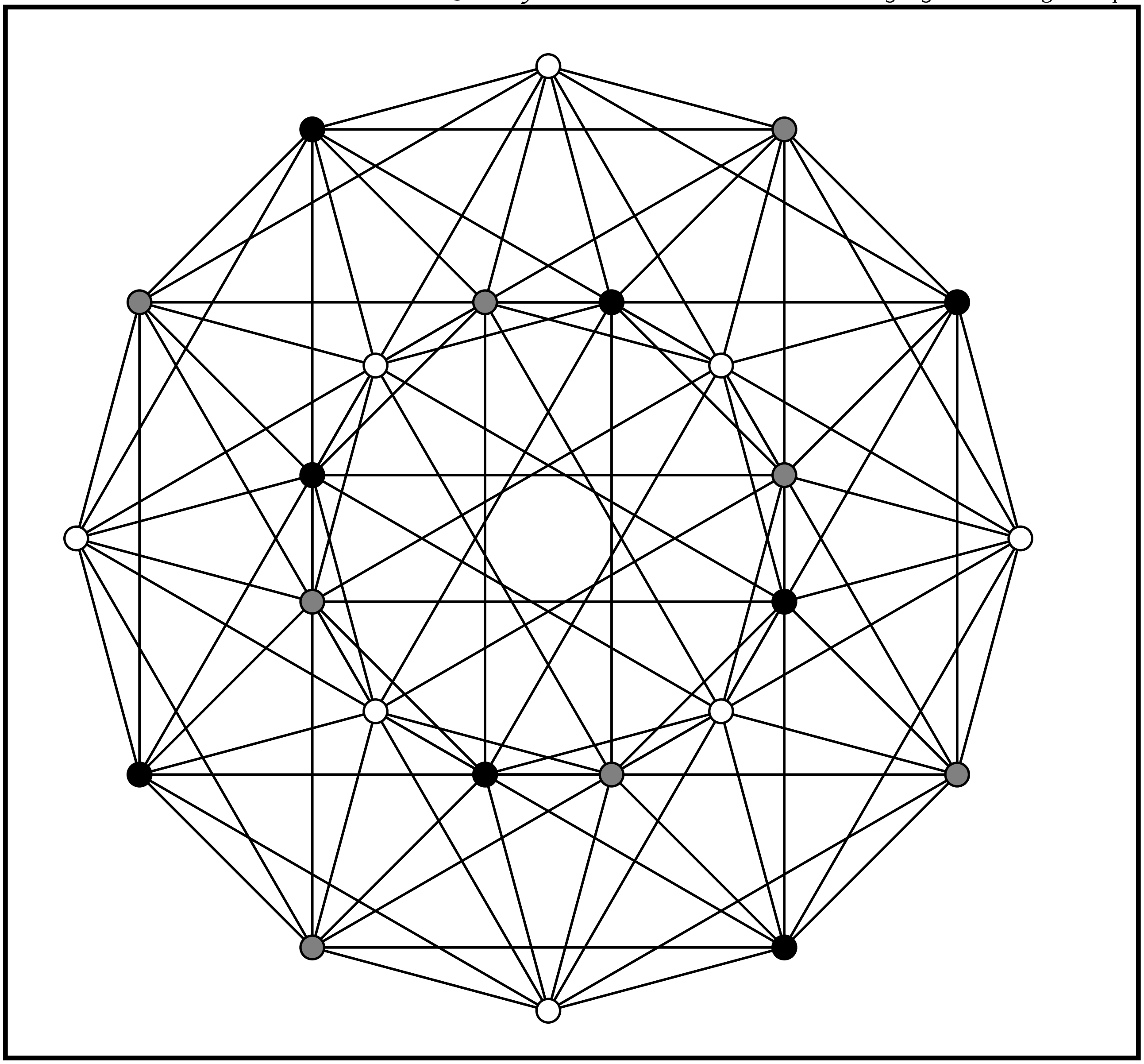
Bulletinen

15 februari 2016

Svenska Matematikersamfundets medlemsblad

Redaktör: Ulf Persson
Ansvarig utgivare: Milagros Izquierdo



Bulletinen

utkommer tre gånger per år I Januari, Maj och Oktober. Manusstopp är den första i respektive månad

Ansvarig utgivare:	*Milagros Izquierdo*
Redaktör:	*Ulf Persson*
Adress:	*Medlemsutskicket c/o Ulf Persson* *Matematiska institutionen* *Chalmers Tekniska Högskola*

Manus kan insändas i allehanda format `.ps, .pdf, .doc` Dock i tillägg önskas en ren text-fil. Alla texter omformas till `latex`

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem betala in avgiften på samfundets `plusgirokonto 43 43 50-5.`
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om Du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter (per år)

Individuellt medlemsskap,	*200 kr*
Reciprocitetsmedlem	*100 kr.*

(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal):
Doktorander gratis under två år

Gymnasieskolor:	*300 kr.*
Matematiska institutioner:	*Större 5 000 kr, mindre 2 500 kr*

(institutionerna får sälva avgöra om de är större eller mindre).

Ständigt medlemsskap:	*2 500 kr (engångsinbetalning)*

Man kan även bli individuellt medlem av EMS genom att betala in 220 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

HEMSIDA: `http://www.swe-math-soc.se`

Här återfinnes bl.a. protokoll från möten

STYRELSE:

ordförande	*Milagros Izquierdo*
	`013 - 28 26 60`
	`president@swe-math-soc.se`

vice ordförande	*Klas Markström*
	`090-786 97 21`
	`vice-president@swe-math-soc.se`

sekreterare	*Olof Svensson*
	`011-36 32 64`
	`secretary@swe-math-soc.se`

skattmästare	*Frank Wikström*
	`046-222 85 64`
	`treasurer@swe-math-soc.se`

5:te ledamot	*Jana Madjorava*
	`031 - 772 35 31`
	`bm5@swe-math-soc.se`

ANNONSER

(Dessa publiceras inom en ram som denna)

