bulletinen

Svenska Matematikersamfundet

Nr 8 Oktober 2013

Europeisk-nordiska matematikerkongressen
Tidsvinklat: Mesopotamiska räknetal

SMS bulletinen

utkommer fyra gånger per år, i februari, maj, oktober och december. Manusstopp är den första i respektive månad.

Ansvarig utgivare	Mats Andersson
Redaktör	Per-Anders Ivert pa.ivert@gmail.com
Adress	SMS bulletinen c/o Sara Maad Sasane Matematikcentrum Matematik LTH Box 118 221 00 LUND

Manus kan insändas i allehanda format *.pdf, .doc, .docx, .odt*. Som tillägg önskas dock en ren textfil. Alla texter omformas till LaTeX.

Svenska Matematikersamfundet

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem, betala in avgiften på samfundets *plusgirokonto* **43 43 50–5**.
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter	*(per år)*
Individuellt medlemsskap	200 kr
Reciprocitetsmedlem	100 kr

(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal)
Doktorander gratis under två år

Gymnasieskolor	300 kr
Matematiska institutioner	större 8 000 kr, mindre 3 000 kr

(institutionerna får själva avgöra om de är större eller mindre)

Ständigt medlemsskap	2 500 kr (engångsinbetalning)

Man kan även bli individuell medlem av EMS genom att betala in 250 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

Hemsida

http://www.swe-math-soc.se

Här återfinns bl.a. protokoll från möten.

Styrelse

ordförande	Pär Kurlberg 08–790 65 82 president@swe-math-soc.se
vice ordförande	Milagros Izquierdo Barrios 013–28 26 60 vice-president@swe-math-soc.se
sekreterare	Kristian Bjerklöv 08–790 71 64 secretary@swe-math-soc.se
skattmästare	Frank Wikström 046–222 85 64 treasurer@swe-math-soc.se
5:e ledamot	Jana Madjarova 031–772 35 31 bm5@swe-math-soc.se

Annonser

Dessa kan placeras inom en ram som t.ex. denna

helsida	3 000 kr
halvsida	1 500 kr
mindre	750 kr

Annonser i tre konsekutiva nr ger endast dubbla priset, dvs 1/3 rabatt

Annonser inlämnas som förlaga samt i förekommande fall som textfil.

Innehåll

Omslagsbilden: James Hakim, Matematikcentrum i Lund

Oktober 2013

Per-Anders Ivert

Det förra numret av SMS bulletinen innehöll mycket material som nog var svårsmält för många läsare. Samfundets medlemskår omfattar ju såväl elitforskare som allmänt matematikintresserade lekmän, och min önskan är att tillgodose flera olika smakriktningar, ibland med övervikt åt det ena eller andra hållet. Det här numret presenterar ett mer lättillgängligt material; bland annat har jag valt att införa en populärt skriven artikel av Christoph Drösser, vetenskaplig redaktör vid den tyska veckotidningen DIE ZEIT, en av världens mest renommerade tidskrifter. Den beskriver två aktuella framsteg inom primtalsforskningen, och den är ett bra exempel på hur matematiken behandlas i tysk press. Artiklar av detta slag förekommer då och då i tidningarnas vetenskapliga avdelningar eller på deras kultursidor.

Den 26:e nordiska och första europeisk-nordiska matematikerkongressen hölls i Lund i somras. Samfundets lokalombud i Lund, Erik Wahlén, ledamot av organisationskommittén, rapporterar.

Jag är mycket glad åt att kunna presentera ett bidrag av Jöran Friberg, välkänd expert på tvåflodslandets förhistoriska matematik, i avdelningen Tidsvinklat.

Kvalificeringsomgången i Skolornas matematiktävling 2013 hölls den 24 september med 971 deltagare från 140 skolor. Tävlingen arrangeras av Svenska matematikersamfundet sedan 1961 och sponsras sedan 2010 av Brummer & Partners. Vi publicerar här problem och lösningar. Resultaten kommer att föreligga i slutet av oktober och finaltävlingen hålls i Stockholm den 23 november.

Läsekretsen inbjudes varmt att meddela synpunkter på innehållet i SMS bulletinen. Jag är väl medveten om att vissa brister förekommer, till exempel korrekturfel. Det är naturligtvis mitt ansvar, men tiden är knapp inför varje utgåva, och sedan jag lämnade min universitetstjänst för fyra år sedan har jag varit tvungen att arbeta för mitt uppehälle, något som ofta går ut över arbetet med Bulletinen. Jag trivs ändå väl med redaktörssysslan (även om jag tror att tidskriften skulle må bra av ett skifte på redaktörsposten inom något eller några nummer), och det skulle vara trevligt med fler läsarreaktioner, positiva eller kritiska. I dag börjar planeringen av decembernumret.

Rapport från den 26:e nordiska matematikerkongressen den 10-13 juni i Lund

Erik Wahlén

Den andra veckan i augusti 1953 ägde den tolfte skandinaviska matematikerkongressen rum i Lund. På trappan framför universitetshuset kan man på deltagarfotot skymta en 22 år ung Lars Hörmander och kongresshandlingarna innehåller en av hans första artiklar (Uniqueness theorems and estimates for normally hyperbolic partial differential equations of the second order). När kongressen 60 år senare återvänder till Lund som den 26:e nordiska matematikerkongressen är den tillägnad minnet av Lars Hörmander.

Även om mycket har hunnit ändra sig på 60 år finner jag förvånansvärt många likheter när jag jämför kongresserna. I handlingarna för den tolfte kongressen kan man läsa att det ”skulle hållas större föredrag över allmänna ämnen jämte mindre föredrag om högst 20 minuter över specialämnen”. Vid en inspektion av schemat ser man att 20 minuter i själva verket var en nedre gräns, som stämmer förvånansvärt väl med den nedre gränsen på 25 minuter i år. Jag som trodde att korta föredrag var ett modernt påfund!

XII. Matematiker-kongressen 1953

I handlingarna från den tolfte kongressen framgår också att man ”på grund av det stora antalet föredrag, 50 st.” tvingats att i stor utsträckning ordna dessa i ”parallellt löpande serier”. 60 år senare har antalet föredrag fördubblats och trenden med parallella föredrag håller i sig. Med undantag av ett antal plenarföreläsningar var årets föredrag ordnade i parallella sessioner i allt från matematikutbildning till klassifikation av operatoralgebror. Hörmanders minne hedrades bland annat genom en särskild session om pseudodifferentialoperatorer, där flera av deltagarna delade med sig av personliga minnen, och ett föredrag om hans matematiska gärning av Vladimir Maz’ya. Huvudtalarna vid årets kongress var Anton Alekseev, Artur Avila, Viviane Baladi, Adrian Constantin, Carel Faber, Jesper Grodal, Håkan Hedenmalm, Svante Janson, Pekka Koskela, Kristian Seip, Agata Smoktunowicz och Xavier Tolsa. Några av föredragen går att hitta i elektronisk form på kongressens hemsida (http://www.maths.lth.se/nordic26/). Där finns också det fullständiga programmet.

Kongressen har de senare åren arrangerats i samarbete med ett partnersällskap. I år föll valet på det europeiska matematikersamfundet, EMS, och kongressen var därför också den första europeisk-nordiska matematikerkongressen. Som ett led i detta höll årets EMS-föreläsare Tamar Ziegler en serie om tre föredrag. EMS representerades på plats av dess ordförande Marta Sanz-Solé.

Hur var då årets kongress? Som medlem i organisationskommittén är jag så klart jävig i denna fråga. Med detta sagt är jag mycket nöjd och stolt över vår insats. Jag vill här passa på att nämna det hästjobb som Sandra Pott utförde som huvudorganisatör. Utan henne hade vi inte fått ihop allt i tid. Vi får också tacka vädrets makter som stod oss bi och bidrog till att höja stämningen.

Tamar Ziegler

När det gäller det vetenskapliga programmet var en personlig favorit just Tamar Zieglers föredrag om Möbiusslumpmässighet i vilket hon visade på spännande kopplingar mellan talteori och dynamiska system på ett lättillgängligt sätt. Jag ångrar att jag inte gick på fler av hennes föredrag, men så upptäckte jag också att en av nackdelarna med en konferens i ens hemstad är att det finns en massa annat som drar i en. Det sociala programmet bestod av en middag på Grand Hotel samt ett antal små utflykter i Lund. Själv hamnade jag på en stadsrundvandring i skymningen, där jag faktiskt lärde mig en del nya saker om stan (bl.a. adressen för Carl Johan Hills berömda hus utan trappa till ovanvåningen). Jag måste dock erkänna att schemat från den tolfte kongressen gör mig något avundsjuk med punkter som utflykt till Ven och morgonkaffe i Stadsparkskaféet (följt av besök i badhuset). Gemensamt för båda kongresserna är, som man kanske kan gissa, middagen på Grand. Nästa kongress äger förmodligen rum i Finland om fyra år. Den ser jag varmt fram emot.

Jag vill tacka Tomas Claesson som hjälpte mig med att hitta handlingarna från den tolfte kongressen.

Mönstret i slumpen

Christoph Drösser

Två stora gåtor om primtal har kommit ett steg närmare sin lösning

Forskning är numera en lagsport – stora genombrott åstadkoms för det mesta av forskarlag. Det gäller i princip även matematik, men här händer det ändå till och från att en enskild forskare efter år av ensamt arbete i sin kammare uppnår ett banbrytande resultat och löser ett problem som hans kolleger förgäves angripit i åratal eller ibland århundraden.

I maj inträffade detta två gånger, och båda gångerna handlade det om primtal. Först väckte en i stort sett okänd matematiker världsvitt uppseende: Yitang Zhang, en kinesisk immigrant i USA med en undervisningstjänst vid University of New Hampshire, bevisade en sats som försatte expertisen i hänryckning.

Primtal är naturliga tal som endast är delbara med 1 och sig själva. De är atomerna i talens värld, de minsta faktorer som alla andra tal kan faktoriseras i på entydigt sätt. Följden börjar med 2, 3, 5 och 7, och den kan fortsättas hur långt som helst, det visade redan den gamle greken Euklides.

Även om det finns oändligt många primtal blir de med tilltagande storlek allt sällsyntare. Bland talen 1–100 finns 25 primtal, men mellan 1 000 000 och 1 000 100 finns det bara sex. Den tidigare obesvarade frågan var: Blir gapen mellan primtalen hela tiden större, eller finns det även bland de stora talen primtal som följer tätt på varandra? Finns det till och med hela tiden par av primtal med avstånd 2, som 11 och 13 eller 1 000 037 och 1 000 039? ”Primtalstvillingar” kallas sådana par. Och frågan är: Finns det oändligt många sådana eller inte? Redan Euklides lär ha funderat mycket på den saken.

Yitang Zhang har visserligen inte löst detta urgamla problem, men han kunde visa att avstånden mellan på varandra följande primtal inte växer över alla gränser. Närmare bestämt: Det finns om och om igen par med inbördes avstånd på mindre än 70 miljoner. Lekmannen må kanske finna detta enorma tal skrattretande, men för matematiker är det första beviset för existensen av ett sådant maximalt avstånd en sensation. Nu gäller det ”bara” att stegvis förminska detta värde.

Att värdet när allt kommer omkring är 2, att det alltså även under de alltmer sällsynta stora primtalen hela tiden finns tvillingar, betvivlar egentligen ingen som är lite hemma inom talteori. Orsaken är att primtalen lyder lagar som vid första anblicken kan synas paradoxala: Så är visserligen egenskapen att vara prim ett i högsta grad individuellt kännetecken för varje enskilt tal, och det finns ingen formel som spottar ut alla primtal, men ändå är deras fördelning underkastad statistiska lagar.

Slumpmässigt och ändå beräkningsbart

För varje tal x, om än aldrig så stort, kan man tämligen väl uppskatta antalet primtal mindre än x. Primtal större än 5 måste, vilket lätt inses, sluta på 1, 3, 7 eller 9. I övrigt fördelar de sig så som om de vore slumpmässigt dragna, efter en viss sannolikhetsfördelning, som lottotal. Det förhåller sig på liknande sätt med decimalerna i cirkeltalet pi – de är också å ena sidan entydigt fastlagda, men å andra sidan skiljer sig deras följd på intet sätt från en helt slumpmässig sifferföljd.

Även beviset för den berömda Goldbachs förmodan rycker närmare

Då man för varje tal kan beräkna sannolikheten för att det är ett primtal, kan man också beräkna med vilken sannolikhet två på varandra följande udda tal är primtal. Den resulterande formeln anger med ganska god noggrannhet det verkliga antalet hittills funna primtalstvillingar – bland de första tusen biljonerna heltal finns cirka 1,1 biljoner sådana tvillingar, i genomsnitt vart tusende tal.

”Talteoretikerna räknar med att det finns ett stort antal primtalstvillingar – inte för att vi tror att någon djuplodande, förunderlig struktur ligger dold i primtalen, utan just för att vi inte tror det", skriver den amerikanske matematikern Jordan Ellenberg i sin blogg.

Statistiska uppskattningar av det slaget räknas emellertid inte som bevis. För ett bindande bevis för att det som alla betraktar som sant verkligen är sant, behövde Zhang använda sig av mycket komplicerad matematik som delvis utspelar sig i högdimensionella geometriska rum. Och hans kolleger betvivlar att denna verktygsuppsättning är tillräcklig för att minska gapet ned till värdet 2.

Att bevisa det som alla tror på

Talteorin vimlar av sådana förmodanden som alla tror är sanna, men som hittills stretat emot ett bevis. En annan är Goldbachs förmodan, som matematikern Christian Goldbach formulerade 1742 i ett brev till Leonhard Euler: Enligt denna kan varje jämnt tal större än 2 skrivas som summan av två primtal. Även i detta fall anser matematikerna att de har statistiken på sin sida. Med storleken av ett jämnt tal växer tendentiellt antalet uppdelningar i två primtal av talet i fråga. Ingen expert kan föreställa sig att det plötsligt dyker upp ett stort tal som inte kan delas upp. Ett strikt bevis saknas.

Men samma dag som Zhang la fram sitt resultat, presenterade den i Paris verksamme peruanen Harald Helfgott den sista byggstenen i sitt bevis för den så kallade svaga Goldbachs förmodan, enligt vilken varje udda tal större än 5 kan skrivas som summan av tre primtal. Såväl Helfgotts som Zhangs bevis granskas nu närmare av det matematiska samfundet.

De stora matematiska gåtorna som hör samman med primtalen verkar alltså komma närmare sin lösning. Det väcker förhoppningar om att även talteorins allra främsta problem kommer inom räckhåll, den så kallade Riemanns förmodan. På den som löser detta väntar inte bara ära och berömmelse, utan också en prissumma på en miljon dollar som Clay Foundation har utlyst. Det kan alltså löna sig att tänka efter.

Från tyskan av red. Originaltexten publicerades i DIE ZEIT 27/2013.

Nyheter från EMS

ERC Advanced Grants

I den sjätte och sista utskrivningen av "Advanced Grants" under EU:s sjunde ramprogram för forskning och utveckling (FP7) delar Europeiska forskningsrådet (ERC) ut över 660 miljoner euro till 284 forskningsledare, bland dem elva matematiker. De kommer att genomföra sin forskning i 18 olika länder i Europeiska forskningsområdet (ERA). Finansiering görs med upp till 3,5 miljoner euro per projekt. Nästa utlysning av Advanced Grants görs under "pelaren vetenskaplig spetskompetens" inom det nya ramprogrammet Horisont 2020.

ERC understödjer arXiv

Europeiska forskningsrådet (ERC) har anslutit sig till ett internationellt partnerskap med syfte att understödja arXiv, ett av de största vetenskapliga magasinen inom fysik och matematik, som drivs av Cornell University Library (New York). ERC är den första europeiska organisationen för forskningsfinansiering som ansluter sig till initiativer arXiv. Motivet är att främja fri tillgång till vetenskapliga resultat, både för vetenskapsmän och för allmänhet.

ICM 2014: Listan över plenar- och sektionstalare har publicerats

http://www.icm2014.org/en/program/scientific

Mentoring African Research in Mathematics (MARM)

London Mathematical Society (LMS) och Internationella matematikerunionen (IMU) utlyser tillsammans med African Mathematics Millennium Science Initiative (AMMSI) stipendier för att stödja matematik och matematikundervisning vid afrikanska universitet. Fyra handledarposter ska inrättas, vardera med tvåårig löptid. Sista ansökningsdag är 31 oktober.

Asiatiska matematikkonferensen 2013 i Busan väljer att verka för ett matematiskt förbund i Asien

Asiatiska matematikkonferensen 2013 ägde rum i Busan, Korea, 30 juni–4 juli 2013. Vid konferensens avslutande godkändes en resolution för att lägga grunden för bildandet av ett matematiskt förbund, Mathematical Union in

Asia (preliminärt), med syfte att främja och stärka matematik i området, underlätta utbyten och verka som det matematiska samfundets röst i den asiatiska regionen. Målet är att etablera förbundet vid den internationella matematiker kongressen 2014.

