantomim, med fingrarna hur det gick till. Huruvida han, likt en Mozart, direkt tryckte ner tangenterna utan att någonsin behöva ändra[29] låter jag vara osagt. Det kan vara material till ytterligare en myt. Något mindre trivialt var hans intresse för programmering, då företrädesvis i APL, i vilket han hade en förkärlek för korta och eleganta program. Huruvida detta hade någon direkt tillämpning på hans centrala forskning betvivlar jag, det var nog mera av ett nöje. Följden av denna solida underbyggnad blev att omfattande som hans stora produktion var, ger den ändå intrycket av att bara vara toppen av ett isberg. Hans elever vittnar om den djupa intuition som han besatt och som endast då och då lät sig anas och först långt i efterhand bekräftas. Således krävs, för att rätt kunna bedöma den historiska betydelsen av Hörmanders matematik relativt annan, en distans även i tid. Och för detta är, som hans elever påpekar, tiden långt ifrån mogen.

[29]för en yngre generation kanske det är befogat att påpeka att på en gammal skrivmaskin med färgband var det mycket svårt att ändra vad man skrivit, speciellt om det var en stencil, då fick man ta fram nagellacket.