helsida 3000 kr
halvsida 1500 kr
mindre 750 kr

Annonser i tre konsekutiva nummer ger endast dubbla priser d.v.s. 1/3 rabatt

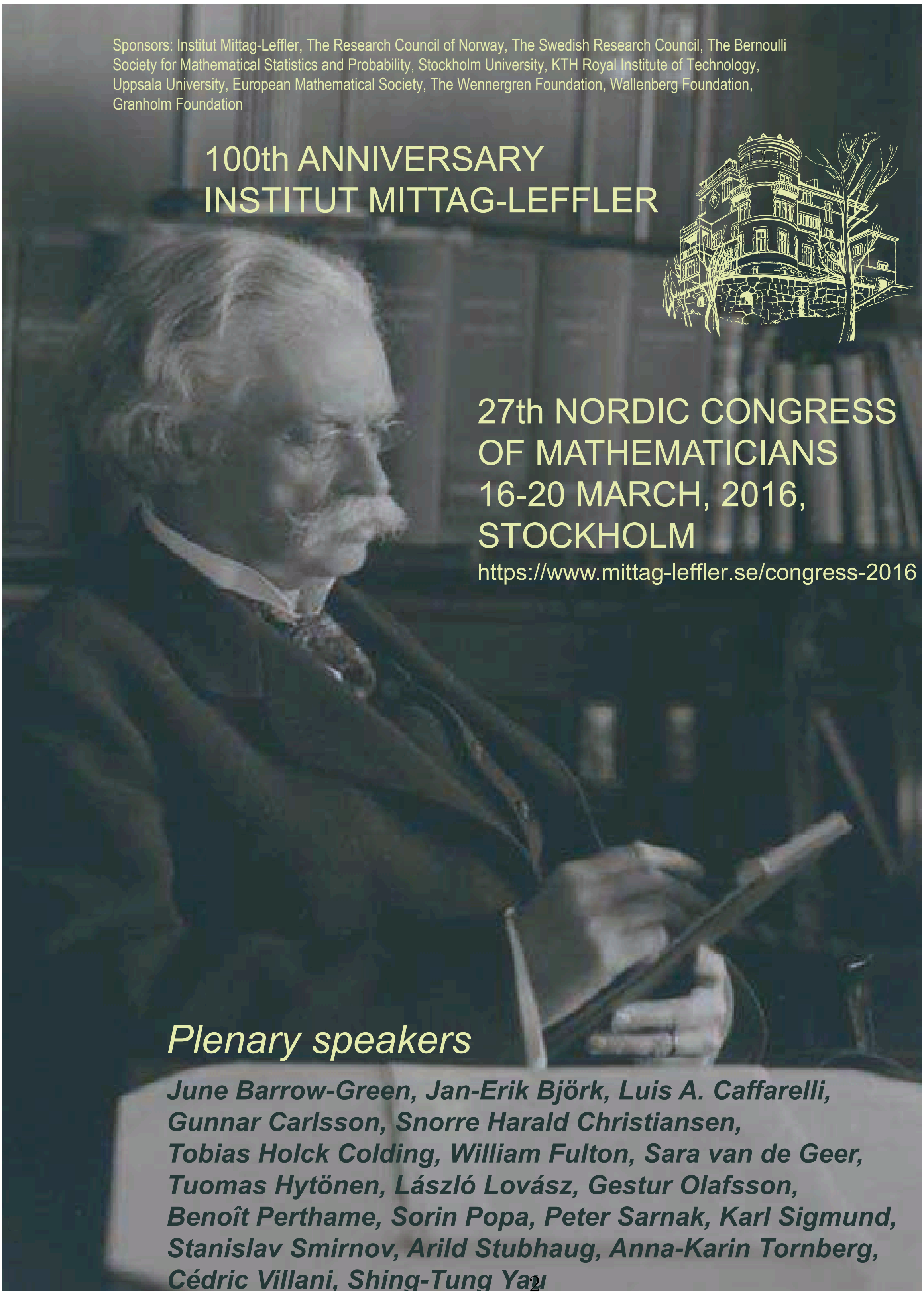
Annonser inlämans som förlaga
samt i förekomamnde fall som text-fil, Dessa formateras om i PostScript

Detta Nummer

Ulf Persson

Detta blir således andra numret av den nya Bulletinen. Inte lika långt och 'mastigt' som det föregående, men jag hoppas ändå med intressant material. Först och främst har vår ordförande bett sin landsmannina Maria Esteban att skriva om matematikens tillämpningar, speciellt dess ekonomiska 'impact'. Jag bidrar med en intervju, denna gång med Harald Helfgott, känd för att nyligen ha bevisat den svaga Goldbach förmodan, som innebär att varje udda tal kan skrivas som summan av tre primtal. Han deltog i en talteoretisk Workshop som arrangerades av Per Salberger i december. På Pär Kurlbergs förslag och initiativ anordnades en intervju med honom, som jag nu efter intervjuoffrets godkännande (och efter smärre justeringar) låter publicera. Vidare bidrar vår redaktionsmedlem Arne Söderqvist med reflektioner över skolväsendets förfall. Didaktikens negativa inflytande bör dock enligt min mening, ses mera som ett symptom på ett förfall, som tycks vara ganska universellt i västvärlden, än som den egentliga orsaken. Man tänker osökt på en kropp i förfall som därmed blir offer för allehanda opportunistiska sjukdomar och därmed ger den omedelbara orsaken till döden. Slutligen bidrar Peter Sjögren med en minnesteckning över sin företrädare på professorsstolen - Olof Hanner - som avled förra året. Han var en professor av gamla stammen och av det slag som inte längre uppmuntras. Olof Hanner vägledde inte många studenter till någon doktorsavhandling, ej heller packade han de matematiska tidskrifterna med egna uppsatser. Därmed har han inte lämnat så många påtagliga spår i den svenska matematikervärlden. Men det betyder inte att han inte var aktiv. Under sin ungdom lämnade han många förnämliga och fortfarande i minnet bevarade bidrag till topologin, ett ämne som inte alls var företrätt i Sverige vid den tiden och som han i sin blygsamhet ville undvika att framhäva. Hur mycket av mera konventionellt produktiva matematiker kommer att vara ihågkommet om femtio år?. Sjögren tar upp några aspekter av den hannerska matematiken. Olof Hanner hade breda matematiska intressen och gav sig även i högre ålder med liv och lust i kast med specifika matematiska problem. Det må ha gällt Go-spelet, sätten att arrangera bridgeturneringar eller hur man skall lösa Rubriks kub som var något av en fluga för drygt trettio år sedan. Han tog även den så kallade tredje uppgiften på fullaste allvar och engagerade sig personligen under många år i Skolornas Matematiktävlan.

◇ ◇ ◇ ◇


Sponsors: Institut Mittag-Leffler, The Research Council of Norway, The Swedish Research Council, The Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability, Stockholm University, KTH Royal Institute of Technology, Uppsala University, European Mathematical Society, The Wennergren Foundation, Wallenberg Foundation, Granholm Foundation
100th ANNIVERSARY
INSTITUT MITTAG-LEFFLER
27th NORDIC CONGRESS
OF MATHEMATICIANS
16-20 MARCH, 2016,
STOCKHOLM
https://www.mittag-leffler.se/congress-2016
Plenary speakers
June Barrow-Green, Jan-Erik Björk, Luis A. Caffarelli,
Gunnar Carlsson, Snorre Harald Christiansen,
Tobias Holck Colding, William Fulton, Sara van de Geer,
Tuomas Hytönen, László Lovász, Gestur Olafsson,
Benoît Perthame, Sorin Popa, Peter Sarnak, Karl Sigmund,
Stanislav Smirnov, Arild Stubhaug, Anna-Karin Tornberg,
Cédric Villani, Shing-Tung Yau

27th Nordic Congress of Mathematics

Ulf Persson

Den 27:e Nordiska Kongressen kommer att äga rum i anslutning till 100-års jubileet av Institut Mittag-Lefflers grundande i mars 1916. Gösta Mittag-Leffler föddes som bekant den 16 mars 1846, och förmiddagen den 16 mars kommer att ägnas institutet med historiska föredrag av Arild Stubhaug, June Barrow-Green och Jan-Erik Björk och matematiska på eftermiddagen av Cédric Villani, Gunnar Carlsson och Tobias Holck Colding.

Vidare Plenarföreläsningar hålles enligt följande schema

Tid	Onsdag 16	Torsdag 17	Fredag 18	Lördag 19	Söndag 20
9:00-9:50		S.Smirnov	L.A.Cafarelli	W.Fulton	P.Sarnak
10:30-11:20		L.Lovasz	A-K Tornberg	T.Hytönen	S. van der Geer
11:30-12:20		B.Perthame	K.Sigmund	S-T. Yau	S.Popa
14:00-14:50					G.Olafsson
15:00-15:50	C.Villani				S.H.Christiansen
16:00-16:50	G.Carlsson				
17:30-18:20	T. Holck Colding				

På grund av det stora antalet deltagare kommer alla föreläsningar att ges i **Aula Magna** vid Stockholms universitet.