Hirzebruch-föreläsning vid den kommande Europeiska matematikerkongressen

För att hedra minnet av professor Friedrich Hirzebruch har Tyska matematikerföreningen (Deutsche Mathematiker-Vereinigung, DMV) och EMS enats om att inrätta en ”Hirzebruch-föreläsning” som ska ges vid de europeiska matematikerkongresserna med början vid sjunde ECM i Berlin 2016.

Ett nätverk av internationella matematikcentra har bildats

Vid ett möte i Paris den 1 juni enades fyra internationella matematikcentra om ett samarbete. De fyra grundande medlemsinstitutionerna är Abdus Salam School of Mathematical Sciences i Lahore (Pakistan), Centro de Investigacion en Matematicas i Guanajuato (Mexiko), Vietnam Institute for Advanced Studies in Mathematics i Hanoi (Vietnam) och Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (Rio de Janeiro, Brasilien).

LMS-pristagarna 2013 har tillkännagetts

Rådet för London Mathematical Society har tillkännagett vilka som tilldelats priser vid sällskapets möte den 5 juli:
De Morgan Medal – Professor John Thompson FRS, University of Cambridge
Naylor Prize and Lectureship – Professor Nick Trefethen FRS, University of Oxford
Senior Whitehead Prize – Professor Frances Kirwan FRS, University of Oxford
Whitehead Prize – Professor Luis Alday, University of Oxford
Whitehead Prize – Dr Andre Neves of Imperial College London

ICERM-program

Under det akademiska året 2014-15 kommer Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics vid Brown University att inrikta sig på terminsprogram om högdimensionell approximation (http://icerm.brown.edu/sp-f14) samt fasövergångar och uppstående egenskaper (http://icerm.brown.edu/sp-s15).

Ansökningar om postdoc-stipendier välkomnas:
https://www.mathjobs.org/jobs/jobs/4818,
https://www.mathjobs.org/jobs/jobs/4819,
https://www.mathjobs.org/jobs/jobs/4820.

i

Första Heidelbergs pristagarforum med flera topprankade matematiker och dataloger

Cirka 40 Abel-, Fields- och Turing- och Nevanlinnapristagare deltog i den första sammankomsten för Heidelberg Laureate Forum (HLF) 22–27 september. Pristagarna talade inför 200 av de mest lovande unga forskarna inom matematik och datalogi från 47 länder, utvalda bland nästan 600 sökande.

ICM 2014: Resestipendier till 1000 matematiker från utvecklingsländer

Organisationskommittén för ICM 2014 avser att bjuda in 1,000 matematiker från utvecklingsländer till Korea för deltagande i den internationella matematikerkongressen 2014. En resestipendiefond för ICM 2014 har instiftats och organisationskommittén för ICM 2014 uppskattar den genomsnittliga kostnaden till cirka 2000 US-dollar per person, vilket ger en sammanlagd kostnad på två miljoner US-dollar.

Shawpriset 2013 till D. L. Donoho

Shawpriset 2013 i matematiska vetenskaper, noterat till en miljon US-dollar, har tilldelats David L. Donoho (Stanford University) ”för hans djuplodande bidrag till modern matematisk statistik och i synnerhet utvecklingen av optimala algoritmer för statistisk skattning under närvaro av brus och av effektiva metoder för gles representation och återvinning i stora datamängder”.

José Luis Rubio de Francia-priset 2012 för unga matematiker

María Pe Pereira, gästprofessor vid Université de Lille, har tilldelats José Luis Rubio de Francia-priset för år 2012. Enligt juryns prismotivering har ”María Pe Pereira (Burgos, 1981) givit några enastående matematiska bidrat till singularitetsteori, särskilt i samband med det berömda Nash-problemet om bågar för ytsingulariteter (ställt av John Nash 1968).”

Forskningsprogrammet geometri/topologi vid VU Amsterdam likviderat

Som en följd av en omstruktureringsplan som publicerades för två år sedan har Vrije Universiteit Amsterdam (VU) nu formellt avslutat forskningsprogrammen geometri/topologi. VU entledigade inte medlemmarna av geometriavdelningen så som ursprungligen avsågs, men utvecklingen har haft allvarliga konsekvenser för flera forskare vid VU.

San Francisco-deklarationen ASCB om forskningsutvärdering annonserad

Vetenskapsmän, tidskriftsredaktörer, lärda samfund och forskningsfinansiärer från många olika vetenskapsgrenar har utfärdat en internationell deklaration, San Francisco Declaration on Research Assessment, vari det globala vetenskapssamfundet uppmanas att eliminera den dominerande roll som ”journal impact factor” (JIF) har vid bedömningen av forskning för ekonomiskt stöd, rekrytering, befordran eller institutioners effektivitet. EMS är bland undertecknarna. Även enskilda individer kan underteckna.

Nyheter från ICIAM

Två viktiga beslut fattades då rådet för ICIAM (International Council for Industrial and Applied Mathematics) sammanträdde i Beijing den 11 maj. Maria J. Esteban utsågs till tillträdande president. Bland ett antal andra viktiga uppgifter är Maria för närvarande ordförande för EMS kommitté för tillämpad matematik. Den spanska staden Valencia har valdes att stå värd för 2019 års ICIAM-kongress. Beslutet fattades i mycket hård konkurrens mellan tre olika förslag.

Science Europe utser ledamöter till sin kommitté för fysik, kemi och matematik

Science Europe, den nya sammanslutningen i Bryssel av europeiska organisationer för forskning och forskningsfinansiering, har utsett sex vetenskapliga kommittéer. Ordförande för kommittéerna för matematik, fysik och kemi är Bengt Nordén, professor i fysikalisk kemi vid Chalmers. Kommittén har två matematiker bland sina 15 ledamöter László Lovász, Eötvös Loránd-universitetet i Budapest och Karl Sigmund, universitetet i Wien.

EMS kalendarium

12-13 okt	Gemensamt möte EMS-PTM ”A. Mostowski Centenary”, Warszawa, Polen
3-19 okt	IMPAN-EMS Bedlewo: ”EMS School on Computational Aspects of Gene Regulation”, Będlewo, Polen
30 okt	Kommittén för tillämpad matematik
8-10 nov	Exekutivkommitténs möte i Paris
11-12 nov	Publikationskommitténs möte, Bledsjön, Slovenien
23-24 nov	Raising Public Awareness Committee, Paris
25-26 april 2014	Kommittén för utvecklingsländer, det årliga mötet, Berlin
28-29 juni 2014	EMS rådsmöte, San Sebastian, Spanien

Tillkännagivanden

Wallenbergstiftelsens matematikprogram
Knut och Alice Wallenbergs stiftelse har beslutat att tillsammans med Kungl. Vetenskapsakademien stödja matematisk forskning i Sverige. Målet är att Sverige ska återta en internationell tätposition genom att ge de bästa unga forskarna internationell erfarenhet och rekrytera såväl unga som mer erfarna matematiker till Sverige. Programmet består av flera delprogram, av vilka ett ger en unik möjlighet för svenska institutioner att berika och utveckla sin forskning genom att knyta en internationellt välrenommerad forskare till sig.

Lars Wahlbin avliden
Lars B. Wahlbin har avlidit i en ålder av 68 år. Han disputerade i Göteborg 1971 och var professor i matematik vid Cornell University sedan 1980.

Samfundets höstmöte
Svenska matematikersamfundets höstmöte 2013 äger rum den 22 november på Uppsala Universitet, Ångströmlaboratoriet.

Andreas Wannebo avliden
Andreas Wannebo avled tidigare i år. Han var i många år medarbetare vid Institutionen för matematik vid KTH och var känd som en engagerade debattör i matematikutbildningsfrågor.

Daniel Mondoc avliden
Daniel Mondoc, Matematikcentrum i Lund, har avlidit efter en tids sjukdom. Han har tjänstgjort vid en rad olika

matematiska institutioner och även varit en uppskattad matematiklärare vid Borgarskolan i Malmö.

Matematik i Umeå 50 år

Institutionen för matematik och matematisk statistik firade i början av oktober 50-årsjubileum. En av hedersgästerna var Hans Wallin, professor emeritus i matematik, som lett den matematiska verksamheten i Umeå under flera decennier. Det är också precis 50 år sedan Hans Wallin disputerade i Uppsala.

Sonja Kovalevsky-dagarna

Kovalevskydagarna anordnas i Umeå 15–16 november. Se länk i avdelningen Från institutionerna under Umeå universitet.

Brev från läsekretsen

Mörk materia, mörk energi och två räta linjer i ett nytt perspektiv!

Lars Wern

Mörk materia är ett antagande som baseras bl a på att för omloppshastigheter och avstånd kring galaxcentra är ett oväntat samband observerat som beskrivs av en horisontell approximativt rät linje. Denna förklaras i det av mig föreslagna kosmiska perspektivet av en vilomassa hos en elementarpartikel för gravitationen. Vidare förklaras mörk energi som f n antages av all expertis dominera i kosmos följt av mörk materia på en andraplats. Antagandet att det finns mörk energi bygger på beräkningar som har påvisat en metrisk expansion enligt ett samband beskrivet i nutid av en krökt linje som indikerar en positiv acceleration. Tidigare hade beräkningarna resulterat i en rät linje där mer noggranna mätningar förväntades visa på en krökning svarande mot negativ acceleration.

I mitt föreslagna kosmiska perspektiv beskrivs i nutid den metriska expansionen av en rät linje som i teorin har en svag krökning svarande mot negativ acceleration. Expansionsförloppet beskrivs här med en tidsaxel som är bestämd av klockor i form av utstrålade ljusvågor. Dessa är logiska för att beskriva den metriska expansionen hos kosmos. För det syftet används idag klockor med elementarladdningen som referens vilket har blivit lika missvisande som försök att förklara solsystemet med Jorden som referens. I båda fallen går det att ta fram fungerande beräkningsmodeller, men de duger inte till en förklaring av den fysikaliska verkligheten.

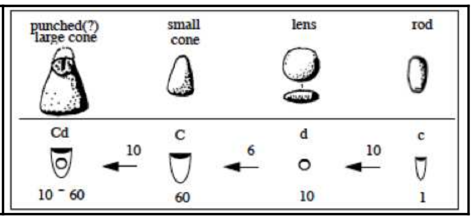
Genom valet av utstrålade ljusvågor som kosmiska klockor går det att beskriva den metriska expansionen hos kosmos utan att behöva antaga existensen av mörk energi. Antagandet av denna är faktiskt påtvingat av att expansionen har beskrivits med en tidsaxel bestämd av klockor där elementarladdningen är referens. Är valet av den referensen där lika fel som den prekopernikanska kosmologins val av referens blir mörk energi, som nu beräknas stå för approximativt 70 % av all energi i kosmos, naturvetenskapens största bubbla i historiens ljus.

Tre Tusen År med Sexagesimala Tal i Mesopotamiska Matematiska Texter[1]

Jöran Friberg, Chalmers Tekniska Universitet, Göteborg

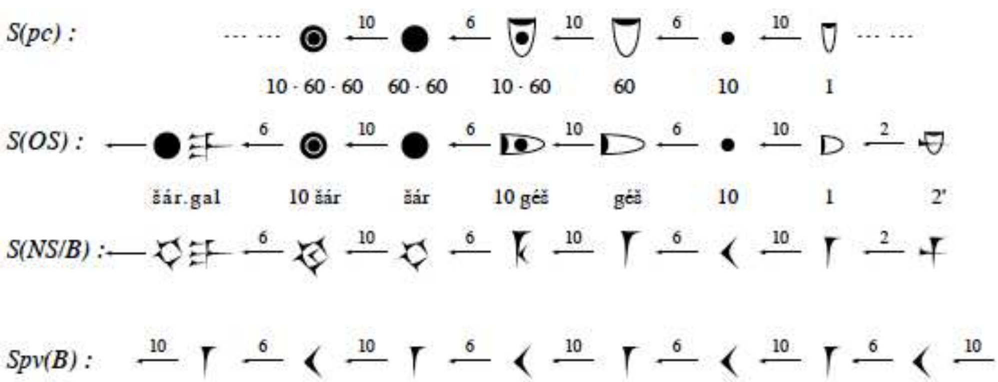
1. En skiss av utvecklingshistorien för mesopotamiska sexagesimala räknetal

Innan skriften uppfanns i Mesopotamien ungefär 3300 år f Kr så hade man i Mesopotamien med omgivande områden redan i ungefär 5000 år använt sig av små *lertecken* (så kallade tokens) för kommunikation och arkivering.[2] I den sista fasen av den här användningen så inneslöts de små lerfigurerna i *lerbollar* (bullae), ibland med indikationer om innehållet utanpå. I vissa fall kan man tolka den numeriska innebörden av de inneslutna lerfigurerna.[3] En föreslagen tolkning av *taltecken* som hör till *ett förskriftligt sexagesimalt räknetalsssystem* anges i nedanstående *faktordiagram*:

System S Sexagesimala räknetal	Förskriftliga lertecken Taltecken i protokilskrift	

Som illustreras ovan, så infördes i den allra tidigaste skriftformen, den så kallade protokilskriften, taltecken för sexagesimala enheter (ett, tio, sextio, tio gånger sextio), som försökte efterlikna motsvarande förskriftliga lertecken. Observera att i sin ursprungliga form så var det sexagesimala talsystemet ett *teckenvärdessystem*, inte ett platsvärdessystem.

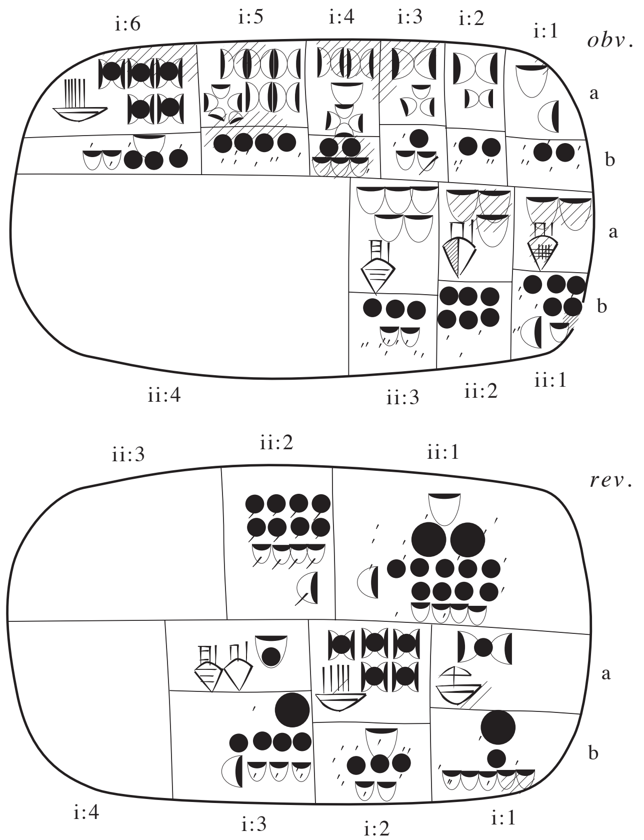
Med vissa modifikationer kom detta sexagesimala teckenvärdessystem att användas i omkring tretusen år. Utvecklingshistorien kan kortfattat beskrivas med nedanstående *faktordiagram*:



I protokilskriften är den högsta belagda sexagesimala enheten 10 · 60 · 60 (= 36,000). I den gammalsumeriska skriften (omkring mitten på 2000-talet f Kr) tillkom taltecken för 60 · 60 · 60 och för 1/2. I neo-sumerisk/gammalbabylonisk skrift (första hälften av 1000-talet f Kr) ersattes de tidigare runda formerna av taltecknen med spetsigare kilskriftstecken. Den stora förändringen kom med införandet, omkring år 2000 f Kr, av det sexagesimala *platsvärdessystemet* som bara hade speciella tecken för ental och tiotal, och som användes uteslutande för matematiska beräkningar. *Hur det egentligen gick till när platsvärdessystemet infördes är vad den här uppsatsen skall handla om.*

1. Det här är en förkortad version av en artikel med samma namn i *Aigis* 2014. *Aigis* är en nättidskrift för klassiska studier i Norden.
2. D. Schmandt-Besserat (1992) *Before Writing, vol. 1*: From Counting to Cuneiform.
3. J. Friberg (2007), *A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts*, s. 380-384.

2. En bröd-och-öl-text med tecken från fyra olika talsystem, c. 3000 f Kr



Den här texten från cirka 3000 f Kr ser ut som en vanlig administrativ protokilskriftstext men saknar personuppgifter och andra detaljer i de tre tomma facken och har orealistiskt stora och runda tal.[4] Det är troligen en övningstext från någon sorts skolundervisning. Texten innehåller uppgifter om fördelning av en mängd olika stora ransoner av bröd och öl till ett mycket stort antal personer. På framsidan (*obv.*) är brödransonerna i facken i:1a-6a räknade i *bisexagesimala tal*, med speciella tecken för 2(60) och 20(60). Ölransonerna i fack ii:1a-3a är räknade med *sexagesimala tal*, 2(60), 3(60) och 5(60). Kostnaden i kornmjöl är angivna i facken i:1b-6b och ii:1b-3b, med hjälp av "prickade" *innehållstal* i protokilskrift. På baksidan (*rev.*) är bland annat angivet det totala antalet ölransoner, i fack i:3a, nämligen 2(60)+3(60)+5(60) = 10(60).