Programmet i sin helhet står att finna via länken

`http://www.mittag-leffler.se/congress-2016/schedule`

och en fullständigare version

`http://www.mittag-leffler.se/congress-2016/sessions`

Registrering sker via länken

`http://www.mittag-leffler.se/congress-2016/registration`

Tilläggas skall att på eftermiddagen den 15 mars hålls två föreläsningar på KTH (Sal E1) av

Tid	Föreläsare	Titel
13:00-14:00	**Donald Ervin Knuth**	*All questions answered*
14:00-15:00	**Cédric Villani**	*On triangles, gases, prices and men*

Dessa förläsningar är öppna för alla och kräver ingen registrering.

Registrerade deltagare är däremot inbjudna till middag i **Stadshuset** Torsdagen den 17 mars klockan 19:00.

◇ ◇ ◇ ◇

The Utility, Importance and Impact of Mathematics in our Societies

Maria J. Esteban[1]

Several recent studies on the socio-economic impact of Mathematics in our societies have shown, without surprise, that this impact is very high. These studies have been carried out in three European countries, first in the UK, then in the Netherlands and lastly in France. These three countries possess very different economies, with very different sectors being preponderant in their respective national revenues. Still the data obtained in these three studies show that high-level Mathematics impact very importantly the corresponding economies, both regarding a high percentage of the **GNP** [2], but also regarding the percentage of jobs impacted by a high level of mathematical knowledge (for instance, 9% of the total number of jobs in France!). Of course we can discuss for hours about the kind of metrics used by the consulting companies who have run these studies. How can one measure such a delicate subject? How to define what means impact or a job impacted by a high-level of mathematical knowledge? How to measure the impact in the total **GNP** of the country? Difficult to do, and certainly it has not been done in a total rigorous and indisputable way. But these companies have analyzed a large amount of data issued by large, medium and small enterprises and their financial reports. They have also interviewed a large number of persons, both in the academic and in the economic worlds. They have certainly used statistics obtained by the corresponding governmental offices. And even if the data and the numbers issued could vary if the studies had been run in another way, it is clear and indisputable that a high-level of Mathematics helps a country to improve its economy in the long run.

For many decades, and still in many places, most people believed that Mathematics was a science excellent and necessary for teaching and learning, for making our youth knowledgeable and able to learn other important topics. Recently, the view of what Mathematics is or can do for us has changed very rapidly, at least in some developing countries. It appears more and more clear to the general public that Mathematics is maybe useful for its applications to the industry, for companies, for the society at large. But this knowledge and understanding is still very vague. Not so many people know how important Mathematics is for the development of new technologies, for the organisation of air, train, subway and bus transportation (logistics), for addressing new issues related to health and drug use, for being able to improve industrial products and procedures, to improve the competitiveness of large and specially of small companies. Whose is the fault? The media have rarely tried to speak of, or even to understand, this issue, and so they never, or rarely, speak of Mathematics in these positive terms. But in my opinion the main fault is ours, of the mathematical community, since we do little or almost nothing to explain what we do, and what its impact and utility is or could be.

In the recent celebration of the 25 years of the EMS, I was asked to discuss about the relation of mathematicians, and more precisely, of European mathematicians, with the outer

[1] President of the International Council for Industrial and Applied Mathematics (ICIAM)

[2] of the order of 15% in the three cases

world, with our society. In other words, about how do mathematicians to contribute to the general well-being and the development of our societies. What follows are some excerpts of my contribution to a round table which closed the anniversaryś92s activities and presentations, and where several topics related to Mathematics were discussed.

I started by saying that of course, as it is well known, Mathematics was born many centuries ago to solve problems coming from real life, and more or less until the middle or the end of the 19th century practically all important developments in mathematics were, in a way or another, linked to concrete problems that needed an answer, a solution. But at the end of the 19th century, and mainly from the beginning of the 20th century, a large part of Mathematics started to work following internal logics and internal needs. And this is fine, this corresponds to the activities of an important scientific field, with many different and varied subfields.

But, as already discussed above, it has been recently proved by several studies that an important part of the economy relies on high-level Mathematics. But not necessarily and directly on mathematicians, of course.

How do mathematicians contribute to this? And how could they contribute even more? Another recent study carried out in France by the Agency for the Interaction of Mathematics with Enterprises and with the Society (AMIES) it has been estimated that approximately 10% of the mathematicians working in Academia are involved in working with companies or on societal problems. Personally I find this number too optimistic, I find it too high. But anyway, whatever the real percentage is, it seems to be stagnating , since not more mathematicians seem to be ready to get involved in this kind of activity.

Companies are becoming more and more conscious that Mathematics could help them to do better. Campaigns in this direction are being organized in many European countries. But things are not so simple, there is a big concern: what will happen when the companiesś92 demand will not find enough mathematicians ready to help them finding answers to their questionsá0or their needs? In France it has been estimated that we would need twice as many mathematicians being ready to invest their time and skills in this kind of activity in the next 10 years, that is, about 20%. This is about France. In other countries the numbers could even be worse. But, how can we manage to reach this percentage? Some mathematicians like to work solving real life problems, or for a reason or another have become involved in this kind of activity. But many mathematicians do not want to do it, and that is fine, it is their right, since one of the nice sides of our profession is that we are more or less free to choose the topics on which we work. But let us also notice that many mathematicians who would be ready to invest in this kind of activity, do not know how to do it, specially with the Mathematics they work in. It is increasingly clear that almost all fields of Mathematics can contribute to solve concrete problems, but there are fields and communities where people do not see how they could manage to help solving industrial problems. A good way to address this issue is to look at concrete cases, to present and discuss the experiences of mathematicians who at some point of their career decided to go towards applications, or at least, to devote part of their time to this task. Mathematicians who started collaborating with companies, or who created a company, or who left their academic world to jump to other kinds of activity.

What are the difficulties that appear more important when trying to understand how to amplify the phenomenon?

First, the lack of recognition of this kind of mathematical activity in our community. In important committees we often discuss about excellence and about what and where to publish, which is very appropriate, of course. But the utility of the research or the work that we perform should also be recognized. By the institutions, and also by the community at large. Which is far from being the case nowadays! Performance and excellence should not be linked only to publications. The evaluation of research and mathematical work should be based on a variety of criteria, where the quality of publications would be important, but in some cases, implication in the resolution of important industrial or societal should also be considered important and valuable. We only have to sit in an all-Mathematics committee, to hire people, but more specially, to give important prizes or grants, to quickly see how low the level of recognition of very applied mathematical work is! So, working in industrial Mathematics is risky and not always very good for your career. Well-established mathematicians can devote time to this kind of work or activity, since they do not risk much, but they should think carefully before pushing young students in this direction, unless their main aim was to work in a company.

Another big problem among many mathematicians is the lack of understanding of what to do to start working in vary applied problems. Again, testimonials, examples and success stories could be of great help here.

Well-adapted solutions to these issues are maybe under way. In many European countries structures affiliated to the European network EU-MATHS-IN are starting to help building bridges between academic mathematicians and companies, specially SMEs. Among them the Swedish Network for Mathematics in Industry, Eu-Maths-In.se (www.eu-maths-in.se), which is a newly established network created to promote the use of Mathematics in industry and to serve as an interface between academia and industry. The network works actively to leverage the impact of Mathematics as a key technology for industrial innovations, by stimulating the exchange of ideas and by creating new opportunities for cooperation between Swedish industry and mathematicians working in academia and at research institutes. The network is hosted by the Fraunhofer-Chalmers Centre for industrial Mathematics (FCC) and contains nodes in more than fifteen Swedish universities.