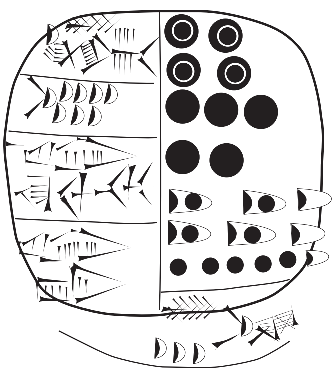
Värt att observera är att i fack i:1a är antecknat 60 av de största brödransonerna, på 1/5 c, medan i fack i:6a är antecknat 5· 2(60) = 600 av de minsta brödransonerna, på bara 1/30 c. (Här är c en godtyckligt vald beteckning för vad som antagligen var en normal månadsranson av spannmål. Alltså var 1/30 c en normal dagsranson.) Med andra ord, 600 lågavlönade får bara normala dagsransoner, medan 60 högavlönade får 6-dubbla dagsransoner.

Under hela 2000-talet f Kr var alla matematiska övningstexter från skolundervisningen, liksom det ovanstående exemplet, egentligen metro-matematiska, dvs en kombination av matematiska beräkningar och övningar i användningen av de då gängse olika måttsystemen.

4. MSVO 4, 66. R. K. Englund (1996), *Proto-Cuneiform Texts from Diverse Collections*.
J. Friberg (1999), Counting and accounting in the proto-literate Middle East, *Journal of Cuneiform Studies* 51, s. 112.

3. En gammalsumerisk (tidig dynastisk) divisionsuppgift, c. 2600 f Kr.

obv.



rev. blank

še gur_7 /	Ett spannmålsmagasin.
sìla 7 / 1 lú šu.ba.ti /	7 sìla / erhåller 1 person.
lú.bi /	Antalet personer?
$45_{\text{šár}}$ $42_{\text{géš}}$ 51 /	45(60 · 60) 42(60) 51.
še sìla 3 šu.tag_4	3 sìla korn återstår

I den här matematiska kilskriftstexten[5] är uppgiften att *fördela spannmålet i ett magasin av känd storlek i ransoner om 7 sìla* (1 sìla var ett sumeriskt innehållsmått på ungefär 1 liter) och att räkna ut hur många ransoner det blir. Storleken av magasinet som tydligen skall anses vara känd är *40(60) stor-gur, där 1 stor-gur = 8(60) sìla*. Svaret, 45(60 · 60) 42(60) 51, är givet i facket till höger, men själva uträkningen saknas.

I avsaknad av möjligheten att räkna med sexagesimala tal med platsvärde kunde uträkningen gå till så här. Observera att det här är en *algoritmisk uträkning*, där varje steg i uträkningen bygger på resultatet i det föregående steget.

10 sìla	=		1	ranson	plus	3 sìla
60 sìla	=	6 · 10 sìla =	8	ransoner	plus	4 sìla
1 stor-gur	=	8 · 60 sìla =	1(60) 8	ransoner	plus	4 sìla
10 stor-gur	=	10 · 1 stor-gur =	11(60) 25	ransoner	plus	5 sìla
60 stor-gur	=	6 · 10 stor-gur =	1(60 · 60) 8(60) 34	ransoner	plus	2 sìla
10(60) stor-gur	=	10 · 60 stor-gur =	11(60 · 60) 25(60) 42	ransoner	plus	6 sìla
40(60) stor-gur	=	4 · 10(60) stor-gur =	45(60 · 60) 42(60) 51	ransoner	plus	3 sìla

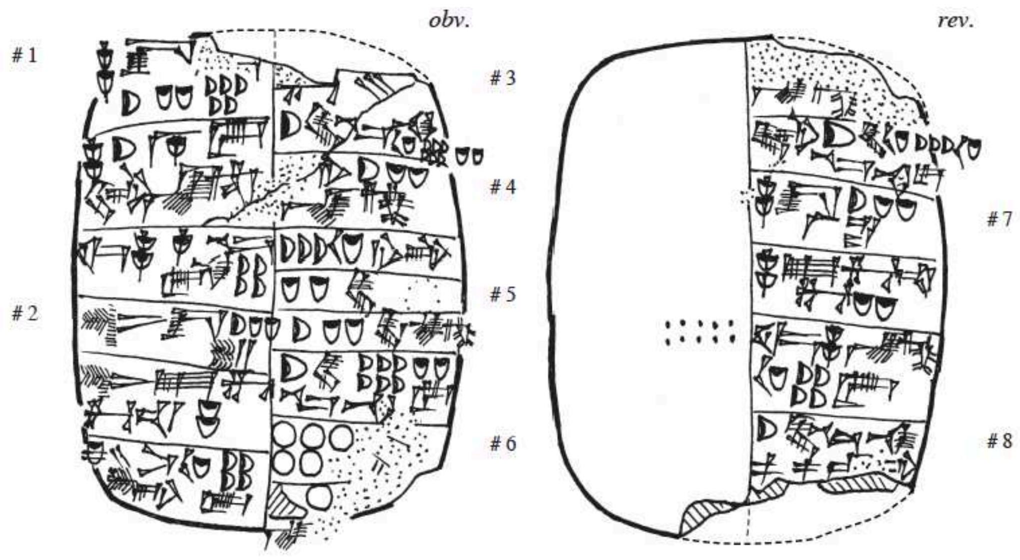
4. Den näst äldsta kända metro-matematiska tematexten, c. 2300 f Kr

Den äldsta kända metro-matematiska tematexten är en protokilskriftstext från c. 3300 f Kr, som innehåller två uppgifter av samma slag, i båda fallen att beräkna ytan av en fyrhörnig figur med kända sidor.[6] Den näst äldsta kända matematiska tematexten är från slutet av den tidiga dynastiska perioden, c. 2300 f Kr. Den ser ut som i figuren nedan:[7]

Temat för den här texten är multiplikation eller division med tal av typen 1 2/3. (Det här har egentligen ingenting med sexagesimala tal att göra, men det kommer att visa sig i avsnitt 5 nedan varför det ändå är befogat att ta med en kort diskussion av hur sådana uppgifter kunde lösas vid den nämnda tiden.) Frågorna i de olika uppgifterna är kortfattade och kryptiskt formulerade och terminologin är delvis obekant, så tolkningen av vad som egentligen avses är något osäker.

Hur som helst, i uppgift # 2, t ex, verkar frågan vara ett *divisionsproblem* av följande typ:

5. TSS 50. J. Friberg (2007), *A Remarkable Collection*, s. 414.
6. W 19408. H. J. Nissen, R. K. Englund, P. Damerow (1993), *Archaic Bookkeeping*, s. 58.
7. CUNES 52-18-035. V. Bartash (avsedd att publiceras hösten 2013), *Miscellaneous Early Dynastic and Sargonic Texts in the Cornell University Collections*.



Pottaska(?) skall anskaffas till en *marknadskvot* av 1 2/3 sìla pottaska per sìla korn. (Korn användes vid den här tiden jämte silver som betalningsmedel.) Totalt har 2 barig pottaska anskaffats.

Här är 1 barig = 6 bán, 1 bán = 6 sìla, 1 sìla = 60 shekel.

Vad var kostnaden i korn?

Den här frågan kan (med modernt uttryckssätt) omformuleras såhär: Kalla kostnaden k. Då kan k beräknas som lösning till divisionsproblemet

1 2/3 · k = 2 barig.

Det är inte troligt att man vid den här tiden kunde dividera med bråk av typen 1 2/3. Då kunde man i stället kanske omvandla ekvationen genom att multiplicera båda sidor av ekvationen med 3. Resultat:

5 k = 6 barig,

så att

k = 1/5 · 6 barig = 1 1/5 barig = 1 barig 1 1/5 bán = 1 barig 1 bán 1 1/5 sìla = 1 barig 1 bán 1 sìla 1/3 sìla 4 shekel.

Tyvärr har den som försökte lösa den här uppgiften begått ett fel och bara multiplicerat den ena sidan av ekvationen 1 2/3 · k = 2 barig med 3. Då har han i stället för den förenklade ekvationen 5 k = 6 barig fått den felaktiga ekvationen 5 k = 2 barig, vilket har lett till den felaktiga lösningen

k = 1/5 · 2 barig = 2 bán 1/5 · 2 bán = 2 bán 2 sìla 1/5 · 2 sìla = 2 bán 2 sìla 1/3 (sìla) 4 shekel korn.

Det här felaktiga svaret står antecknat i det nedersta facket i vänstra kolumnen på framsidan (*obv*.).

Uppgift # 5 är ett besläktat *multiplikationsproblem*. Givet är 2/3 mina silver, kanske ett lån eller en investering. Återbetalning skall ske med 1 2/3 shekel silver för för varje investerad shekel silver. (Här är 1 shekel = 1/60 mina.) Hur mycket får man då? Svaret är

1 2/3 · 2/3 mina = 1 2/3 · 40 shekel = 40 shekel + 26 2/3 shekel = 1 mina 6 2/3 shekel.

För en modern läsare är det något chockerande att se hur pass komplicerade lösningarna till de här två skenbart enkla uppgifterna tydligen var *i en tid när man inte utan vidare kunde dividera med bråk och när man hela tiden måste hålla reda på enheterna och omvandlingsfaktorerna i de måttsystem man arbetade med*.

5. En reciproktalstabell utan användning av sexagesimala tal med platsvärde

En ännu opublicerad lertavla[8], med det provisoriska namnet T. 2865, innehåller den tabell som är reproducerad nedan i direkt transliteration (till vänster) och i modern tolkning (till höger). Åldern på

8. Nyligen upptäckt av min samarbetspartner Farouk N. Al-Rawi.

själva lertavlan är svår att uppskatta, men antingen den eller en äldre lertavla som den kan vara en kopia av kan antas vara från den neo-sumeriska Ur III-perioden, c. 2000 f Kr, eller mera precist, strax *före uppfinnandet av sexagesimala tal med platsvärde*. (Därför är den moderna tolkningen med absoluta platsvärdetal till höger om tabellen nedan egentligen fullständigt anakronistisk.)

obv.	…	…	…	…	…	…	…	
	[igi	3 1/2 6	gál.bi	16 2/3]	rec.	3;36	16;40	
	igi	[3 2/3 5	gál.bi]	16	rec.	3;45	16	
	igi	[4	gál.b]i	15	rec.	4	15	
	igi	[4 1/2]	gál.b]i	13 [1/3]	rec.	4;30	13;20	
	igi	5	gál.bi	12	rec.	5	12	
	igi	5 1/3	gál.bi	11 15	rec.	5;20	11;15	
	igi	5 1/2	gál.bi	[10 2/3] 15	rec.	5;30	10;55	(appr.)
	igi	6	⸢gál.bi⸣	[10]	rec.	6	10	
	igi	7	⸢gál.bi⸣	[8 1/2 4]	rec.	7	8;34	(appr.)
	igi	7 12	gál.bi	[8 1/3]	rec.	7;12	8;20	
	igi	7 1/2	gál.bi	[8]	rec.	7;30	8	
	igi	8	gál.bi	[7 1/2]	rec.	8	7;30	
	igi	8 1/3	gál.bi	[7 12]	rec.	8;20	7;12	
	igi	9	gál.bi	6 [2/3]	rec.	9	6;40	
	igi	9 1/2 6	gál.bi	6 1[5]	rec.	9;36	6;15	
	igi	10	gál.bi	6	rec.	10	6	
edge	igi	10 2/3	gál.bi	5 1/2 7 1/2	rec.	10;40	5;37 30	
	igi	11 15	gál.bi	5 1/3	rec.	11;15	5;20	
	igi	12	gál.bi	5	rec.	12	5	
	igi	12 1/2	gál.bi	4 2/3 8	rec.	12;30	4;48	
rev.	igi	13 1/3	gál.bi	4 1/2	rec.	13;20	4;30	
	igi	13 1/2	gál.bi	4 1/3 6 2/3	rec.	13;30	4;26 40	
	igi	15	gál.bi	4	rec.	15	4	
	igi	16	gál.bi	3 2/3 ⸢5⸣	rec.	16	3;45	
	igi	16 2/3	gál.bi	3 1/2 ⸢6⸣	rec.	16;40	3;36	
	igi	18	gál.bi	⸢3⸣ 1/3	rec.	18	3;20	
	igi	20	gál.bi	3	rec.	20	3	
	igi	22 1/2	gál.bi	2 2/3	rec.	22;30	2;40	
	igi	24	gál.bi	2 1/2	rec.	24	2;30	
	igi	25	gál.bi	2 1/3 4	rec.	25	2;24	
	igi	26 2/3	gál.bi	2 15	rec.	26;40	2;15	
	igi	27	gál.bi	2 13 [1/3]	rec.	27	2;13 20	
	igi	30	gál.bi	2	rec.	30	2	
	igi	32	gál.bi	1 ⸢5/6⸣ 2 1/2	rec.	32	1;52 30	
	igi	36	gál.bi	1 2/3	rec.	36	1;40	
	igi	40	gál.bi	1 1/2	rec.	40	1;30	
	igi	45	gál.bi	1 1/3	rec.	45	1;20	
	igi	4[8]	gál.bi	1 15	rec.	48	1;15	
	igi	50	gál.bi	1 12	rec.	50	1;12	
	igi	53 1/3	gál.bi	1 7 ⸢1/2⸣	rec.	53;20	1;07 30	
	igi	54	gál.bi	1 6 [2/3]	rec.	54	1;06 40	
	igi	56 15	gál.bi	1 [4]	rec.	56;15	1;04	
	igi	57 1/2 6	gál.bi	1 [2 1/2]	rec.	57;36	1;02 30	
	igi	1(60)	gál.bi	[1]	rec.	1 00	1	
	igi	1(60) 12	gál.bi	⸢5/6⸣	rec.	1 12	;50	

De flesta av talen i tabellen T. 2685 är antingen *heltal* eller *heltal plus "basbråk"*. Uttrycket basbråk avser bråken 1/3, 1/2, 2/3, 5/6, de enda bråk för vilka det existerade speciella kilskriftstecken. Mera komplicerade är bråktal som 57 1/2 6, 5 1/2 7 1/2, och 1 5/6 2 1/2. Man kan lätt övertyga sig om att vad som avses i de fallen är tal av typen

57 1/2 + 6 (shekel),   5 1/2 + 7 1/2 (shekel),   1 5/6 + 2 1/2 (shekel).

Avsikten med en tabell av den här typen är helt klar. Den var avsedd att underlätta lösandet av matematiska problem av den typ som förekom i tematexten CUNES 52-18-035 i avsnitt 4 ovan, nämligen division med bråktal av typen 1 2/3. Tag t ex raden

igi 13 1/3 gál.bi 4 1/2   som kan översättas med   rec. 13 1/3 = 4 1/2,

där rec. står för 'reciproktalet till'. Vad det betyder framgår om man multiplicerar 13 1/3 med 4 1/2.

Då får man med något besvär

$13\ 1/3 \cdot 4\ 1/2 = 13 \cdot 4 + 1/3 \cdot 4 + 13 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/2 = 52 + 1\ 1/3 + 6\ 1/2 + 1/6 = 59\ 1/2\ 1/3\ 1/6 = 60.$

Av den här uträkningen kan man dra följande slutsats:

Att dividera med 13 1/3 är detsamma som att multiplicera med 4 1/2 shekel (sextiondelar).

Egentligen är det här ett anakronistiskt sätt att uttrycka saken. Några termer för "division" eller "dividera med" finns aldrig i matematiska kilskriftstexter. I stället finns det frågor av följande slag, ibland explicit framställda:

Vad skall man multiplicera 13 1/3 med för att få ett givet tal c?

Om svaret på den här frågan är b, så betyder det att

$13\ 1/3 \cdot b = c.$

Multiplicerar man båda sidor av den här ekvationen med rec. 13 1/3 = 4 1/2, så får man den ekvivalenta ekvationen

$60 \cdot b = 4\ 1/2 \cdot c$ eller $b = 4\ 1/2 \cdot 1/60 \cdot c = 4\ 1/2$ shekel $\cdot\ c$.

Den här korta diskussionen kan sammanfattas så här:

Om $13\ 1/3 \cdot b = c$, så är $b = 4\ 1/2$ shekel $\cdot\ c$.

Generellt gäller att

Om $a \cdot b = c$, så är $b =$ rec. a shekel $\cdot\ c$.

Det är nämligen lätt, om än väldigt arbetskrävande, att kontrollera att *för alla par (a, rec. a) i tabellen T. 2685 ovan, så är a · rec. a = 60.*

Ett enklare sätt att kontrollera att $a \cdot$ rec. $a = 60$ för alla par i tabellen är att tänka efter hur tabellen ursprungligen kan ha blivit konstruerad. Det kan ju knappast ha varit så att någon har prövat med alla slags komplicerade bråkuttryck om det gick att hitta motsvarande "reciproka" bråkuttryck. I stället är det troligaste att en *systematisk* konstruktion av tabellen gick till så här: Ett första steg var att hitta reciproktalen till alla lämpliga (sexagesimalt reguljära) *heltal* mellan 2 och 60, vilket är lätt gjort. Man ser nämligen omedelbart att

$2 \cdot 30 = 60$
$3 \cdot 20 = 60$
$4 \cdot 15 = 60$
$5 \cdot 12 = 60$
7 har inget exakt reciproktal
$8 \cdot 7\ 1/2 = 56 + 4 = 60$
$9 \cdot 6\ 2/3 = 54 + 6 = 60$
$10 \cdot 6 = 60$
11 har inget exakt reciproktal
$12 \cdot 5 = 60$
o s v

Man får då följande utgångstabell:

a	**rec. *a***
2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7 1/2
9	6 2/3
10	6
12	5
15	4
16	3 2/3 5
18	3 1/3

20	3
24	2 1/2
25	2 1/3 4
27	2 13 1/3
30	2
32	1 5/6 2 1/2
36	1 2/3
40	1 1/2
45	1 1/3
48	1 15
50	1 12
54	1 6 2/3
1(60)	1

25 par i steg 1

Därefter kunde man använda idén att utgå från ett känt *reciprokt par* (a, rec. a) för att konstruera ett nytt reciprokt par av typen (2/3 a, 1 1/2 rec. a) eller (1/2 a, 2 rec. a) eller (1/3 a, 3 rec. a) o s v. Vad det leder till är redovisat i tabellen nedan.

· 2/3	**· 1 1/2**	**· 1/2**	**· 2**	**· 1/3**	**· 3**	**· 15 (sh.)**	**· 4**	**· 12 (sh.)**	**· 5**
1 1/3	45								
		1 1/2	40						
2 2/3	22 1/2								
3 1/3	18	2 1/2	24	1 2/3	36	1 15	48		
								[1 12	50]
5 1/3	11 15							(1 1/2 6	37 1/2)
		4 1/2	13 1/3			2 15	26 2/3	(1 2/3 8	33 1/3)
(6 2/3	9)								
								[2 1/3 4	25]
		7 1/2	8			3 2/3 5	16		
10 2/3	5 1/2 7 1/2							(3 12	18 2/3 5)
								3 1/2 6	16 2/3
13 1/3	4 1/2								
								4 2/3 8	12 1/2
16 2/3	3 1/2 6	12 1/2	4 2/3 8	8 1/3	7 12	(6 15	9 1/2 6)		
		13 1/2	4 1/2 6 2/3			(6 2/3 5	8 5/6 3 1/3)	(5 1/3 4	11 6 2/3)
								(6 1/3 4	9 1/3 2 1/2)
								7 12	8 1/3
26 2/3	2 15								
		22 1/2	2 2/3			11 15	5 1/3		
								9 1/2 6	6 15
(33 1/3	1 2/3 8)								
								(10 2/3 8	5 1/2 3 1/3)
8 nya par (2 saknas)		7 nya par		2 nya par		4 nya par (2 saknas)		5 nya par (7 saknas)	

Det visar sig att man med den här enkla metoden kan konstruera alla utom 4 av de exakta paren i tabellen T. 2685 (plus 11 par till som av någon anledning har fallit bort i T. 2685)! Approximativa reciproktal till de icke-reguljära talen 7 och till 5 1/2 = 11/2 har sedan tillagts, kanske av pedagogiska skäl.

De fyra extra paren som inte kan beräknas med hjälp av den nämnda metoden är

53 1/3	1 7 1/2
56 15	1 4
57 1/2 6	1 2 1/2
1(60) 12	5/6

Alla fyra paren finns med mot slutet av tabellen, vilket knappast kan vara en tillfällighet. Observera att den angivna metoden inte kan producera några nya reciproka par (n, rec. n) med n större än 33 1/3. Utan de extra fyra paren hade därför tabellen blivit ganska gles mot slutet. Därför har uppenbarligen en alternativ metod använts för att konstruera några nya reciproka par nära slutet av tabellen. Vilken den alternativa metoden är är ganska uppenbart, om man observerar att

(40, 1 1/2)	=	((1 – rec. 3) · 60, 1 + rec. 2)	
(45, 1 1/3)	=	((1 – rec. 4) · 60, 1 + rec. 3)	
(48, 1 15)	=	((1 – rec. 5) · 60, 1 + rec. 4)	
(50, 1 12)	=	((1 – rec. 6) · 60, 1 + rec. 5)	
(53 1/3, 1 7 1/2)	=	((1 – rec. 9) · 60, 1 + rec. 8)	extra
(54, 1 6 2/3)	=	((1 – rec. 10) · 60, 1 + rec. 9)	
(56 15, 1 4)	=	((1 – rec. 16) · 60, 1 + rec. 15)	extra
(57 1/2 6, 1 2 1/2)	=	((1 – rec. 25) · 60, 1 + rec. 24)	extra

Här är (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (8, 9), (9, 10), (15, 16), och (24, 25) successiva så kallade *reguljära tvillingar*, med vilket menas talpar (n–1, n) där både n–1 och n är sexagesimalt reguljära, så att både rec. n–1 och rec. n existerar. Tydligen kände konstruktören av tabellen till att om n–1 och n är reguljära tvillingar, så är (1 – rec. n) · (1 + rec. n–1) = 1.[9] Det här sambandet utnyttjas för övrigt också i några gammal-babyloniska matematiska texter. Till exempel är i fyra delade trapetser i texten Ist. Si 269 längden av övre delen av långsidorna

56;15	=	(1 – rec. 16) · 60
53;20	=	(1 – rec. 9) · 60
54	=	(1 – rec. 10) · 60
55;33 20	=	(1–rec. 13;30) · 60[10]

Det återstår fortfarande att förklara varför i tabellen T. 2685 det *sista paret* är (1(60) 12, 5/6). Den intressanta förklaringen är att det *första paret* i tabellen var (1 12, 50). Just det paret är nu tyvärr förlorat på grund av skador på lertavlan, men att det fanns med vet vi ändå eftersom det var konstruerat, med utgångspunkt från paret (6, 10), nämligen som (12 (sh.) · 6, 5 · 10). Konstruktören av tabellen har tydligen velat visa att om (n, rec. n) är ett givet reciprokt par, så är också (60 · n, 1(sh.) · rec. n) ett reciprokt par. Uppenbarligen är ju

1(60) 12 = 60 · 1 12 (sh.) och 5/6 = 1 (sh.) · 50.

Avslutningsvis: Ur matematikhistorisk synvinkel är upptäckten av reciproktalstabellen T. 2685 oerhört intressant. Tabellen är en sorts *felande länk* mellan sättet att räkna i gammalbabyloniska matematiska texter och det annorlunda sättet att räkna i alla tidigare kilskriftstexter från 2000-talet f Kr, texter som inte kände till sexagesimaltal med platsvärde och som alltid var metro-matematiska i den meningen att det inte fanns några abstrakta tal utan endast antingen metrologiska tal uttryckta som kombinationer av diverse måttenheter eller sexagesimala tal för styckvis räkning. *Hela tabellen T. 2685 är ju uttryckt utan användning av några måttenheter.* Visserligen kan man visa att användandet av basbråk och shekel var hämtade från det då gällande systemet av viktmått, men det är signifikant att *användningen av själva ordet shekel var konstant undertryckt i tabellen*. Vad som nu behövdes för att komma på idén att räkna med sexagesimaltal med platsvärde var egentligen bara att *också undertrycka användningen av basbråken* och att t ex skriva 5 37 30 i stället för 5 1/2 7 1/2!

6. En sumerisk reciproktalstabell med sexagesimala platsvärdetal, c. 2000 f Kr.

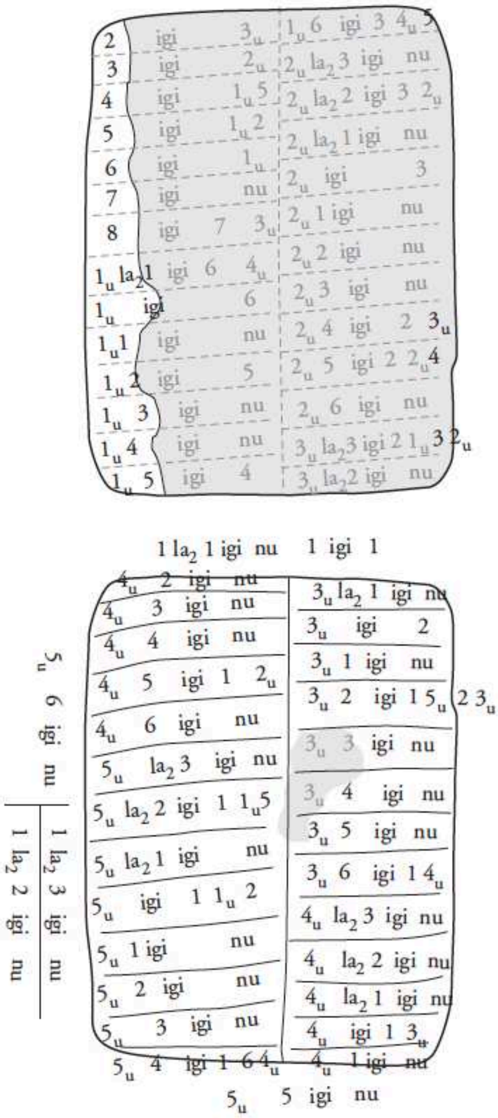
Nedan är ett exempel på hur en sumerisk reciproktalstabell kunde se ut *efter införandet av sexagesimala tal med platsvärde*.[11]

9. Med moderna beteckningar blir det här en självklarhet: (1 – 1/n) · (1 + 1/(n–1)) = (n–1)/n · n/(n–1) = 1.
10. Se J. Friberg (2007), *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*, s. 279.
11. Ist. L 7375. J. Friberg, A Geometric Algorithm with Solutions to Quadratic Equations in a Sumerian Juridical Document from Ur III Umma, *Cuneiform Digital Library Journal* 2009:3, § 4.2.1.

Reciproktalen är uträknade för *reguljära heltal* mellan 2 och 1(60). För icke-reguljära heltal står det igi nu, som är sumeriska för 'reciproktal (finns) inte'. Reguljära sexagesimala heltal är heltal som är faktorer i någon potens av 60 och därför själva, liksom 60, inte innehåller några andra primtalsfaktorer än 2, 3, och 5. Observera också att de sexagesimala platsvärdetalen inte innehåller någon information om den absoluta storleken av talen. Som i så kallande *flytande räkning* så saknas någon form av separator mellan heltalsdel och bråkdel. Därför skrivs t ex 1(60) bara som '1'. Uttryck i tabellen som 1_u o s v står för 1 u osv, där u är sumeriska för 'tio'.

De sex sista raderna i tabellen är skrivna runt omkring på kanterna av lertavlan. De är:

5_u5 igi nu	55 reciproktal (finns) inte		
5_u6 igi nu	56 reciproktal (finns) inte		
1 la_2 3 igi nu	1 – 3 reciproktal (finns) inte	(vad som avses är	1(60) – 3 = 57)
1 la_2 2 igi nu	1 – 2 reciproktal (finns) inte	(vad som avses är	1(60) – 2 = 58)
1 la_2 1 igi nu	1 – 1 reciproktal (finns) inte	(vad som avses är	1(60) – 1 = 59)
1 igi 1	1 reciproktal 1	(vad som avses är	1(60) = 60)



I senare, *gammalbabyloniska* reciproktalstabeller ser de två första raderna i en reciproktalstabell i regel ut såhär, i ungefärlig översättning

Av 60 är 2/3 lika med 40, och hälften är lika med 30.

Av det kan man dra slutsatsen att det fortfarande egentligen antogs att produkten av ett tal och dess reciproktal skulle vara lika med 60, precis som i den äldre typen av reciproktalstabell i avsnitt 5 ovan. Dessutom är alla rader av typen *n* igi nu '*n* reciproktalet (finns) inte' borttagna i gammalbbyloniska reciproktalstabeller, och tabellerna fortsätter ända till det reciproka paret (1 21, 44 26 40).

7. En gammalbabylonisk algoritm för beräkning av mångsiffriga reciproka par

Det finns ett antal gammalbabyloniska matematiska texter som inte innehåller några mått alls utan bara sysslar med abstrakta sexagesimala platsvärdetal. Exempel är intressanta beräkningar av kvadratroten ur givna tal som produkten av kvadratrötterna ur faktorerna i talen eller beräkningar av reciproktalen till givna reguljära sexagesimaltal som produkten av reciproktalen till faktorerna i talen.

Ännu intressantare är algoritmer för konstruktionen av nya par av reciproka reguljära sexagesimaltal med utgångspunkt från redan kända sådana par. Metoden är en vidareutveckling av den metod som användes redan för konstruktionen av reciproktalstabellen T. 2865 i avsnitt 7 ovan.

En sådan algoritm finns med i texten CBS 1215, [12] som nedan är avbildad i transliteration:

i		ii		iii		vi		v		iv	
2 05	12	8 53 20	18	6 45	1 20	10 06 48 53 20	18	2 31 42 13 20	18	6 19 41 15	4
25	2 24	2 40	22 30	9	6 40	3 02 02 40	22 30	45 30 40	1 30	25 18 45	16
28 48	1 15	6 45	1 20	8 53 20		1 08 16	3 45	1 08 16	3 45	6 45	1 20
36	1 40	9	6 40	2 22 13 20		4 16	3 45	4 16	3 45	9	6 40
2 05		8 53 20		4 44 26 40	9	16	3 45	16	3 45	8 53 20	
4 10	6	17 46 40	9	42 40	22 30	14 03 45		14 03 45		2 22 13 20	
25	2 24	2 40	22 30	16	3 45	52 44 03 45		52 44 03 45		9 28 53 20	
14 24	2 30	3 22 30	2	1 24 22 30		19 46 31 24 22 30		1 19 06 05 37 30		18 57 46 40	
36	1 40	6 45	1 20	12 39 22 30	2	5 55 57 25 18 45	16	23 43 49 41 15	4	37 55 33 20	18
4 10		9	6 40	25 18 45	16	1 34 55 18 45	16	1 34 55 18 45	16	11 22 40	22 30
8 20	3	8 53 20		6 45	1 20	25 18 45	16	25 18 45	16	4 16	3 45
25	2 24	17 46 40		9	6 40	6 45	1 20	6 45	1 20	16	3 45
7 12	5	35 33 20	18	8 53 20		9	6 40	9	6 40	14 03 45	
36	1 40	10 40	1 30	2 22 13 20		8 53 20		8 53 20		5 16 24 22 30	
8 20		16	3 45	4 44 26 40		2 22 13 20		2 22 13 20		1 34 55 18 45	16
16 40	9	5 37 30		9 28 53 20	18	37 55 33 20		37 55 33 20		25 18 45	16
2 30	24	1 41 15	4	2 50 40	1 30	10 06 48 53 20		2 31 42 13 20		6 45	1 20
3 36	1 40	6 45	1 20	4 16	3 45			5 03 24 26 40	9	9	6 40
6	10	9	6 40	16	3 45			45 30 40	1 30	8 53 20	
16 40		8 53 20		14 03 45				1 08 16	3 45	2 22 13 20	
33 20	18	35 33 20		21 05 37 30				4 16	3 45	37 55 33 20	
10	6	1 11 06 40	9	6 19 41 15	4			16	3 45	1 15 51 06 40	9
1 48	1 15	10 40	1 30	25 18 45	16			14 03 45		11 22 40	22 30
2 15	4	16	3 45	6 45	1 20			52 44 03 45		4 16	3 45
9	6 40	5 37 30		9	6 40			1 19 06 05 37 30		16	3 45
26 40		50 37 30	2	8 53 20				11 51 54 40 37 30	2	14 03 45	
33 20		1 41 15	4	2 22 13 20				23 43 49 41 15	4	5 16 24 22 30	
1 06 40	9	6 45	1 20	9 28 53 20				1 34 55 18 45	16	47 27 39 22 30	2
10	6	9	6 40	18 57 46 40	9			25 18 45	16	1 34 55 18 45	16
54	1 06 40	8 53 20		2 50 40	1 30			6 45	1 20	25 18 45	16
2 13 20	18	35 33 20		4 16	3 45			9	6 40	6 45	1 20
40	1 30	1 11 06 40		16	3 45			8 53 20		9	6 40
27	2 13 20	2 22 13 20	18	14 03 45				2 22 13 20		8 53 20	
4 26 40	9	42 40	22 30	21 05 37 30				37 55 33 20		2 22 13 20	
40	1 30	16	3 45	3 09 50 37 30	2			2 31 42 13 20		37 55 37 55 33 20	
13 30	2	1 24 22 30						5 03 24 26 40		1 15 51 06 40	
27	2 13 20	25 18 45	16								
4 26 40											

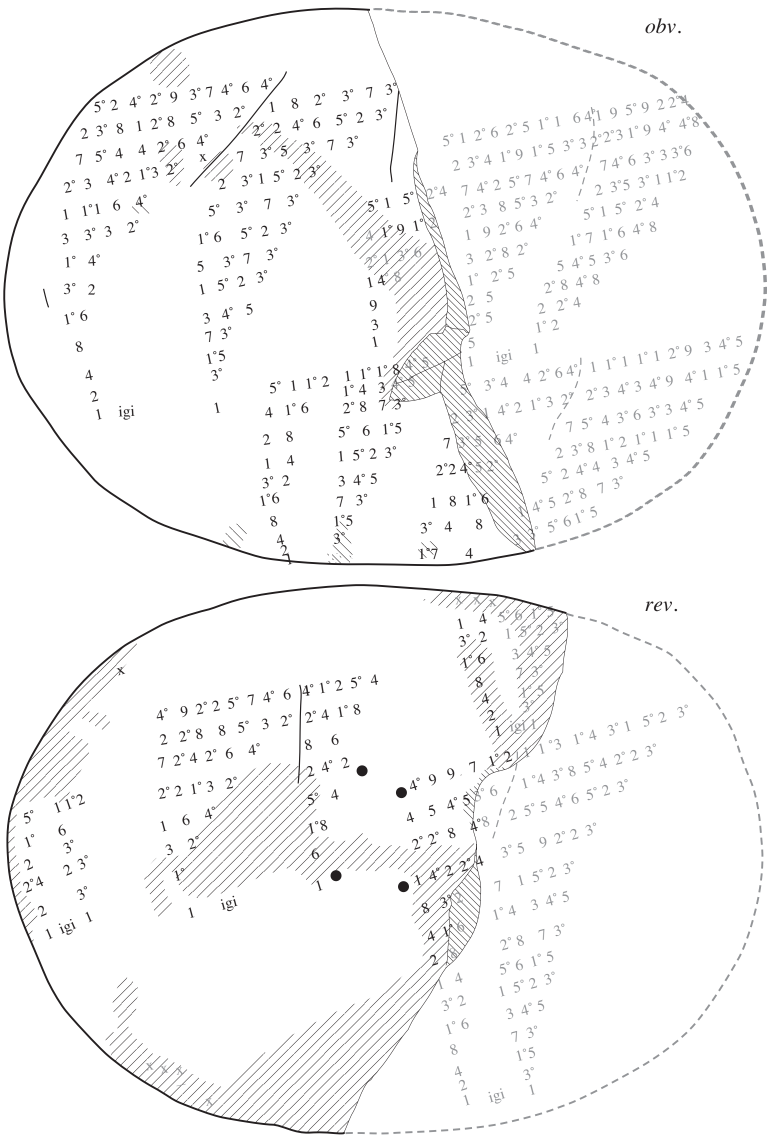
12. J. Friberg (2007), *A Remarkable Collection*, Appendix 3.