EU-MATHS-IN (http://www.eu-maths-in.eu/) is a European network whose members are national networks created to do what the Eu-Maths-In.se Swedish network is doing. In every member country (there are 14 at the moment), in order to fit well the different characteristics of the corresponding university sector in their countries, a different structure has been devised. Some of them have been lucky to be funded and of course those are able to count on employees and collaborators who devote part or all their time to help with the main tasks of the network. The structure of the national networks is very different from a country to the next, but the aims are the same for all of them: to increase and improve the interface of academic Mathematics and the world of large, medium, and even more, of small enterprises. The final aim of EU-MATHS-In is to become a European infrastructure at the service of companies and academic mathematicians, to become a one-stop-shop for companies looking for services given by mathematicians, or for mathematicians to become their employees, consultants or collaborators. One of the funding members of EU-MATHS-IN was the EMS. ECMI, the

European Consortium for Mathematics in Industry, was the other one. The mathematical community as a whole should be interested in the development of these institutions which are working to increase the impact and visibility of Mathematics. This will be good for our societies and their economy, of course, but this will be also important for our community itself, since it will help attracting more funding, justifying the creation of more academic jobs, and opening new opportunities for our students in their job search.

◇ ◇ ◇ ◇

Didaktik i praktiken

Arne Söderqvist

Jag fick min första heltidstjänst som matematiklärare i en gymnasieskola år 1970. Att vara lärare fann jag vara ett mycket trivsamt arbete. De flesta av mina elever visade intresse. Villkoren var utmärkta. En heltidstjänst innebar att man hade "undervisningsskyldighet" omfattande 21 lektioner á 40 minuter per vecka. Det var alltså detsamma som 14 klocktimmar varje vecka. Man hade sålunda gott om tid att förbereda sina lektioner, konstruera och rätta prov och fundera ut lämpliga läxuppgifter. Sådan tid kallades "förtroendearbetstid" och kunde förläggas när som helst under veckan, inom eller utanför skolbyggnaden. Lönen var fullt i klass med vad övriga delar av arbetsmarknaden kunde erbjuda och bara några år tidigare hade man fastställt att riksdagsmännen skulle ha samma lönenivå som adjunkterna. (Det var alltså adjunkterna som var rättesnöret för riksdagsmännen.) Skolloven utgjorde en väsentlig förmån: sommarlov, jullov, vinterlov och påsklov. (Höstlovet var inte infört ännu på den tiden.)

Under varje läsår anordnades en handfull ämnesanknutna studiedagar för lärarna. Matematiklärarna fick därmed höra en matematiker tala om matematiska spörsmål och på motsvarande sätt var det ordnat för lärarna i andra undervisningsämnen. Studiedagarna var förväntansfullt emotsedda inom lärarkollegiet. I stort sett varje undervisningsämne var företrätt av en disputerad lektor. I kollegierummet och i personalmatsalen rådde en intellektuell atmosfär. Det diskuterades bland annat matematik, litteratur och filosofi. "Läroverkslatinet" levde fortfarande kvar, man sade "kollegium" och "scrutinium".

Något årtionde senare infördes målsättningen att alla ungdomar i en årskull skulle genomgå gymnasieutbildning. Gymnasiernas tvååriga linjer blev dessutom treåriga. En självklar konsekvens blev att antalet lärare måste utökas, ja kanske rentav fördubblas. Därmed skulle lönekostnaderna för lärarkåren också fördubblas, vilket skulle tynga statsbudgeten på ett oacceptabelt sätt. (Göran Persson redogör för resonemangen inom dåvarande regeringen i sin bok "Min väg, mina val".) Sedan Arbetsgivarverket lyckats bromsa lärarnas löneutveckling i flera avtalsrörelser i rad, utbröt till sist lärarstrejken 1989. Riksdagsmännen hade då ungefär dubbelt så hög lön som adjunkterna.

Under 1980-talet hade inte bara lärarnas reallöner sjunkit. Arbetsvillkoren ändrades i grunden. Begreppet "undervisningsskyldighet" avskaffades, vilket innebar att skolledningarna fick besluta om omfattningen av varje lärares undervisning. Lektionerna blev 60 minuter långa istället för som tidigare 40 minuter. Förtroendearbetstiden reducerades till ett fåtal timmar per vecka. Skolbyggnaderna saknade oftast lämpliga arbetsplatser för lärarna. Skämtsamt sades det inom kollegierna att man väntade otåligt på att arbetstiden skulle vara över, så att man äntligen kunde börja arbeta. Ledigheten inskränktes för lärarnas del genom närvaroplikt under stora delar av loven. Studiedagarna fick inte förbli ämnesanknutna, utan skulle vara gemensamma för alla lärarkategorier. Anledningen till denna ekumenik var minskade kostnader; det är självfallet billigare att vidtala en enda föreläsare än flera olika. Vad som fortsättningsvis kom att avhandlas varje studiedag var förstås didaktik och ingenting annat.

Som en konsekvens av förändringarna uppstod svårigheter med att rekrytera ämneskunniga lärare. Begreppet "behörighet" för lärare uppluckrades. Kommunaliseringen av skolväsendet gav kommunernas skolpolitiker och skoltjänstemän ökade befogenheter. Detta ledde ofta till synsättet att det räckte med att någon var "vuxen" för att kunna anställas som lärare. Den kamerala aspekten blev den allenarådande; det gällde att "hålla budgeten". Icke gediget utbildade har förvisso inga goda skäl att kräva hyggliga löner. Skolväsendet låg plötsligt i händerna på styrande som inte förstod sig särskilt mycket på undervisning och utbildning.

Didaktikerna vädrade morgonluft. Olika idéer om hur man skulle kunna upprätthålla kunskapsnivån hos eleverna presenterades. (I "Ekots lördagsintervju" som sändes 20 februari i SR:s P1, hävdade ministern för högre utbildning och forskning, Helene Hellmark Knutsson, att med "ny pedagogik" ska studenter vid de olika högskolorna komma att lyckas bättre med sina studier. Denna "nya pedagogik" tycks vara rejält försenad och har nu låtit vänta på sig i mer än ett kvartssekel.) Skolbyråkraterna blev intresserade. Man lyssnar ju gärna på sådant man vill höra. Eftersom lärarna inte längre var självklara auktoriteter, så skulle eleverna söka sin kunskap själva, gärna utanför klassrumsmiljön. Till att börja med hänvisades till biblioteken, men så gjorde datorerna och Internet sitt intåg. Eleverna skulle med fördel göra grupparbeten. Detta motiverades med att de initiativrika i en grupp skulle stimulera dem som tenderade att vara passiva. Sedan skulle de olika grupperna redovisa sina rön inför hela klassen.

Jag var inte själv skollärare längre när dessa idéer slagit igenom, men mina barn har berättat hur det fungerade i praktiken. Grupperna skickades ut åt olika håll för att till exempel ta reda på fakta om olika svenska landskap. Flera lektioner per vecka under några veckors tid disponerades för ändamålet. I själva verket gick man varken till något bibliotek eller någon datasal, utan man blev istället stamgäster hos McDonald's. När tiden för redovisningen närmade sig rafsade någon i gruppen ihop några lösryckta fakta om det aktuella landskapet. Den eleven fick sedan företräda gruppen vid klassrumsredovisningen. Klassens elever skulle lära sig om alla landskap genom att lyssna till samtliga gruppers redogörelser. Ingen hörde dock på, utan man häcklade och hånade varandra, utan något ingripande av läraren, "den vuxne", i klassrummet. Det blev sannolikt inga bestående kunskaper om de svenska landskapen hos någon av klassens elever. Formellt var dock ett kursmoment avklarat. Även en annan av didaktikernas idéer hade blivit implementerad, nämligen den att läxor inte bör förekomma. Ett av deras budskap tycks vara att man kan lära sig utan ansträngning.