Utgångspunkten är det reciproka paret (2 05, 28 48), där 2 05 (= 125) = 5 · 5 · 5. I det första facket i kolumn i räknas det ut med en intelligent algoritm att rec. 2 05 = 28 48 och att rec. 28 48 = 2 05. I nästa fack är 2 05 fördubblat och 28 48 halverat. Resultatet blir det nya reciproka paret (4 10, 14 24). Med samma algoritm som förut räknas det ut att rec. 4 10 = 14 24 och att rec. 14 24 = 4 10. O s v, tills i det sista facket, i kolumn vi, visas att rec. 10 06 48 53 20 = 5 55 57 25 18 45 och vice versa.

Uppenbarligen har man här kommit mycket långt från använd matematik och räkning med mått och absoluta (dvs icke flytande) tal!

8. Sexagesimala tal i senbabyloniska matematiska texter

Ett antal senbabyloniska texter från den senare hälften av det första årtusendet f Kr återupptog och vidareutvecklade de nämnda gammalbabyloniska algoritmiska metoderna för beräkning av reciproktalen till givna reguljära sexagesimala platsvärdetal eller för den systematiska konstruktionen av enormt omfångsrika reciproktalstabeller med mångsiffriga reguljära sexagesimaltal.[13]



13. J. Friberg (under arbete), *New Mathematical Cuneiform Texts*, Kap. 1-2.

Ett intressant fall är W 23021[14] (ovan). Det är en skoltext från den achaemenidiska (persiska) perioden i Mesopotamien, c. 450 f Kr, som innehåller flera algoritmiska uträkningar av reciproktal som produkten av reciproktalen till faktorerna i det givna talet. Det är precis samma metod som i den gammalbabyloniska texten CBS 1215 i föregående avsnitt. Den första beräkningen, t ex, på W 23021 visar att rec. 52 40 29 37 46 40 = 1 08 20 37 30. Beräkningen går till så att först elimineras alla faktorer i det givna talet, en efter en, i en vänsterkolumn, och därefter multipliceras reciproktalen till de eliminerade faktorerna med varandra, ett efter ett, i högerkolumnen.

14. J. Friberg (1999), A Late Babylonian factorization algorithm for the computation of reciprocals of many-place sexagesimal numbers, *Baghdader Mitteilungen* 30, 139-161, 2 pl.

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING

Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 24 september 2013

1. Längs en lång vandringsled finns markeringar för antalet passerade kilometer efter varje kilometer, med början vid starten där det står markering 0. En vandrare som börjar gå vid vandringsledens start ägnar sig åt att räkna siffrorna i dessa markeringar. Hur många kilometer har vandraren gått vid den kilometermarkering som innehåller den 2013:e siffran?

2. I en stad som ligger på gränsen mellan två länder kan man fritt använda ländernas respektive valutor daler och mark. Dag köar bakom två flickor och tre pojkar vid en biograf. Han noterar att flickorna betalar sina båda biljetter med en tiodalerssedel och får åtta mark tillbaka. Pojkarna betalar sina tre biljetter med en trettiomarkssedel och får nio daler tillbaka. Dag lyckas betala för sin biljett med jämna pengar genom att enbart använda endalersmynt och enmarksmynt. Hur många mynt av vardera slaget behöver han för detta?

3. Två koncentriska cirklar (det vill säga två cirklar med samma medelpunkt) har radier a och b, där $b > a$. Låt PQ vara en diameter i den större cirkeln. En linje genom Q tangerar den mindre cirkeln i punkten T. Bestäm längden av sträckan PT uttryckt i a och b.

4. På ett papper har Ida på en rad skrivit 27 positiva heltal, ordnade efter storlek. Det första talet är 1 och det sista är 25. Ida berättar för Emil att summan av samtliga tal är 127, att summan av de nio första talen är 21, samt att summan av de nio sista talen är 65. Räcker den informationen för att Emil ska kunna avgöra vilket tal det är som står i mitten?

5. Låt a och b vara positiva heltal. Betrakta de ab punkter med heltalskoordinater (i, j) som uppfyller $0 \leq i < a$ och $0 \leq j < b$. Var och en av dessa punkter färgas i en av k, $k \geq 2$, olika färger som är numrerade från 0 till $k - 1$. I punkten med koordinater (i, j) ges färgens nummer av resten vid heltalsdivision av $i+j$ med k. Om varje färg förekommer i lika många punkter, visa att minst ett av talen a och b är jämnt delbart med k.

6. Punkterna P, Q, R är valda på sidorna BC, CA, AB i en triangel ABC på ett sådant sätt att PQ, QR, RP delar triangeln ABC i fyra likformiga trianglar. Visa att åtminstone två av dessa måste vara kongruenta (det vill säga likformiga och lika stora). Ge också ett exempel (med motivering) som visar att alla fyra inte behöver vara kongruenta.

Skrivtid: 5 timmar Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Lösningar

1. De ensiffriga talen bidrar med 10 siffror och motsvarar nio passerade kilometer. De tvåsiffriga innehåller tillsammans 180 siffror. När man passerar skylten med 99, som är det största tvåsiffriga talet, har man gått totalt $9 + 90 = 99$ km. Alla tresiffriga tal tillsammans innehåller $3 \cdot 900 > 2013$ siffror. Alltså har man då man passerar skylten med den 2013:e siffran gått ett tresiffrigt antal kilometer. Vi har

$$2013 = 10 + 180 + 6 \cdot (3 \cdot 100) + 3 \cdot 7 + 2,$$

vilket betyder att man vid skylten med den 2013:e siffran passerat

$$9 + 90 + 6 \cdot 100 + 7 + 1 = 707 \text{ kilometer.}$$

2. Låt b, d, m vara en biljetts, en dalers och en marks värde, uttryckt i en tredje valuta (till exempel SEK), respektive. Informationen om flickornas och pojkarnas köp av biljetter ger ekvationerna

$$2b = 10d - 8m, \quad \text{och} \quad 3b = 30m - 9d,$$

eller, efter förkortning med 2 respektive 3,

$$b = 5d - 4m, \quad \text{och} \quad b = 10m - 3d$$

Vi vill ha ett uttryck för b på formen $b = km + ld$, där k och l är icke-negativa heltal. Om vi eliminerar b ur de två ekvationerna får vi $8d - 14m = 0$, eller, efter förkortning, $4d = 7m$. Den första ekvationen ger nu

$$b = 5d - 4m = 4d + d - 4m = 7m + d - 4m = 3m + d.$$

Vi ska visa att någon annan myntkombination inte är möjlig. Vi fick att förhållandet $4d = 7m$ måste gälla, alltså gäller $d = \frac{7}{4}m$, $m = \frac{4}{7}d$, och $b = \frac{19}{4}m = \frac{19}{7}d$. Biljetten kan alltså inte köpas med enbart markmynt eller enbart dalermynt. Antag att det finns en annan möjlig myntkombination, $b = km + ld$, där $k, l > 0$. Att det är en annan kombination betyder att $k \neq 3$, och $l \neq 1$, det vill säga $k \neq 3$, och $l > 1$. Men, om $l > 1$, så måste $k < 3$, alltså måste vi ha $k = 1$ eller $k = 2$. För $k = 1$ får vi $b = m + ld = \frac{19}{4}m$, alltså $ld = \frac{15}{4}m = \frac{15}{7}d$, vilket är omöjligt, då l är ett heltal. På samma sätt visas att k inte kan vara 2.

Dag behöver alltså tre enmarksmynt och ett endalersmynt för att köpa sin biljett.

3. Beteckna med O den gemensamma medelpunkten för de två cirklarna, och beteckna med S punkten i vilken linjen QT skär den stora cirkeln (en andra gång). Vi har att $\angle OTQ = 90°$, eftersom QT är tangent och därmed vinkelrät mot radien OT. Samtidigt gäller $\angle PSQ = 90°$, eftersom randvinkeln är hälften så stor som medelpunktsvinkeln på samma båge och PQ är en diameter. Vi får att $OT \| PS$, och att trianglarna PSQ och OTQ är likformiga enligt topptriangelsatsen. Eftersom $|PQ| = 2|OQ| = 2b$, kan vi dra slutsatsen att $|PS| = 2|OT| = 2a$. Pythagoras sats för den rätvinkliga triangeln OTQ ger

$$|SQ| = 2|TQ| = 2\sqrt{b^2 - a^2},$$

så att $|ST| = \sqrt{b^2 - a^2}$. Slutligen använder vi Pythagoras sats en gång till, den här gången för den rätvinkliga triangeln PST, och får

$$|PT| = \sqrt{(2a)^2 + (b^2 - a^2)} = \sqrt{3a^2 + b^2}.$$

Alternativ lösning: Man kan använda cosinussatsen på triangeln PTQ eller triangeln POT. Här följer resonemanget för $\triangle PTQ$: från den rätvinkliga triangeln OTQ får vi att $\cos \angle TQO = \dfrac{|TQ|}{b} = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, vilket tillsammans med $\angle TQO = \angle TQP$ ger

$$|PT|^2 = 4b^2 + |TQ|^2 - 2 \cdot 2b \cdot |TQ| \cdot \frac{|TQ|}{b} = 4b^2 - 3\,|TQ|^2 = 3a^2 + b^2.$$

4. Låt oss först notera att Ida har skrivit upp 27 tal mellan 1 och 25, vilket betyder att vissa av talen måste vara lika.

   Vi börjar med att bestämma summan S_{mitt} av de nio tal som står i mitten, den kommer att vara $S_{\text{mitt}} = 127 - 21 - 65 = 41$. Kalla det första (och därmed minsta) av dessa nio tal för a och det sista (och största) för $a + s, s \geq 0$. Det första och minsta av de sista nio talen måste vara minst $a + s$. Det sista är 25, så att $8(a + s) + 25 \leq 65$, och följaktligen gäller $8(a + s) \leq 40$, och $a + s \leq 5$. Om vi istället tittar på de första nio talen, så vet vi att det första av dem är 1, och att de alla kan vara högst a. Det ger $1 + 8a \geq 21$, så att $8a \geq 20$, vilket ger $a \geq 3$ (kom ihåg att a och s är heltal). De nio talen i mitten, och därmed talet i mitten, kan alltså vara $3, 4$ eller 5.

   Titta nu på de nio talen i mitten. Summan av de fyra sista av dem kan vara högst 20, så att summan av de fem första måste vara minst 21. Om talet i mitten, det vill säga det största av de fem, är fyra, så kan summan vara högst 20. Talet i mitten måste alltså vara 5. Emil skulle alltså kunna avgöra vilket tal det är som står i mitten med hjälp av den information han får från Ida.

Alternativt kan man resonera sig fram med hjälp av medelvärden. Eftersom medelvärdet av de nio talen i mitten är $\frac{41}{9}$, och $4 < \frac{41}{9} < 5$, så måste det minsta av de nio vara högst 4 och det största minst 5. Det minsta av de sista nio talen måste då vara minst 5, och eftersom medelvärdet av de åtta första av de nio är 5, så måste alla åtta vara lika med 5. Det största av de nio talen i mitten är alltså 5. Resonemanget fortsätter sedan som ovan.

Det går att hitta 27 tal som uppfyller villkoren i uppgiften, här kommer ett exempel:

$$1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 25.$$

5. Antag att k delar varken a eller b. Om vi väljer k på varandra följande punkter i en rad eller i en kolumn, så kommer varje färg att förekomma exakt en gång. Det betyder att vi kan stryka k på varandra följande kolumner eller rader åt gången, och fortfarande få en rektangulär uppsättning av punkter sådan att varje färg förekommer i lika många punkter. Antagandet om icke-delbarhet garanterar att processen kommer att sluta med en uppsättning av cd punkter med koordinater (i, j), där $0 \leq i < c,\ 0 \leq j < d$, och $1 \leq c \leq k-1,\ 1 \leq d \leq k-1$. Varje färg kommer att förekomma högst en gång i varje rad och högst en gång i varje kolumn. I varje rad kommer det att fattas minst en färg, eftersom kolumnerna är färre än k. Å andra sidan, eftersom raderna är färre än k medan färgerna är exakt k och de förekommer cykliskt, kommer det att finnas minst en färg som inte fattas i någon rad. En sådan färg kommer att förekomma fler gånger än de färger som fattas i någon rad, vilket är en motsägelse. Motsägelsen visar att minst ett av talen a och b är delbart med k.

6. Kalla den ursprungliga triangelns vinklar vid A, B, C för α, β, γ, respektive. Villkoret om likformighet betyder att alla fyra trianglarna är likformiga med den givna triangeln. Vi ska visa att minst två av sträckorna PQ, QR, RP måste vara parallella med sidor i triangeln.

   Betrakta först fallet när alla tre vinklarna α, β, γ är olika. Antag att två av sträckorna inte är parallella med sidor i $\triangle ABC$. Utan inskränkning kan vi anta att det är RP och QR. Att RP inte är parallell med CA betyder att $\angle BPR \neq \gamma$; eftersom den inte heller kan vara $\beta = \angle RBP$, får vi att $\angle BPR = \alpha$. Följaktligen har vi $\angle BRP = \gamma$. På samma sätt får vi att $\angle ARQ = \gamma$. Eftersom den givna triangelns tre vinklar är olika medför det att $\angle PRQ$ inte kan vara α eller β om summan av de tre vinklarna $\angle ARQ, \angle PRQ, \angle BRP$ med spets i R ska bli $180°$. Den enda möjligheten är att $\angle PRQ = \gamma = \angle ARQ = \angle BRP\,(= 60°)$. Men då kan ingen av vinklarna med spets i P och Q vara γ, vilket betyder att summan av vinklarna med spets i P och av dem med spets i Q inte kan vara $180°$. Motsägelsen visar att minst två av sträckorna PQ, QR, RP måste vara parallella med sidor i triangeln.

Betrakta nu fallet när två av vinklarna är lika, till exempel $\alpha = \beta$. Triangeln QPC har vinkel γ vid C, alltså måste de två återstående vinklarna vara α, och det följer att $PQ \| AB$. Om QR inte är parallell med BC, får vi att $\angle AQR = \alpha$, $\angle RQP = \gamma$, $\angle QPR = \alpha$, så att $\angle RPB = \gamma$, och $RP \| CA$.

Utan inskränkning kan vi anta att $RP \| CA$ och $PQ \| AB$. Då är fyrhörningen $ARPQ$ en parallellogram, och diagonalen QR delar den i två kongruenta trianglar, och påståendet är bevisat. Om även den tredje sträckan är parallell med motsvarande sida, blir de fyra små trianglarna kongruenta (det inträffar om och endast om P, Q, R är mittpunkter på respektive sida).