Ett annat budskap har varit att "förmedlingspedagogik" skulle bannlysas. Orsaken man framfört var att ingen kan lära någon annan människa något. Det man lär sig lär man sig själv. Detta tolkades som ännu ett argument för att lärare inte behövde vara särskilt ämneskunniga.

På engelska skiljer man mellan begreppen "teach" och "learn". Enligt didaktikerna och deras uttolkare saknar tydligen det förra begreppet mening.

I jämlikhetens namn får man inte nivågruppera skolklasser. Förr fanns "allmän" och "särskild" kurs i grundskolans matematikundervisning, där "särskild kurs" var den något ambitiösare. Numera lär dessa alternativ inte finnas längre. Inom såväl grundskolan som gymnasieskolan ska läraren möta eleverna på deras "kunskapsnivå". Eftersom det alltid finns viss spridning inom klasserna, så blir därmed "tavelundervisning" omöjlig. Läraren ska alltså gå runt i klassrummet och handleda eleverna enskilt. Att detta i högsta grad är nivågruppering vägrar dock didaktikerna att erkänna. Just påbudet att möta varje elev på den egna kunskapsnivån främjar okynnet att ta en vecka ledigt under pågående termin, då charterresorna är som billigast. Sedan anses det vara lärarens ansvar att eleven kommer ikapp. Hur hänsynslöst sådant beteende i själva verket är, förstår man om man betänker att de framgångsrika eleverna därmed får än mindre handledning och stimulans, eftersom läraren måste prioritera återhämtning av försummelser hos skolkarna. De högpresterande elevernas frågor kan besvaras med "Det var en bra fråga! Försök själv att ta reda på svaret!" Ibland kunde man faktiskt få för sig att mindre kunniga lärare, genom dessa skolkare, fått ett gott svepskäl att slingra sig undan. "Tavelundervisning" får elever som halkat efter att bli obehagligt varse om detta. Med individuell handledning är ett sådant faktum inte lika tydligt.

Som lärare i skolan fick jag en gång en kollega som varit överfurir i det militära, där han blivit övertalig. Södertälje kommun välkomnade honom som matematiklärare. Han var bevars "vuxen". Under en lektion kom han in i mitt klassrum med andan i halsen och sade att det måste stå fel i läroboken. Där stod nämligen att $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Han trodde det var tryckfel och att termen 2ab inte skulle vara med. Ingen lämplig ämnesföreträdare, precis.

Motsvarande har även hänt inom andra ämnen, enligt vissa kolleger. En fd. "dagisfröken" omplacerades till exempel av kommunen som lärare i engelska. Det fina var ju att eftersom hon inte hade några speciella kunskaper i något ämne alls, så kunde hon få undervisa i vilket ämne som helst. Jag var fackligt ombud för lärarna på den tiden, och framförde i denna egenskap mina protester till skolledningen. Jag fick då det häpnadsväckande svaret "Hon har rest mycket och talat mycket engelska i tullen". (Hon och hennes man var delägare i en andelslägenhet i Spanien, dit de reste regelbundet. Det var alltså inte ens fråga om tulltjänstemän med engelska som modersmål hon brukade tala med.) Jag sade att svaret var ett hån gentemot alla lärare som bedrivit akademiska studier finansierade med studielån och som verkligen var intresserade av sitt undervisningsämne. Det var också ett hån gentemot eleverna. Dessa synpunkter avfärdades givetvis som helt irrelevanta.

Det är vanligt att didaktiker förordar utomhusundervisning. Frisk luft är ju nyttigt, till skillnad från den unkna luften i klassrummet. Sådan pedagogik tilltalar naturligtvis skolledningar. Därmed kan man ju emellanåt frigöra ett klassrum, vilket är förmånligt för budgeten när man betalar en fiktiv internhyra. Att utomhusundervisning tenderar att handla om trivialiteter tycks inte ha någon betydelse. Uppgiften kan till exempel vara att rita ett stolpdiagram över hur många bilar av olika fabrikat som står på en parkeringsplats. Det anses viktigare att slippa flytta fiktiva pengar från ett internt konto till ett annat, än att undervisningen blir ändamålsenlig. (Då jag 1996 börjat som matematiklärare vid Södertörns högskola blev jag kontaktad av en rektor för en gymnasieskola. Jag tillfrågades om jag kunde föreslå något "matematikprojekt, lämpligt för gymnasister". Efter några dagar översände jag inte bara "något", utan drygt tio olika förslag. Tiden gick och jag fick inget gensvar. Jag kontaktade då skolan ifråga och fick beskedet att inget av mina förslag ansågs som användbart. Vad man i själva verket velat ha var idéer som kunde genomföras utanför klassrumsmiljön, så att ett klassrum kunde frigöras.)

Rena trivialiteter brukar förstoras till problem som didaktiken sedan ska hjälpa till att lösa. En didaktisk innovation, som till och med uppmärksammats i ett nyhetsinslag i TV, är att man kan integrera olika ämnen, som matematik och gymnastik. Eleverna kan få ställa sig i cirklar, rektanglar och trianglar. Gymnastik i all ära, men jag anser att det finns betydligt effektivare sätt att studera geometriska figurer. Jag har aldrig varit med om att någon didaktiker givit sig i kast med sådant som brukar utgöra verkliga trösklar för eleverna, som exempelvis gränsvärdesbegreppet.

När jag själv var skolelev framhölls de framgångrika eleverna som goda förebilder. Det delades ut stipendier och premier. Detta är länge sedan och skulle numera kanske anses otidsenligt. Men barn och ungdomar skaffar sig förebilder på ett eller annat sätt. Om man underlåter att framhäva de duktiga, så lämnar man istället fältet fritt för annat och låter dem med den senaste mobiltelefonen och dem som lyckas följa klädmodet utgöra förebilder.

Inom den kommunala skolan har skolledningarna prioriterat det kamerala. Det gäller ju att hålla sig inom budgetramarna. Didaktikernas idéer, om än kanske ensidigt tolkade ibland, har därmed varit till stor hjälp. (Med didaktikens hjälp kan man få stöd för många olika idéer. Det går därmed att sålla fram vad man för tillfället behöver.) Erfarenheten har med åren visat att beträffande elevernas kunskaper har det i alla fall blivit precis tvärt om mot vad man förespeglat.

Friskolor ska inte bara hålla sig inom budgetramarna. De ska dessutom generera vinst åt sina ägare. Olika inslag i nyhetsmedia har under åren belyst att förhållandena där minsann inte brukar vara bättre

◇ ◇ ◇ ◇

Efterlysning

Två av mina gamla matematiska vänner, Olle Hanner och Lars Nystedt, avled i höstas. Jag skulle gärna vilja ha kontakt med personer som t.ex. haft Olle eller Lars som studiekamrat,lärare eller kollega, och som är villiga att dela med sig av sina minnen.

Göran Björck
Kvarnvägen 13
SE-192 51 SOLLENTUNA
08 - 96 19 80
070 - 555 3047
bjorck@math.su.se

Intervju med Harald Helfgott

Ulf Persson

Harald Helfgott
(Foto: modern - Edith Seier)

Harald Helfgott har rönt stor uppmärksamhet de senaste åren genom sitt bevis av den svaga formen av Goldbachs förmodan, d.v.s. att varje udda heltal kan skrivas som summan av tre primtal. Han är bördig från Peru och studerade i USA. Han har varit knuten till Paris men är sedan i höstas verksam vid Göttingen. I december förra året anordnade Per Salberger en liten workshop i talteori vid institutionen i Göteborg. Vid den officiella middagen föreslog Samfundets förre ordförande, Pär Kurlberg, att jag skulle intervjua Helfgott. Denne accepterade glatt förslaget och nästföljande dag hade han och jag ett trevligt samtal i institutionens fikarum medan vi skolkade från några av föreläsningarna. Vad som följer är en tolkning av samtalet. Intervjuoffret har självt har varit mycket noggrann med att granska de formuleringar som lagts i hans mun.