Som exempel på ett fall när exakt två av de små trianglarna är kongruenta, betrakta den rätvinkliga triangeln med hörn i punkterna $A(0,0), B(5,0), C(0,10)$. Välj $P(4,2), Q(0,2), R(4,0)$. De fyra små trianglarna är då rätvinkliga med förhållande $2:1$ mellan den längre och den kortare kateten. De är alltså likformiga. Fyrhörningen $ARPQ$ är en rektangel som av diagonalen QR delas i två kongruenta rätvinkliga trianglar. Dessa har dock dubbelt så långa sidor som triangeln RBP. Det är alltså exakt två av de fyra trianglarna som är kongruenta. Notera att punkterna B, P, C ligger på den räta linjen med ekvation $2x + y = 10$, det vill säga punkten P ligger verkligen på sidan BC och villkoren i uppgiften är uppfyllda.

Litteratur

Bernard Beauzamy: Archimedes' Modern Works

Thomas Weibull

Archimedes (287? – 212 fvt) var både matematiker (enligt många, bl.a. denna boks författare, den störste någonsin), fysiker, ingenjör och konstruktör av krigsmaskiner (där dock det spektakulära spegelsystemet för att bränna romerska skepp lär vara apokryfiskt, testat bl.a. av MIT och MythBusters (2 gånger)).

Bernard Beauzamy (1949 –) är matematiker, doktor 1976 under Laurent Schwarz, verksam i funktionalanalys, professor i Lyon 1979–1995, handledare för 23 doktorsavhandlingar, författare till flera läroböcker. 1995 lämnade han den akademiska världen, att döma av sidokommentarer i boken och den avslutande satiren "Syrakusas moderna belägring" utan saknad men med en viss kvardröjande bitterhet, och startade företaget Société de Calcul Mathématique S.A. Där ägnar han sig åt "verklighetens matematik", "Real Life Mathematics", vilket både är titeln på den bokserie som SCM ger ut och på det föredrag om sin verksamhet han höll vid invigningen av Dublins matematiska sällskap 2001. Man kan se varför han ser Archimedes som en inspirationskälla.

Boken inleds med en kort historik och avslutas med en liten samling historiska dokument, bl.a. Ciceros redogörelse för hur han år 75 fvt (den ärade läsaren får själv fundera ut hur Cicero kunde veta det) återfann Archimedes' grav med den berömda gravstenen, med en sfär inskriven i en cylinder, knappt uppstickande ur ett buskage, och framhöll för syrakusarna att de borde vårda sig om sin störste medborgare. Idag är graven åter förlorad, och Beauzamys brev till stadens borgmästare föreslående ett lämpligt minnesmärke, t.ex. ett museum, har förblivit obesvarat.

Bokens huvudinnehåll består av två delar.

Den första behandlar Archimedeskartor och Archimedesavbildningar, där det första begreppet är en partition av ett område med ett givet mått i delområden som alla har samma mått medan det andra är måttbevarande (upp till en konstant faktor, men det förefaller vara en betydelselös generalisering eftersom man kan ändra det ena måttet med faktorn ifråga) homeomorfismer mellan områden med givna mått. Inspirationen kommer från Archimedes' beräkning av sfärens area, som Beauzamy ger i detalj, eller mera generellt, arean av en sfärisk kalott. För att beskriva den, låt sfären ha en lodrät axel och skär sfären med ett plan vinkelrätt mot axeln. Den sfäriska kalotten har då area $2\pi Rh$, där R är sfärens radie och h kalottens höjd (avståndet från nordpolen till planet; h kan ta alla värden mellan 0 och $2R$, där det sista ju ger hela sfären). Archimedes ger dock arean som lika stor som en cirkelskiva med radie lika med avståndet (det rätlinjiga, inte längs sfärens yta) från nordpolen till den latitudcirkel i vilken planet skär sfären. Dessa framställningar är ekvivalenta, eftersom en enkel kalkyl ger att kvadraten på det avståndet är just $2Rh$. Beauzamy noterar, vilket tydligen ingen tidigare gjort, att denna betraktelse ger en areabevarande avbildning från övre halvsfären till en plan cirkelskiva med radie R, vilket ingenting annat är än Lamberts azimutala ytriktiga projektion, 2000 år senare. (Tillåt recensenten reflektionen att det först nämnda uttrycket för kalottarean svarar mot Lamberts cylindriska ytriktiga projektion, vilket ger en direkt illustration av Archimedes' omhuldade resultat att sfären har samma area som mantelytan av den omskrivna räta cirkulära cylindern.) Tillämpningen är att Archimedeskartor kan komma till användning i många olika sammanhang såsom resursallokering (skol- och hälsoservice, elförsörjning, avfallshantering,…) och placering av stationer för övervakning eller kontroll (vattenkvalitet i en flod, luftkvalitet, brandförsvar,…) medan Archimedesavbildningar kan användas för att överföra ett mer komplicerat område (t.ex. en karta över Frankrike) till ett enklare (t.ex. en kvadrat eller cirkelskiva).

Den andra huvuddelen behandlar Archimedes' metod sådan han beskrev den i ett brev till Eratosthenes. Den finns i Archimedes' palimpsest som, kort och inexakt beskrivet, återupptäcktes först 1906 och sedan försvann igen tills 1998. Metoden går ut på att använda jämviktsbetraktelser baserade på hävstångsprincipen för att göra matematiska beräkningar, där det berömda exemplet är Archimedes' beräkning av klotets volym. Archimedes själv såg dock denna metod endast som heuristisk och genomförde även ett bevis baserat på uttömning i enlighet med den grekiska traditionen; f.ö. helt analogt med den metod för beräkning av sfärens area som Beauzamy redovisar, Beauzamy ger egna beräkningar, med Archimedes' jämviktsmetod, av tyngdpunkten och volymen hos en (homogen) rät cirkulär kon; båda dessa resultat var kända för Archimedes, det senare från Euklides och användes i beräkningen av klotvolymen, medan något bevis för det förra inte är känt. Resten av boken behandlar ett antal olika områden, hur robust metoden är vid osäkerhet i indata, tolkning av probabilistiska begrepp i termer av mekaniska, lösning av polynomekvationer, optik: Snells lag tolkad som en jämviktsekvation samt icke-förstörande provning. Här har dock Archimedes' metod abstraherats till att betyda att bestämma en okänd kvantitet i termer av en känd sådan, snarare än att söka en formel för den okända kvantiteten. Beauzamy raljerar över nutidens förkärlek för formler, vilket alla som mött nybörjarstudenter kan sympatisera med, och hävdar att sådana i allmänhet är mindre robusta. Jag förmodar att de områden han tar upp är inspirerade av verksamheten vid SCM (som är omfattande - se deras hemsida) och tycker att i så fall framställningens värde ökat om han givit mer konkreta exempel på de tillämpningar de gjort.

Att Archimedes inte använde formler kan dock (även) förklaras av att sådana helt enkelt inte fanns tillgängliga då; han hade inte ens positionssystemet för hela tal. Bristen på en lämplig notation gör hans prestationer än märkligare.

Beauzamy menar också att Archimedes inte fått tillräcklig uppskattning som föregångare för infinitesimalkalkylen. Jag är inte övertygad: att åtminstone integralbegreppet är en direkt arvtagare till uttömningsmetoden är väl allmänt accepterat.

Boken är skriven på en lättflytande engelska, men här och där syns det att den är av en fransman: "conference" i st.f. "lecture", "application" (detta hemska ord som invaderat vårt svenska språk via teknikens landvinningar, på min tid fanns applikationer i textilslöjden) i st.f. "mapping" eller "transformation", "Snell-Descartes' Law" i st.f. "Snell's Law" (kanske dock historiskt korrekt?) för att ta några exempel, samt att innehållsförteckningen står sist i boken.

Bernard Beauzamy: Archimedes' Modern Works
på engelska, 220 sidor
Real Life Mathematics, Société de Calcul Mathématique S.A. 2012
ISBN 978-2-9521458-7-9

Det levande teoremet av Cédric Villani

Per-Anders Ivert

Den 40-årige franske matematikern Cédric Villani har skrivit en märklig bok med titeln *Théorème vivant*. Den tyskspråkiga utgåvan, *Das lebendige Theorem*, fann jag i en bokhandel här i Berlin (i avdelningen för skönlitteratur), och det är alltså den tyska översättningen jag har läst. Boken berättar historien om satsen om Landaudämpning av Villani och hans tidigare elev Clément Mohout samt om Villanis väg till Fieldsmedaljen (2010). Skildringen är nog avsedd för icke-matematiker, men där förekommer ändå mycket som torde vara obegripligt för dessa. Somligt är t.ex. skrivet i TEX-kod. Ändå bör den kunna intressera och fascinera en intellektuellt intresserad allmänhet.

Det trodde jag inte när jag började läsa boken. Jag närmade mig den med skepsis. Omslaget pryds av en bild av författaren, klädd på sitt karakteristiska, uppseendeväckande vis och med en brosch i form av en spindel (han bär alltid en spindelbrosch). Man får lätt intrycket att man här har att göra med en posör, och detta intryck förstärks en smula av de första kapitlen. Historien börjar i protagonistens (i detta fall författaren) arbetsrum på École Normale Supérieure i Lyon, där han befinner sig i en diskussion med sin medarbetare Clément Mohout. Man enas om att påbörja ett djärvt forskningsprojekt i regularitetsteori; att finna ett matematiskt bevis för den s.k. Landaudämpningen inom plasmafysik. Exakt vad detta betyder är det inte nödvändigt för läsaren att veta. Skildringen av diskussionen störs av en artificiell övertydlighet, fastän ämnet för den är otillgängligt för gemene man. Det läggs in onödiga förklarande bisatser, yttranden som säkert inte fälldes i verkligheten utan som har lagts till för utomståendes skull. Det händer ju ibland att man hör två personer diskutera, formellt med varandra, men man märker av sidoblickar och uttryckssätt att de egentligen talar till omgivningen. Det kan ge ett fånigt intryck, och lite av den känslan kan man få av inledningskapitlen till denna bok.

I fortsättningen skildras föredrag, korrespondens samt möten och diskussioner med kolleger. Här och där visas utdrag ur matematiska arbeten. När man efter ett tag upptäcker berättelsens struktur blir läsningen njutbarare. De flesta kapitel avslutas med ett kursiverat avsnitt som ger den historiska bakgrunden till de personer, händelser eller fenomen som behandlats i kapitlet. Bokens mittparti handlar om Villanis vistelse i Princeton, och man får ta del av korrespondensen mellan honom och samarbetspartnern Mohout hemma i Frankrike. I periferin anar vi också författarens hustru och barn och deras tillvaro i Amerika. Villani och Mohout arbetar på ett ambitiöst projekt; en sats om Landaudämpning. Manuskriptversionerna avlöser varandra och till slut anser man sig mogen att sända in en version till Acta Mathematica. Parallellt med detta får man ta del av författarens tankar om litteratur, musik och livet i allmänhet men också om hans hemliga tankar om möjligheterna att få en Fieldsmedalj. Tiden rinner undan, aspiranter får inte ha fyllt mer än fyrtio år vid början av året för prisutdelningen. Att tänka på medaljen känns syndigt och det är inte något man talar om.

I Princeton nås författaren av refuseringsbrevet från Acta. Experterna har funnit oklara punkter. Intensiva diskussioner mellan författarna tar vid. Ett enormt arbete; manuskriptet är på 180 sidor.

Villani erbjuds och accepterar posten som föreståndare för Institut Henri Poincaré i Paris. Väl hemma, och installerad i Paris, får han ett telefonsamtal från Fieldskommitténs ordförande som meddelar att han kommer att tilldelas medaljen. Dock tillhålls han att tiga om saken i de sex månader som återstår, något som han med en viss ansträngning lyckas uppfylla. Snart efter prisutdelningen fullbordas triumfen genom att Acta Mathematica antar det omarbetade manuskriptet. Därmed har hela historien nått ett lyckligt och berättelsen avslutas med ett återgivande av den stora satsen på två sidor.

Jag måste erkänna att min inledande skepsis försvagades mer och mer under läsningens gång, och efter cirka halva boken fick jag kapitulera och erkänna att detta var intressant och spännande. Framställningen är sympatisk. Den som deltagit i matematisk forskning på internationell nivå och som har bevistat konferenser känner igen miljön och stämningen. Även den som inte har gjort det kan finna skildringen intressant. Man står gärna ut med att författaren hela tiden talar om sig själv och sina egna tankar, för det görs på ett ärligt sätt. Vissa skribenter har förmågan att skriva om sig själva på ett sätt som är av allmänt intresse (framlidne journalisten och kåsören Torsten Ehrenmark var ett utmärkt exempel på detta), medan andra låtsas som om de skriver om något av allmänt intresse, medan det mellan raderna framgår att det egentligen bara handlar om dem själva. Jag vill räkna Villani till den första kategorin, och jag önskar att det funnes en marknad för den här sortens litteratur i Sverige, men jag tvivlar på att det kommer en svensk översättning. Hoppas jag har fel.

Clément Villani: Théorème vivant
Till tyska som Das lebendige Theorem av Jürgen Schröder, 298 sidor
Fischer Verlag 2013
ISBN 978-3-10-086007-1

Lära och undervisa matematik från förskoleklass till åk 6

Ulf Persson

Denna bok är resultatet av ett grupparbete under ledning av Barbro Grevholm (känd för alla Bulletinens läsare). Antalet medförfattare uppgår till elva, och således alldeles för många att lista. Man brukar säga att antal borgar för kvalitet, speciellt i vetenskapliga studier. Man säger också att ju fler kockar…Klart är att ambitionen är hög och att Grevholms ande svävar över hela projektet och därmed boken. Detta gör det svårt för mig att läsa denna utan att ständigt lyssna till hennes författarröst. Det är därför naturligt att betrakta verket som Grevholms och sluta sig till att medförfattarnas roll har varit att bidraga med synpunkter och granska manuskriptet under dess tillblivelse, en icke oäven uppgift[1]. Huruvida Norstedts och Grevholm har planer för en liknande volym för högre stadier vet jag inte, men jag tvivlar, ty betoningen av det pedagogiska perspektivet, speciellt det matematiskdidaktiska, skulle medföra en betydande överlappning. När det gäller bedömningen av boken vore det värdefullt att vara mera specifikt medveten om den roll den är ämnad att spela. Uppenbarligen kan den inte förväntas vara den

[1]Det naturliga hade varit att presentera boken som en antologi, men med tanke på att den är ämnad som en lärobok vore detta kanske förvirrande för studenterna. Dock presenteras på en av bokens sista sidor samtliga författare mera utförligt samt till vilka kapitel de har bidragit. Det är betecknande att Grevholm förekommer som författare i alla centralare avsnitt. I kapitlet ”Vad är matematik” nämns allas vår Lars-Erik Persson i uppskattande ordalag, vilket han givetvis förtjänar, men det är lite stötande att upptäcka att han står som medförfattare till just detta kapitel. Jag antar att kapitlet väsentligen skrivits av Grevholm och att detta är en lapsus.

enda läroboken i matematiklärarutbildningen, därvidlag är det matematiska inslaget alltför översiktligt och det grundläggande pedagogiska stofftet alltför torftigt, exempelvis behandlas de olika inlärningsmodellerna endast i förbigående i bokens slutskede som ett sent påtänkt tillägg. Bokens syfte är däremot att på ett integrerat sätt presentera matematiken och den relevanta didaktikforskningen för att låta den senares landvinningar komma såväl lärarstudenter som färdiga lärare till godo. Ambitionen är uppenbarligen inte begränsad till att låta boken tjäna såsom bredvidläsningsbok utan siktar dessutom till att få den att utgöra den vägledande under utbildningen, helst anammad vid samtliga svenska lärosäten och därmed även fungera som rikslikare[2].

Det är en allmänt vedertagen truism att om man skall vara en bra matematiklärare bör man både kunna matematik och ha förmågan att lära ut den. Det är inte mycket att invända mot detta, såvida man inte ser de bägge förmågorna som oberoende av varandra, ty eftersom matematik är svårt finns det en fara i att den första aspekten därmed tonas ned. Grevholm är definitivt inte av den uppfattningen utan framhåller att man inte kan tala om pedagogik oberoende av det ämne som undervisas i. Hon vill därmed lyfta fram matematikdidaktiken som en vetenskap och betona att den inte bara rör den gamla klassiska metodiken utan även vad man skall undervisa i och varför.

Om matematikdidaktiken som vetenskap kan man ha åsikter, liksom om pedagogiken i allmänhet. Mina åsikter därvidlag bör för många läsare vara kända, och detta är inte tillfället att utveckla dem vidare utan detta passar bättre i en kommande krönika. Så låt mig koncentrera mig på själva boken.

Det inledande kapitlet handlar om att bli en kompetent matematiklärare. Detta är som bekant ett problem. De gedigna lärarna av den gamla stammen, som Grevholm själv är ett utmärkt exempel på, är numera ett minne blott. Lärare med både kunskaper och personlighet tenderar att lysa endast med sin frånvaro. Det hjälper inte hur mycket författaren än påpekar hur stimulerande och spännande det är att vara lärare och framhålla tjusningen med det livslånga lärandet[3] som yrket inbjuder till. Sökandetrycket till lärarutbildningen är svagt och därmed är med fåtaliga undantag studenterna svaga. Utvecklingen är inte förvånande med tanke på hur i alla årtionden lärare har klankats på och hur den akademiska professionen har sett ner på dem såsom misslyckade. Vi får till slut de lärare vi förtjänar i och med att läraryrket har setts som ett sista alternativ, ty ”lärare kan man alltid bli”. Den intellektuella komponenten som traditionsmässigt har utgjort kårens signum har utholkats, mycket beroende på att den inte längre kan fyllas, och därmed har en ond cirkel inletts, ty denna har utgjort yrkets lockelse, numera finns det så många andra möjligheter för intellektuellt hågade individer att finna en utkomst. Detta är beklagligt och tyvärr finns det inga enkla lösningar, vare sig i form av fortbildning eller höjda löner. Kanske endast en ekonomisk kris med en påföljande längre varande lågkonjunktur kan råda bot på detta? I ljuset av detta framstår Grevholms projekt som smått heroiskt, ty det innebär att man inte längre kan förutsätta att de blivande lärarna, inte ens på de lägre nivåerna, behärskar materialet, än mindre att de är genuint intresserade av matematik. Grevholm såsom realist råder därmed sina läsare att under de korta utbildningsåren inrikta sig mera på didaktiken än på matematiken.

Avslutningsvis skall nämnas att Grevholm är skaparen av den så kallade PI-modellen[4] med vilken menas en modell[5] för de färdigheter en matematiklärare skall besitta, och hur dessa är relaterade till varandra och vad de bygger på. Denna modell illustreras av ett imponerande flödesdiagram. Fyra huvudkomponenter identifieras såsom A) En personlig syn på och uppfattningar om kunskap och lärande, B) kunskap om klassrummet i form av ledning, metoder och material, C) kompetens att bedöma och diagnosticera elevers lärande i matematik och D) kunskap i matematik relaterad till undervisning. Dessa, och detta är utmärkande för modellen, uttrycks genom besittandet av ett professionellt språk, vilket krävs för att skapa just den professionella identiteten. Man misstänker att just betoningen på det professionella språket är Grevholms viktigaste bidrag till matematikdidaktiken.

I det andra kapitlet ställer författarna frågan ”Vad är matematik”. En sådan fråga kräver givetvis olika svar beroende på den målgrupp man vänder sig till. I detta fall huvudsakligen mellanstadielärare med ringa insikt i matematiken. Pedagogiskt nog uppmanas läsaren efter den inledande frågan att ta fram papper och penna och själv försöka formulera de egna tankarna om ”vad matematik egentligen innebär”. Detta är en ypperlig uppmaning, man undrar dock hur många läsare som har disciplin nog att utföra detta utan att först ”tjuvtitta i facit” (i boken avslutas varje kapitel med diskussionsfrågor och författarna avstår klokt nog från att tillhandahålla facit, för att betona frågornas öppenhet). Jag tvivlar på att läsaren av denna recension kommer att ta fram papper och penna, så jag tillhandahåller omgående författarnas bidrag.

[2] Att medförfattarna har hämtats från hela Sverige kan ses som ett försök att göra detta realistiskt, något som uppenbarligen har spelat en stor roll när det gäller förlagets initiativ

[3] En modern klyscha som för tankarna till livslångt straffarbete.

[4] PI stå för profesionell identitet

[5] Grevholm är noga med att skilja mellan modell och teori

Dessa avstår dock från att ge en personlig tolkning och nöjer sig med att påvisa frågans komplexitet genom att presentera ett collage, via hänvisningar till kursplaner, utredningar, Nationalencyklopedin och Wikipedia samt professionella matematikers synpunkter, såsom Carlesons[6] och Kiselmans. Ur dessa framhävs vissa nyckelord och formuleringar, som problem, abstrakt och generell, språk och logiskt verktyg för organisering av de logiska konsekvenserna av empiriska fakta, inkluderandes Carlesons varning för att låta idéinnehållet stå tillbaka för formaliseringen (som var den så kallade Nya Matematikens signum under den välmenade reformperiod som inleddes under tidigt 60-tal). Vidare betonas att matematiken är en vetenskap, men även ett hantverk, ja rentav en konst. Att det dessutom är ett språk och därmed ett kommunikationsmedel och som sådant ett ovärderligt hjälpmedel såväl i vardaglig verksamhet som i avancerad teknik. Heller inte att förglömma är matematiken en del av vår kultur och världen är full av matematik. Ja i Keith Devlins formulering[7]

> *Matematik handlar inte om tal utan om livet. Den handlar om världen vi lever i. Den handlar om idéer. Och långt ifrån att vara tråkig och steril, som den ofta porträtteras, är den full av kreativitet.*

Det är bara att applådera. Även om det finns en hänvisning till Platon, bör man i sammanhanget kanske starkare betona att denne filosof mer än någon annan initierade matematikens exalterade position i den västerländska kulturen. Platon hävdade inte bara att allt var geometri i naturen utan betonade matematikens roll för att skärpa intellektet så att detta bättre skulle kunna uppskatta de eviga formernas ontologi. Platons inflytande därvidlag är enormt, man behöver bara tänka på den vikt matematiken tillerkänns i de franska elitskolorna. Platon om någon förtjänar att utgöra matematikernas eget skyddshelgon. Författarna fortsätter med att betona matematikens ovärderliga roll inte bara i naturvetenskap (Wigners motto om ”the unreasonable effectiveness of mathematics” citeras givetvis) utan främst i moderna elektroniska tillämpningar (vilket kan vara utmärkt om man söker anslag hos myndigheter och andra finansiärer, men som jag fruktar snarare understryker matematikens roll som torr teknisk vetenskap, vilken jävel är egentligen intresserad av hur mobiltelefonen fungerar?). Litteraturhänvisningar ges till Simon Singh och Keith Devlin. Singhs bok är en fascinerande läsning i den mån den illustrerar den matematiska världens sociologi och att ett lösande av ett klassiskt problem kan vara nog så spännande som en kriminalgåta, men den ger knappast några matematiska insikter. Att finna Devlins bok om Millenieproblemen begriplig är lite underligt i ljuset av att författaren tillstår att vissa av problemen förstod han ingenting av[8], men låt gå, i dessa sammanhang är illusionen av begriplighet den väsentliga. Det bästa sättet att få en uppfattning om vad matematik innebär är att åtminstone exponeras för mycket varierad matematik. Men detta är tyvärr inte realistiskt.

Kapitlet avslutas för balansens skulle med en presentation av matematikdidaktiken, i vilken det påpekas självklarheter. Exempelvis som att matematikddaktiken givetvis inte är oberoende av matematiken utan att den senare är en nödvändig förutsättning. Eller att ämneskunskaper gör det lättare för en lärare att anpassa och variera förklaringar beroende på elevers förutsättningar. Något som knappast är förvånande. Det är dock värdefullt att det påpekas ty det är inte ovanligt att möta populistiska uppfattningar som att den lärare som har svårt för matematik har lättare att sympatisera med elevernas svårigheter och därmed mera lämpade att övervinna dessa. Om så vore fallet borde vi se en markant effektivisering av matematiklärandet ute i skolorna i takt med att lärarna blir svagare och svagare i matematik. Däremot när det gäller sympatin för elevers svårigheter kan det kanske vara en hjälp för läraren att reflektera över sina egna tillkortakommanden i andra ämnen. Förgäves söker man i detta avsnitt exempel på didaktiska insikter som är specifika och överraskande. Om sådana föreligger vore väl detta avsnitt vara det gyllene tillfället att lyfta fram några, ty varför skall existensen av sådana vara en så väl bevarad hemlighet?

Vad skall man undervisa om i matematik? Och varför? Tyvärr ger inte boken någon vägledning härvidlag. Det anmärkningsvärda är att svenska kursplaner är sedan 1994 renodlat målrelaterade istället för innehållsrelaterade som t.ex. i Japan och England. Eftersom målen är vagt formulerade, som t.ex. att det huvudsakliga syftet med matematikundervisningen är att

> *undervisningen skall bidra till att eleverna utvecklar intresse för matematik och tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang,*

har således läraren i princip en stor frihet i att välja det matematiska innehållet; ja vad hindrar läraren från att undervisa i hyperbolisk geometri eller p-adiska tal? Man

[6] På den gamla goda tiden utkom en populärt hållen pocketbok av Lennart Carleson med titeln ”Matematik för vår tid” som jag läste med stor behållning under en matematikolympiad i Bukarest

[7] Författarna är så förtjusta i citatet att det upprepas ännu en gång i en annan del av boken, nu i originalfattningen.

[8] Personlig kommunikation

misstänker att detta skulle leda till en katastrof. I praktiken sätter, på grund av lärarnas okunnighet, läroböckerna ramarna för vad som skall undervisas, för att inte tala om de nationella proven. Med andra ord, i brist på annat fortsätter man den gamla traditionen, vilket inte behöver vara negativt. Betecknande är att det geometriska kapitlet innehåller en kort orientering om den klassiska euklidiska skolgeometrin och dess betoning på deduktiva resonemang. Denna uråldriga tradition är sedan 60-talet utrangerad i den svenska skolan. För oss av den gamla stammen utgjorde mötet med den euklidiska geometrin vårt första verkliga möte med matematiken. Föga förvånande orienterar sig även författaren i den traditionen som stöpt henne. Matematiken är förvisso mer än formell deduktion, men utan disciplinerat resonemang med precisa begrepp försvåras, för att inte säga omöjliggörs, matematisk kommunikation som är oundgänglig i såväl problemlösning som annan matematisk aktivitet, och som speciellt betonas av Grevholm. Jag må tillstå en viss förvirring. Bokens undertitel är matematik fram till årskurs sex, men tillhör inte algebra och geometri högstadiet? Åtminstone var det först i den gamla realskolan jag konfronterades med dessa. Kan det vara så att kursinnehållet har blivit mera avancerat? Diskussionen om kursplaner leder osökt till frågan om när dess mål är uppfyllda. Vad menar vi egentligen med att en elev har uppfyllt målen? Man kan närmare precisera vad som menas genom att t.ex. tala om förmågor och kunskaper. Förmågor i sin tur kan sedan klassificeras som problemlösningsförmågor, resonemangsförmågor och kommunikationsförmågor. Uppenbarligen är alla dessa förmågor intimt relaterade. Man behöver ju givetvis kunna resonera för att lösa ett problem och att skriva ner lösningen förutsätter en viss kommunikativ förmåga, som vi redan antytt ovan. Allt detta är givetvis intimt förknippat med bedömning av elever, och i ett av de ambitiösare kapitlen diskuteras just bedömningen av elever. Där framhålls skillnaden mellan summativ och formativ bedöming, den senare har som syfte att hjälpa eleven i dess lärande och brukar traditionellt gå under namnet konstruktiv kritik, medan den förra utmynnar i betyg och därmed rangordning, ett betungande myndighetsansvar som sedan länge är pålagt läraren. Det är svårt att sätta rättvisa betyg, men jag misstänker trots allt att i många fall är betygen satta med större grundlighet och omdöme än vad rättvisan i allmänhet är mäktig i sina domar. Författarna exemplifierar bedömningsituationer utförligt och föreslår allehanda matrisformat för att ytterligare precisera bedömningarna och göra dem mindre subjektiva. Jag misstänker dock att inte sällan kan precisionen vara missvisande. Slutligen ifrågasätter jag påståendet

> *Bedömning fokuserar inte längre bara på att elever skall kunna reproducera minneskunskaper utan mer på elever kan använda sina kunskaper i olika sammanhang och vilken kunskapskvalitet elever visar i sitt arbete.*

När gjordes detta? Påstående är en skymf av generationer av kunniga och engagerade lärare och avslöjar såväl en skrämmande aningslöshet som historielöshet.

I kapitlet om de yngsta barnens matematik betonas det att

> *Små barn är kompetenta, kunniga, och strategiska men tänker ofta på ett kvalitativt annorlunda sätt än vuxna och äldre barn.*

Detta tvivlar jag inte alls på. Försöken att förstå den lilla barnets tänkande kräver enligt författaren en mental kullerbytta. Varför? Man tycker sig utläsa att svårigheten för oss är att uppleva en värld i vilken siffror och symboler inte har någon mening. Författaren hävdar.

> *Att undersöka, jämföra och se skillnader och likheter är kanske det mest grundläggande för alla matematiska färdigheter och kunnande.*

Kanske det. Som exempel på matematiskt kunnande anförs förmågan att exakt kunna uppfatta antal utan att räkna, så kallade subitisering. Denna mänskliga förmåga lär vara i paritet med råttors och kråkors, och man kan fråga sig om det överhuvudtaget är en matematisk färdighet, liksom förmågan att kunna orientera sig i rummet, där vi troligen är underlägsna många däggdjur och fåglar. Den matematiska förmågan ligger i möjligheten att övervinna de infödda begränsningarna och som på så därigenom intimt förknippad med språket, men på vilket sätt är långt ifrån uppenbart. Räkneramsan utgör därvidlag ett närmast externt redskap trots sin rent mentala form. Man skall dock inte se matematiken såsom ett språk utom i rent metaforiska termer. Matematiken kommuniceras genom ordinära språk men utgör själv inget språk. Språket självt hanteras effektivast när det är omedvetet om sina egna subtiliteter. Vår ”teoretiska” kunskap om språk vi lär oss formellt är normalt överlägset vårt kunskapen om vårt modersmål, men ändå behärskar vi det senare betydligt bättre. På samma sätt med den naturliga förståelsen av matematiska begrepp och tekniker. Det kan vara intressant att veta att likhetstecknet används på tretton olika sätt, men om man förstår vad man gör, hanterar man dessa betydelseskillnader omedvetet och intuitivt, och det utgör snarare en belastning att vara medveten om dem. Än värre är om man konfronteras med alla dessa tretton distinktioner från början i den välmenande avsikten att underlätta inlärandet. Det leder snarare till ökad förvirring och motvilja. Således är jag något skeptisk till alltför explicita förklaringsmodeller i pedagogiska sammanhang, och även om läraren kan finna ett nöje i dem, skall denne nog vara försiktig med att pådyvla sina elever dem. Själva inlärningsprocessen är ett mysterium och som matematiker är vi väl medvetna om att insikter sällan är frukten av explicita förklaringar utan ligger på ett djupare plan. Givetvis innebär traditionell pedagogik mycket mera än explicita förklaringar, men dessa är lättast att verbalt beskriva och tenderar därmed att överbetonas. Denna digression leder osökt till problemlösningens centrala position inte bara i forskningsmatematik men matematik och matematisk inlärning överhuvudtaget. Ett särskilt kapitel ägnas åt detta. Vi talar givetvis inte om rena rutinproblem var syfte enbart är att utveckla basala färdigheter utan vad Grevholm kallar utmaningar. Så kallade rika problem som provocerar och som för sin lösning kräver matematisk förståelse och som dessutom resulterar i en djupare sådan. Notera att kommunikationen av själva lösningen utgör en bekräftelse på förståelsen. En viktig aspekt av att problemlösning skall fungera är att man inte lär sig strategier för att lösa dem, som om de vore hinder utlagda av problemställaren och vars syfte det är att neutralisera dem, utan att problemen är intressanta i sig själva. Att finna lämpliga rika problem är inte en lätt uppgift; det kräver både begåvning, fantasi och bred erfarenhet vilket det inte är realistiskt att förvänta sig av läraren. Klassiskt löstes detta med exempelsamlingar och jag vet inte hur vanliga och tillgängliga sådana är idag.

De matematiska kapitlen rör talbegreppet med algebra, geometri samt statistik, alla av matematisk översiktlig karaktär med ett utpräglat metodikperspektiv. Statistiken i den elementära undervisningen blir lätt av kokbokskaraktär. Hur viktigt är det att införa begrepp som typvärden och tekniska namn på olika typer av diagram? Sådant lär man sig lätt i de relevanta sammanhangen. Varför introducera den komplicerade formeln för variansen om man inte på något sätt motiverar den? Detta är vådan av betoningen på det matnyttiga. Man kan givetvis ge detaljkritik av dessa matematiska översiktsframställningar. Varför inte förklara hur Eratostenes mätte jordens omkrets istället för att bara hänvisa till att han utförde ett experiment? Jag ställer mig lite frågande till påståendet att vetenskapen ännu inte har avgjort om universum är oändligt eller inte. Hur kan man påvisa att något fysiskt är oändligt? Jag misstänker vad som ligger bakom författarnas påstående, men faktum är att ur en filosofisk synpunkt är frågan om oändligheten ytterst en trosfråga. Att skriva att den icke-euklidiska geometrin utvecklades under 1900-talet är missvisande. Den uppstod som bekant under tidigt 1800-tal och var väl utvecklad med euklidiska modeller redan i slutet av samma århundrade, men som mycken annan matematik utvecklades den vidare under följande århundranden. Man skall även ha klart för sig att den sfäriska geometrin var väl känd hos grekerna och att den sfäriska trigonometrin föregick den plana på grund av de astronomiska tillämpningarna. Att den hyperboliska geometrin illustreras elegant av relativitetsteorin kan ha varit värt att nämna även om det inte kunnat närmare exemplifieras.