◇ ◇ ◇ ◇

Interview with Harald Helfgott

UP: Harald is not the kind of name you expect from somebody from Peru. What is your background?

HH: My father is in Math Education - my mother incidentally, is in Statistics - and I take it he wanted to reflect the kind of hopes he had for me. To name me Albert or Karl Friedrich would have been far too pretentious, naming me Bertrand would have got me teased at school, but naming me after the brother of Niels Bohr would show very good taste. And additionally as Harald Bohr participated in the Olympics it would also encourage his hopes for a sportsman in the family. But of this nothing came. I am terrible at sports.

UP: So you were nurtured at an early age as a future mathematician or physicist?

HH: I would not say that, but it did not hurt that there were a lot of books in math lying around.

UP: Do you remember when you first came aware of say primes?

HH: I do not, but it must have been at a rather early age. I do remember two things which made a deep impression on me when I was very young and which I hence can date . I cannot have been more than five or so when I learned that $0.999\ldots$ was the same thing as 1. I recall that this excited me a lot. I may have been eight or nine when I first encountered imaginary numbers and I wondered about the square root of i, and then I was able with my rudimentary skills in algebra express it as another imaginary number and I found that very satisfying.

UP: Achieving closure instead of an unending process.

HH: Exactly.

UP: So you participated in the mathematical olympics?

HH: I did participate in my early teens in mathematical competitions, far too early I would say. It was not always easy to participate either. I remember one regional olympics that too took place in Chile. We managed to scrape together just enough money for a one-way plane ticket, and then came back by bus. And it was not an express bus either. It convinced me physically that Chile is indeed a very long country. I also participated in the Iberoamerican Olympiad. But never at the IMO. Peru, never a rich country, was going through a severe economic and institutional crisis, with the result that it did not send teams to the IMO from 1990 to 1996, inclusive. That, of course, was what would have been my time window.

UP: Would you say it is a good experience?

HH: For me at least I would say so. It has its drawbacks and advantages but I think that the latter prevail. What was particularly good about it was the training we received in preparatory sessions, which incidentally was not geared towards solving actual problems but to enhance your mathematical culture. It is this latter aspect I found particularly beneficial.

UP: I guess you grew up in Peru, but when did you leave?

HH: I grew up in Peru and left for the States after I had finished high-school. That was when I was sixteen. Incidentally my parents had left for the States shortly before that. I did not have a Green Card or any such thing, and that made it hard to apply for a scholarship. Fortunately I did get one from a college that gave a non-trivial number of scholarships to foreign students, and also had very good teachers, though it only had a serious math student every third year or so.

UP: But I guess you got a solid general education anyway. But what made you specialize in analytic number theory?

HH: I was always interested in number theory so it became natural when I went to Princeton, but I must admit that my undergraduate training was not really adequate for what was in store for me.

UP: To get engaged in number theory is easy, at least initially, as you do not need to learn a large apparatus to appreciate it. What was your background actually in number theory?

HH: I had taken a course in algebraic number theory, and had read Harvey Cohn's little book, as well as bits of Lang; I had also read Atiyah-Macdonald on commutative algebra. It had actually all started with Vinogradov's little book, which I got on what must have been during my fourteenth year from one of our volunteer olympiad coaches. Do you know it?

UP: I know of the author of course but I did not know that he had written an elementary book on number theory.

HH: It is a great book. Elementary of course, but it has really good exercises from which I learned a lot. In fact it was not until much later I realized how good there were because they included many of the main steps needed to do much more advanced topics.

UP: Analytic number theory is not based on slick general theories, which some mathematicians seem endlessly fascinated by, instead you really get your hands dirty and I guess you appreciate that. This is part of your mathematical character and taste?

HH: Yes I like to get my hands dirty, that is the only way you really get to know and understand mathematics. It is certainly something I find congenial.

UP: It is very combinatorial without being part of the discipline of combinatorics which is being pushed. You cannot isolate combinatorics from mathematics in general, we all combine, be it just mathematical arguments.

HH: I agree with you. I would put it this way - there is a difference between knowing combinatorics and having a combinatorial mind.

UP: And this is what you have? A combinatorial mind? You can never know what to expect in mathematics so you have to make up the combinatorics on an ad hoc basis so a corpus of combinatorial facts does not help you.

HH: Yes, although I would not be so categorical, but there is a great deal of truth to that. I have learned many tricks and useful methods from combinatorics, but as I said, it is the propensity of thinking combinatorially that really counts. This reminds me of some very good advice I got from Conway, a combinatorist, who said that some of the people who do the best work in combinatorics come from outside combinatorics. In the same way with computer science, the best computer scientists had a background in mathematics.

UP: Mathematics has a much richer culture, and this is why it should be a core subject, with a firm grounding in mathematics, other related subjects will appear easy.

HH: Yes - once again, perhaps I would not be so categorical, but there is a great deal of truth to that.

UP: So did you consider going into computers?

HH: I certainly did, but I decided against it, in part for reasons you just gave. But I do a lot of programming in C, and I think I am rather good at it, and could have made a living doing it, if mathematics had not worked out.

UP: Programming is so different from mathematics as you always get a feed-back and do not get stuck.

HH: I would not say that, at times you do get stuck. But then of course you have a problem in computer science.

UP: I would say that programming is a very relaxed activity as you always feel you will be able to solve it.

HH: I would not say that.

UP: In the case of your theorem it must have been a risky business. If you had not been able to bring down the constant to a reasonable number below which computer checking can be done your result would only have been known among experts and as yet another attempt to be eventually superseded. What made you keep on going? How long did you work on it?

HH: You always take a risk of course, but I felt pretty confident that I would be able to substantially improve upon previous work, whether significantly remained to be seen. As to how long, I started working on it in 2006,..

UP:..which is a rather long time ago ..

HH: –but of course I did not work on it continually, you are bound to get stuck from time to time and need to take a break.

UP: But it became a large manuscript hundred of pages which I suspect are not so penetrable.

HH: This is always the problem with writing up mathematics, and I did spend a lot of effort revising it.

UP: By the way how do you read a paper in mathematics?

HH: If it is in a subject I work on, I pretty soon get to the main point, and disregard most of the writing, but it is very different if you are new to the subject, then the full text matters, I presume.

UP: It is often said that the most efficient way of conveying mathematics is to have a personal conversation with somebody, and that the formal way mathematics is presented for publication obscures the ideas.

HH: Personal conversations have many advantages that a written account cannot hope to match.

UP: To go back to computers I understand that in the course of the proof you had occasion to do serious work, that could not be done on your laptop.

HH: That is true - there were some involved calculations, in particular those that D. Platt had to do to extend his work on zeros of L functions so that I could use it in my project. I was hampered somewhat by not having a grant, but I got access to donated computer time.

UP: Do you think computers have had a bad effect on mathematics? Meaning if they had not been around we would have exerted ourselves more, in particular that you might have been forced to lower your constant more, going that extra mile so to speak.

HH: I think I have gone enough miles. As to computers making mathematicians superfluous I think it is nonsense. There has been some advances in proof checkings and even providing computer proofs.

UP: The latter is not that common I understand, and the computer proof people still talk about Appel and Haken back in 1976 that caused a lot of controversy at the time.

HH: I think that the problems people had with it was first that there was a lot of human interaction with the proof, and that is a source for many mistakes. Secondly it gave little insight in why it was true as it was a lot of case by case analysis, but that is of course true for many regular hand-made proofs as well.

UP: That is very interesting, and I would like to get back to it, but first I was not thinking of computers and proofs as much as that with the computational potential of modern digital technology mathematics becomes a little bit more like natural sciences producing big data which becomes by itself a source for inspirations. One has started to speak about mathematical experimentations in a serious way.

HH: Of course Gauss was a pioneer in that respect as well. And he loved to calculate, and when bored he worked out the primes in various intervals in order to get some new ideas about their distribution.

UP: Speaking about primes and intervals. Is there a simpler way of exhibiting the complete list of primes up to a given cut-off than Eratosthenes sieve, and how far has it really been done. You cannot go up to a list up to 10^{80} say as there is not enough protons around in the universe.

HH: I am a bit puzzled. Who is interested in a list of all primes up to a very large number?

It wouldn't even be terribly manageable, nor of any particular use either, subtleties of prime distributions exhibit themselves far higher up. You may be referring to the fact that the proof I give works for odd integers greater than 10^{27}, and leaves smaller odd integers to be checked by brute force. Dave Platt and I did perform that check - we did it up to more than $8 \cdot 10^{30}$, in fact - but it doesn't require a list of all primes up to there; it just requires one to construct an increasing sequence of primes up to $8 \cdot 10^{30}$ such that the difference between any two consecutive primes in the list is at most $4 \cdot 10^{18}$. Since Oliveira e Silva, Herzog and Pardi had already checked that every even integer up to $4 \cdot 10^{18}$ can be written as the sum of two primes, this is enough to establish the ternary conjecture up to $8 \cdot 10^{30}$. It's a well-known strategy used before - a clever use of brute force, if you wish.

UP: This ties up with the probabilistic approach, what is the probability that a given even number is the sum of two primes, it must be very close to one. How large an interval would you need to reasonably expect a counter example?

HH: It is enough to check the binary conjecture for just the first few even integers to convince oneself that it should be true - a simple probabilistic model then tells that the probability that it be false should be extremely small. Of course we are talking about probabilistic heuristics here, not about a proof.

UP: This also means that the number of representations for $2n$ grow fairly fast with the size of the number. Bigger than any power of n below n itself.

HH: As I said no one doubts it.

UP: What made you interested in Goldbach in the first place, the allure of a classic problem everyone knows about (the Fermat factor) or that it provided a challenge with the techniques you had mastered, which of course is a common way for mathematicians to get involved with problems.

HH: The second one, I would say. The fame of the problem was something that I've found a little annoying at times. The most interesting thing about it, from a historical perspective, isn't really the fact that it has been open for so long - it is the role it played in the development of the circle method. It wasn't the first problem to which an early version of the circle method was applied - that was an estimate on the partition function by Hardy and Ramanujan - but it did play a key role in the further development of circle method, and a better understanding of its scope, first by Hardy and Littlewood and then by Vinogradov.

UP: Does the trick of using the triple convolution go back to Hardy and Littlewood?

HH: Sure, though they didn't put in that way. That is something that is a little closer to how Vinogradov put things, though he didn't present it quite in that way either.

UP: By the way how familiar are you with primes as individuals, do you know all the primes up to a hundred by heart. There is the story of Grothendieck and primes such as 27 ..

HH:(chuckles) ... and 57. I do not need to know that of course. Some small primes like 2, 3 you cannot avoid at least not when elliptic curves are concerned..

UP:.. and 5 also in the proof of resolution of singularities, but above that speaking about 7, 11, we are talking about generic primes and you may not commit them to memory but as a mathematician it is hard to avoid the first few. By the way Weil said that analytic number theory is not really number theory, at least not in the sense that classical algebraic number theory is about numbers, but integral estimates and such things and thus analysis.

HH: So what? You use analytic tools as that turns out to be powerful and convenient.

UP: But when working on Goldbach you surely were more excited by the methods than about the proposed fact about numbers?

HH: Once again, so what?

UP: To change tack again. When was the first time you felt that magic entered mathematics?

HH: I am not sure I understand To feel that something is magical simply means you have not understood something yet. What do you mean specifically?

UP: In my case, and I suspect for many people, it was when you encountered complex analysis. The residue theorem, for one thing, something unexpected. Much of function theory does not make sense unless considered over complex numbers. And then this classical connection by the Riemann function how to prove theorems about primes using complex analysis.

HH: Well, it looks like magic at first. Then you become habituated to it, and later you come to understand that this is the natural way in which the subject structures itself, so to speak.

UP: There is of course the elementary proof of the Prime Number Theorem that made a splash at the time, but I guess it does not really make for any more insights.

HH: That isn't really true - it does present some good insights. However, if I had to teach the subject, I would stick to the classical way of complex analysis or Fourier series.

UP: What would you say is the most central part of mathematics that should be taught to students in high-school.

HH: Proofs. It does not have to be Euclid, although this is very convenient. The important thing is that students gets exposed to rigorous reasoning.

UP: By the way what is your favorite proof of Pythagoras?

HH: Oh that is actually based on something that is actually hard to prove rigorously, namely that areas scale by squares, but once that is settled you only subdivide a right angled triangle into two smaller ones, each similar to the first and it all adds up.

UP: Funny this is my favorite proof as well. Once you have seen it you cannot forget it, being based on such a simple principle, although hard to prove rigorously. You almost feel as if you understand why it has to be true. Whenever I have occasion to present the proof in Euclid I always need to look it up first. What lines to draw.

HH: The Greeks were very much concerned with rigor, and they did not work with real numbers directly, so that is actually more elementary.

UP: But not as transparent. More like a verification. In fact what makes us convinced of a theorem being true is not so much the long deductive chains, which often are in the nature of a computation, but how the theorem fits together with other theorems, how it may even through light on them. It is this interconnected web that is the basis for our belief in the truth of mathematics.

HH: Could be, but it is important to go through all the steps as well.

UP: You always do that?

HH: Well, as a mathematician, you have to do it, at least when you are writing your proofs. For reading, your development goes the other way around - you learn over time to find the essential bits.

UP: So what is your take on the philosophy of mathematics. Is it only a human activity?

HH: Doing mathematics is of course a human activity more or less by definition, but I am like most mathematicians convinced of an independent mathematical existence. I know it is naive, and when pressed I become a formalist as most other mathematicians.

UP: So you are a Platonist. You do believe in the existence even of very large integers which admit of no physical representation. If not would you have cared enough to pursue your proof?

HH: I guess not. Still, I believe in the need for solid foundations. And when it comes to model theory, you can actually use the foundations as part of current mathematical praxis - a little like using the columns and arcs under the building to compose a new habitable space.

UP: You think that mathematics has to be grounded in logic? The philosopher C.S. Peirce claimed that numbers were more fundamental than logic.

HH: He may have had a point.

UP: Was it not only when mathematics was introduced in logical exploration it started to become really interesting in the 30's

HH: You are referring to Gödel? And Tarski?

UP: Among others. Now when I have been going to logic lectures it strikes me that logic is a species of applied mathematics, rather than the other way around.

HHH: That would be ironic. Still I see what you mean, as I told you I have started to come in contact with model theory lately, and the logicians argue just as mathematicians, presenting their arguments in the same informal style as we do.

UP: It is uncannily like mathematics. But maybe we are digressing too much. Do you have other interests than mathematics.

HH: That was brutal. Yes of course. I am interested in music, and literature of course, and besides I am a little bit of a cinephile. But I should add, only as a listener, as a reader and as a spectator.

UP: So in particular you do not play an instrument?