Pedagogik och metodik i all ära. De problem som den moderne läraren möter i grundskolan är ofta av brutalare slag. Elever är som bekant inte längre elever utan kunder och det är lärarens ansvar att se till att de når målen även i avsaknad av en aktiv insats från eleven själv som kan vara totalt ointresserad och omotiverad, inte bara av matematiken eller språket eller vad som kan vara på tapeten, utan även av att bli motiverad överhuvudtaget. Men detta är en annan sak.

Barbro Grevholm (red.): Lära och undervisa matematik
320 sidor, Norstedts
Medarbetare: Norén, Eva (förf.)/Olofsson, Gunilla (förf.)/Persson, Elisabeth (förf.)/Persson, Per-Eskil (förf.)/Riesbeck, Eva (förf.)/Taflin, Eva (förf.)/Persson, Lars-Erik (förf.)
ISBN: 9789113034973

Från institutionerna

Chalmers/Göteborgs universitet:

Urban Larsson disputerade i matematik den 17 maj på avhandlingen *Impartial Games and recursive Functions*.

Hermann Douanla Yonta disputerade i matematik den 31 maj på avhandlingen *Two-scale convergence and homogenization of some partial differential equations*.

Emilio Bergroth disputerade i matematisk statistik den 31 maj på avhandlingen *Topics in Game Theory*.

Magnus Röding disputerade i matematisk statistik den 7 juni på avhandlingen *Statistical methods in single particle fluorescence microscopy*.

Karin Thörnblad disputerade i matematik den 23 september på avhandlingen *Mathematical Optimization in Flexible Job Shop Scheduling: Modelling, Analysis and Case Studies*.

Andreas Rosén antogs den 1 juni som docent i matematik.

Elin Götmark förordnades den 1 juni som universitetslektor i matematik.

Michael Björklund förordnades den 1 september som forskarassistent i matematik.

Karlstads universitet:

Martin Lind disputerade i matematik den 17 maj på avhandlingen *Functions of Generalized Bounded Variation*.

Yang Liu (Örebro universitet) disputerade i matematik den 12 september på avhandlingen *Syllogistic Analysis and Cunning of Reason in Mathematics Education*.

Linköpings universitet:

Xiangfeng Yang är ny universitetslektor i matematisk statistik.

Jolanta Pielaszkiewicz har blivit licentiat i matematisk statistik på en avhandling med titeln *On the asymptotic spectral distribution of random matrices. Closed form solutions using free independence*.

John Karlsson har blivit licentiat i matematisk statistik på en avhandling med titeln *A class of infinite dimensional stochastic processes with unbounded diffusion*.

Kristian Lundberg har blivit licentiat i optimeringslära på en avhandling med titeln *Effect oriented planning in military mission support systems*.

Japhet Niyobuhungiro har blivit licentiat i tillämpad matematik på en avhandling med titeln *Optimal decomposition in real interpolation and duality in convex analysis*.

Lunds universitet:

Erik Wahlén har befordrats till universitetslektor vid Matematik NF.

Sören Vang Andersen är ny professor i tillämpad matematik vid Matematik LTH.

George Napolitano är ny postdoktor i matematisk statistik.

Christian Andersson har avlagt licentiatexamen i numerisk analys.

Den 19/6 hölls ett symposium tillägnat **Ulla Holst** med anledning av hennes pensionering.

Den 10-13/6 hölls den 26:e nordiska matematikerkongressen.

Malmö högskola:

Alexei Iantchenko har befordrats till professor i tillämpad matematik.

Mälardalens högskola

Daniel Andrén har anställts som universitetslektor i matematik

Linus Carlsson har anställts som universitetslektor i matematik

Erik Darpö har anställts som universitetslektor i matematik

Lars Hellström har anställts som universitetslektor i matematik

Umeå universitet:

Karl Larsson disputerade i beräkningsvetenskap den 6 september på avhandlingen *Finite element Methods for Thin Structures with Applications in Solid Mechanics*.

David Källberg, disputerade i matematisk statistik den 27 september på avhandlingen *Nonparametric Statistical Inference for Entropy-type Functionals*.

Sonja Kovalevsky-dagarna anordnas i Umeå 15–16 november. http://www.math.umu.se/samverkan/skdagarna2013/

Ordet är mitt

Ulf Persson

Det är vanligt att dela in matematiker i problemlösare och teoribyggare, och det är en populär sällskapslek att klassificera matematiker i den ena eller andra kategorin. Givetvis är det knappast görligt att se dessa två kategorier såsom åtskilda av vattentäta skott, utan som i alla psykologiska klassificeringar är det snarare en fråga om motstående poler mellan vilket man kan spänna upp ett spektrum. En teoribyggare ställs oupphörligen inför problem som han måste lösa och en problemlösare måste utveckla strategier för att lösa sina problem. Dock det är svårt att förneka att dessa motstående poler motsvarar olika temperament och inställningar till matematiken.

Teoribyggaren har ingått ett äktenskap med matematiken, medan problemlösaren har mer eller mindre tillfälliga förbindelser med densamma. Äktenskap utesluter inte sällan skilsmässor, och i fallet med teoribyggaren tenderar den eventuella skilsmässan att vara permanent, medan problemlösaren aldrig helt kan undfly sin fascination för matematiken.

En teoribyggare är urtypen för den professionella matematikern. Hans förhållande är fast och envetet. Han har en mission med sin matematik, han driver ett ambitiöst projekt, han går således systematiskt tillväga och inte sällan tillägnar han sig så småningom ett encyklopediskt vetande relaterat till sitt projekt. Teoribyggaren fascineras av matematiken såsom struktur och han söker dess innersta väsen. Den fråga han ställer sig är: Vad kan jag göra för matematiken?

Problemlösaren däremot kan kokettera med att han är amatör. Han tjusas av de specifika problemen och tenderar att se dessa som specifika utmaningar. Medan teoribyggaren ständigt tänker på matematik, tänker problemlösaren bara när han är engagerad. Dock kan engagemenget vara mycket intensivt, ja intensivare än teoribyggarens målmedvetna lunk. Men mellan problem kan intresset för matematik vara svalt. Problemlösaren utmärkes av en viss lättja och brist på disciplin, d.v.s. han arbetar bara intensivt när lusten faller på. Han har en motvilja mot att systematiskt sätta sig in i teorier, han föredrar ett talande illustrativt exempel som sätter fantasin i rörelse framför en allmän systematisk framställning. Således kan han vara okunnig om centrala inslag i matematiken. En problemlösare kan vara inaktiv i åratal, tills han plötsligt fångas av något nytt. Problemlösaren frågar inte efter vad han kan göra för matematiken utan istället vad kan matematiken göra för honom. Ett lösande av ett problem innebär framför allt en personlig tillfredställelse, att ha på sitt eget sätt förstått något, att ha erövrat en insikt. Han tenderar att vara mera tävlingsinriktad och att se matematiken i personliga termer.

Teoribyggaren kan degenerera. Istället för att tränga djupare in i matematikens innersta väsen kan han nöja sig med att tillägna sig en metodisk apparat och under resten av sin karriär vara upptagen med att leta efter problem som passar till hans apparat. Sådana kan alltid hittas och produktionen blir därmed strid och ström. Misslyckandet och återvändsgränden är bortrationaliserade. Teoribyggaren har tappat den livgivande nyfikenheten och utan att han kanske har insett det har hans projekt för matematikens fromma reducerats till en karriärväg.

Problemlösaren kan degenerera han också. Den mest uppenbara risken med att se problem som isolerade företeelser är smakförlusten. Han tappar urskillningen mellan vad som är viktigt och vad som är sekundärt. Ett problem blir ett självändamål, som en drink eller en liten kärlekshistoria. Han blir i vissa fall som narkomanen som tränger en sil, en "high", ja det spelar ingen roll på vad, medan i andra fall tar lättjan helt över och han försvinner i inaktivitet. En problemlösare kanske inte behärskar en stor teori, men med åren är det ofrånkomligt att han tillägnar sig en metodik och blir fascinerad av ett problem, inte så mycket för att problemet som sådant fascinerar utan för att det passar in i hans metodiska profil. Han blir därmed en blek kopia av den degenererade teoribyggaren, en hemlös stackare utan fast inkomst som letar i rännstenar och papperskorgar efter tomburkar, medan teoribyggaren njuter åtminstone en kälkborgerlig lycka, med fast inkomst och aktning i samhället.

Alexander Grothendieck var onekligen en av de största teoribyggarna under 1900-talet, kanske den störste? Hans äktenskap med matematiken var intensivt men relativt kortvarigt. Efter hans skilsmässa återvände han i stort sett aldrig. Han sysslade med matematik på grandios nivå, det är svårt att tänka honom verksam på en blygsam-

[9] En gång var Grothendieck på ett party hos en tysk matematiker, jag har glömt namnet. Det fanns inte tillräckligt med stolar, så värden letade fram Grothendiecks samlade verk som han hade i hyllan och gjorde en trave av dem för Grothendieck att sitta på. Denne tackade och anmärkte att tydligen kom hans verk slutligen till någon nytta i alla fall.

mare. Allt eller intet. Föga förvånande ser han tillbaka på matematiken med en viss bitterhet[9]. Grothendieck lämnade ett monument efter sig, en teori vars syfte var att blottlägga den algebraiska geometrins innersta väsen. Teorin är till stora delar oigenomtränglig och kräver mycket sittfläsk för en blivande matematiker att tillägna sig. De flesta tenderar att gå vilse och förlora sig i formaliteter, dock de som har lyckan och förmågan att tillgodogöra sig den blir kraftfulla. Många av de senaste landvinningarna inom geometri och talteori har Grothendieck att tacka. Han har gjort matematiken en stor tjänst.

Erdős var däremot en problemlösare. En kompulsiv sådan, en matematisk knarkare[10]. Man förknippar hans gärning med isolerade matematiska problem, en del små, en del stora, en del lösbara, andra olösbara. Ja det var inte ovanligt att problemen till och med kom med små prislappar. Problemen var inte jämnt utspridda i det matematiska landskapet utan begränsade sig till kombinatorisk och statistisk talteori. Visserligen är det matematiska landskapet i formell mening fraktalt, varje litet delområde kan i princip kodifiera hela matematiken; men vi matematiker är också människor och suktar efter bredare sensuella stimulin än de formellt kodifierade. Erdős hade ingen övergripande teori, problemen tycks springa upp spontant i sin mylla, inte olikt blommorna på en äng utan intimare inbördes sammanhang. Visst finns det ett sammanhang, men sammanhanget var snarare att finna i Erdős matematiska erfarenhet, i de tricks och metoder han under ett långt liv samlat på sig. Han såg vad han kunde göra. Erdős var inte gift med matematiken, han var förgiftad av den. En oändlig räcka av lösa förbindelser, må vara att de alla tillhörde samma population. Erdős är något av en legend, speciellt strax utanför matematiken. Så gott som alla har vi ett Erdősnummer och jag hoppas att mitt är så högt som möjligt[11]. Nej för mig personligen är Erdős ingen inspiration, han tycks mig representera allt som är fel med matematiken. Hade han erbjudits såsom förebild hade jag aldrig valt den matematiska banan åtminstone inte med den romantiska naivitet jag en gång i tiden anträdde den. Med denna exemplifiering vill jag på inget sätt påskina att mina sympatier ligger åt teoribyggarhållet utan snarare tvärtom. Min läggning och temperament ligger snarare åt den andra polen och därför känns det viktigt att framhålla det negativa.

En matematiker som på ett ypperligt sätt kombinerar teoribyggaren med problemlösaren var Hilbert, en sann gigant under 1900-talet. Eric Temple Bell i sin närmast notoriska matematikerbiografi ”Men of Mathematics”, för övrigt en av de få böcker jag läst som kom att ha en livsavgörande betydelse, framhåller att Poincaré var den siste universalisten. Boken skrevs på 30-talet och författaren bör ha varit någorlunda förtrogen med Hilbert som vid denna tid redan hade sin lysande framtid bakom sig. Men Bell avbröt sin kavalkad vid sekelskiftet och något tredje band såg aldrig dagens ljus. Om någon var Hilbert en universalist. Hans aptit på matematiken var gränslös och han fascinerades av problem inom alla dess delar från matematikens fundamenta och logik till integralekvationer. Ett problem och ett problemområde väckte hans nyfikenhet och ledde till systematiska teoribyggande undersökningar. Han hade smak, arbetsförmåga samt skarpsinne. I mångt och mycket kan Hilbert tjäna som förebild för unga matematiker. Han kombinerar de bästa aspekterna av den matematiska verksamheten. En presentation av Hilbert ger på köpet en representativ översikt över matematiken, speciellt 1900-talets. Han lämnar efter sig ett arv som transcenderar den personliga aspekten. Ett livsverk, inte en karriär.

Hur konfronteras vi matematiker med matematiken som unga? Kanske det första kontakten faktiskt utgörs av teoribildningen, förmågan att handskas med tal, som ger en förtrolig säkerhet och därmed självförtroende. Instinktivt förstår vi vad som gäller. Problemen, tankenötterna, kommer lite senare, detta förändrar till en viss del vår ursprungliga attityd till matematiken. Den problematiserar (vitsigheten är ofrivillig) den från att vara något som är självklart för att inte säga trivialt, till något som ger tuggmotstånd. Därefter kommer en ny upplevelse där den matematiska världen snabbt vidgas. Detta är smått hänförande och sätter problemlösningen på sparlåga. De nya teknikerna är förförande. Problem reduceras till övningar vars syfte inte är att utmana de nya färdigheterna utan att bekräfta dem. Det finns en fara i att fastna i detta, att lära sig mer och mer. Att se matematiken som ett romanläsande, att lägga kunskaperna på hög, att likt humanisten skaffa sig en djup och närmast allomfattande bildning. Sådant kan ge personlig tillfredställelse men tjänar inte matematiken.

Att ta unionen av teoribyggandet och problemlösandet är få förunnat, men vad gäller snittet? Snittet kan vara tomt, som mellan den degenererade teoribyggaren och den neddekade problemlösaren, men vad vi syftar till är den sunda kärnan i den matematiska verksamheten. Att ha förmågan och viljan att sätta sig in i teorier och utveckla tekniker. Detta ingår i matematikerns professionella skyldighet. Man kan inte uppfinna hjulet på nytt varje gång, hur frestande och tillfredställande detta än må vara. Vad som utmärker amatörmatematikern är avsaknaden av sådana kunskaper och färdigheter, denne blir då torftig i sin verksamhet. Men en matematiker

[10]Karaktäristiken är inte bara bildlig utan enligt ryktet lär det även kunna ges en bokstavlig tolkning i form av amfetamin

[11]Man kan förvissa sig om att det blir oändligt, men så fort man skaffat en medförfattare tappar man kontrollen

måste även ha handstyrka, förmågan att improvisera och kunna tänka utan färdiga metoder. Hur ofta har man inte haft erfarenheten att begrepp som verkar så förföriskt enkla i sin presentation, plötsligt framstår så subtila i en verklig problemsituation att man börjar tvivla på att man någonsin har förstått det enklaste. Det är i denna högst personliga kamp man växer och förankrar sig som matematiker. Den kan man inte läsa sig till.

Slutligen, vad innebär lösandet av ett problem? Det är knappast svaret som sådant som är intressant, såvida det inte ingår som ett delproblem i ett större sammanhang. Ett tekniskt lemma vars riktighet vi vore beredda att betala pengar för om vi visste att det därmed skulle visa sig riktigt. Det är insikten som vi söker. Teoribyggaren vill dessutom att lösningen skall harmonisera med teorin, falla ut ur den som en mogen frukt, då först har teorin visat sin styrka och blottlagt ett inre väsen. Grothendieck var sådan, ett problem skulle lösas naturligt i det sammanhang det hörde hemma. En ad-hoc lösning, ett trick här och där, för att lösa en knut eller ge en genväg var fusk. Ja vad är ett trick? Somligt är bara ett trick och det ger ingen insikt utan känns just som fusk. En genväg förbi den riktiga svårigheten. Tricket är frustrerande eftersom det ger känslan av att man aldrig skulle ha kunnat komma på det själv, det kommer från ingenstans och avspeglar ofta en främmande attityd. Sedan finns det andra tricks som faktiskt ger insikt, och när man väl har insett det kan man inte annat än förundras över att man inte kom på det själv. Platon hävdar som bekant att all kunskap är något man glömt men som återuppväckts i minnet. Matematiska insikter är av den karaktären, när man väl insett dem förstår man inte hur man en gång kunnat vara okunnig om dem. Det synes en som något man alltid kunnat men bara tillfälligt glömt bort. Detta är också ett sätt att uppleva matematiken platoniskt.

FÖRFATTARE I DETTA NUMMER (utom redaktionsmedlemmar)

Christoph Drösser är vetenskaplig redaktör vid den tyska veckotidningen DIE ZEIT.

Jöran Friberg är professor emeritus i matematik från CTH och en internationellt erkänd expert på matematiska kilskriftstexter.

Erik Wahlén är universitetslektor vid Matematikcentrum i Lund.

Thomas Weibull är pensionerad universitetslektor från CTH/GU

Lars A. Wern är pensionerad patentingenjör (European Patent Attorney).