HH: No, I never learned, and now of course it would be far too late. It is a question of acquiring a motor skill, and that is hard. But I appreciate music, and I know a bit of music theory, not very much though.

UP: So you would claim that there is a strong connection between mathematics and music.

HH: Yes there is of course a very direct one through physics and mathematics.

UP: But this is formal, it does not seem to have much to do with music as such, meaning its emotional impact. Some people like du Sautoy claims, or at least appears to claim, that music can actually be generated mathematically. That the symmetries of mathematical concepts can actually be translated into music. Particularly the music of Bach is supposed to lend itself to such speculations.

HH: I would not go that far. In fact it is very hard for me to believe that you could create music with emotional content without direct human intervention.

UP: So the mathematical symmetries in the music of Bach could have been the result of Bach creating variations on themes mathematically presented to him, and it is that kind of final human intervention you were talking about?

HH: I was not thinking in any precise terms, but sure, what you are suggesting would fit the bill. Without that final touch, the emotional element would be absent.

UP: People who are musical claim that computer generated music is boring. Maybe not immediately, but it does not stand up to repetition.

HH: Another thing which I found is interesting is that music is not exclusively human. I have a friend who has studied birdsong, and found out that it is surprisingly similar to human music, and of course we humans find birdsongs, at least some of them, very pleasing. They seem to use the same kind of intervals as does human music, fourths and fifths and so.

UP: But it is not as complicated.

HH: No, and when it seems complicated it may simply be random. But it is interesting as it is an example of a human activity which can be seen outside humans. The same thing supposedly would be the case with mathematics, would there be somewhere, sufficiently evolved intelligences. After all mathematics has in my opinion a much stronger case for independence of human intelligence than does music.

UP: But such we have so far not seen, maybe luckily. To get down to earth again, I take it that when you talk about music you talk about classical music.

HH: Yes, or more precisely Western classical music. I have had some contact with what you may call other classical traditions - Carnatik and Hindustani, in particular - but I do not yet have the necessary background to appreciate them properly, though I find them appealing.

UP: So even within the single human race, remarkably genetically uniform we are being told, there is a wide variety of musical traditions and appreciations. What about possible mathematics?

HH: Music can easily transcend cultural boundaries in general, and as I should have pointed out I see this as one of the aspects that makes music similar to mathematics, but mathematics is of course even less culturally dependent than music, and what putative extra-terrestrial intelligences could develop mathematically I refuse to speculate on.

UP: Let us talk about literature. You have a fair amount of books I take it.

HH: That is true - I have a fair amount of books.

UP: And how many of them would be math books?

HH: If you would include the math books in my office, I would guess about a half.

UP: That is a high proportion I would say, even for a mathematician.

HH: I do not know about that. Maybe, if you keep in mind that you seldom read a math book from cover to cover as you do with a novel.

UP: You read a lot.

HH: Not really. The trouble is that I do not read as much as I would like to. There simply is not time.

UP: You spend all your time doing mathematics.

HH: Of course not, but as you know life is filled with duties and other things that actually take up a lot of time, and usually nothing to show for it. I read the most when I went to high-school, this is usually the time in your life when you have most time on your hands. Would you not agree? And as to reading I would say that I have a fairly good command five languages. Spanish of course, as it is my Native tongue. French as a consequence, English of course and also German.

UP: And the fifth?

HH: You are keeping count. In fact it is Esperanto. In addition to that I have learned some Russian on the side, not enough really to read it fluently, it being written in a different alphabet also slows me down a bit when learning new vocabulary. The different script simply makes it harder for me to absorb new words than I am used to. So far I need to read books with simplified vocabulary.

UP: Such as childrens' books.

HH: True, but not only that. And I have also taken time to learn Classical Greek, and I would like to return to that. But I have promised myself not to study Chinese until I am retired.

UP: When in China and surrounded by Chinese characters you feel like an 'analphabet' and you feel very intrigued by all those characters around you and what they could possibly mean. I think it should be part of general education to know, say a hundred characters. They are after all language independent.

HH: I would not use the word 'analphabet' after all it is not an alphabet...

UP: .. but the English word 'illiterate' does not have the same powerful sense of exclusion as the one familiar to us in many other languages. Anyway, knowing a few Chinese characters would be like being familiar with some Latin quotes. But I am digressing again. What is your favorite language in reading, and who are your favorite writers in different languages?

HH: I could not answer that. There are far too many and they cannot really be compared.

UP: But could you give us a sample of not so known writers that you like. That is of course more personal than to refer to standard names that most people share and hence become conventional choices.

HH: I see what you mean. As to Spanish poets Neruda is such a choice, and while I do like much of his work, an example of somebody whose work I find more congenial would be Miguel Hernandez - he is known in Spain, but I believe he's barely known outside the Spanish-speaking world. As to novels I have not even finished the first volume of Proust. There is not enough time.

UP: So you have much to look forward to. Finally, you are getting tired I see, and I do not want to torture you much more.

HH: No problems, I did get enough sleep last night. By the way when is the next lecture?

UP: Never mind. You mentioned an interest in cinema. Would you care to elaborate?

HH: (perks up). I be delighted. Bergman is one of my favorites

UP: Just as with Illusie I see. Go on!

HH: I did not like the first movie I saw by Bergman. It was 'Fanny and Alexander' but the earlier ones I really loved. Just remind me of some titles!

UP: That movie was not typical of him, too epic, pandering to public taste. It was his last and meant to be his last, after that he was satisfied with doing some shorter works for TV. Vintage Bergman is from the 50's and 60's, almost all in black and white. In the 70's he turned to color. What about 'Silence' it was a minor scandal when it came out in 63.

HH: I never saw that one. But I loved 'Wild Strawberries','The Virgin Spring','Through a Glass Darkly' and of course the 'Seventh Seal'. Give me more, remind me!

UP: 'Cries and Whispers', 'Scenes from a Marriage' but that was not really a movie.

HH: I never saw 'Scenes from a Marriage' and 'Cries and Whispers' I have not even heard of. More!

UP: 'Smiles of a Summer Night'. There are so many. What do you like about them?

HH: I liked 'Sawdust and Tinsel', 'Summers with Monica','Persona'. I'm a bit ambivalent about 'The Virgin Spring', actually and about 'The Serpent's Egg' as well, though it had much going for it. As to 'Autumn Sonata' I must admit that I was a bit bored.

UP: I guess we can go and on, but you are tired and a lecture is coming up. It has been a real pleasure talking to you.

HH: You are welcome. Will you be able to remember everything we have said?

◇ ◇ ◇ ◇

Proth numbers

Ulf Persson

Let us start with a simple observation and concomitant definition.

Any odd number n has a unique representation

$$n = l \cdot 2^d + 1$$

with l odd and $d > 0$.

Let us denote $l(= l(d))$ the length of n and $d(= d(n))$ the depth of n. We have the following lemma.

LEMMA: *If $d(m) < d(n)$ then*

$$a) \qquad d(mn) = d(n)$$

$$b) \qquad l(mn) > 2^{d(mn)}$$

while if $d(m) = d(n)$

$$c) \qquad d(mn) > d(n)$$

PROOF: This follows immediately from an obvious multiplication

$$\begin{array}{rcl} n_1 n_2 & = & (l_1 2^{d_1} + 1)(l_2 2^{d_2} + 1) \\ & = & (l_1 l_2 2^{d_2} + l_2 2^{d_2 - d_1} + l_1) 2^{d_1} + 1 \\ & = & l 2^{d_1} + 1 \end{array}$$

Where l is obviously odd if $d_2 > d_1$ and $l > 2^{d_2} > 2^{d_1}$. While in case $d_1 = d_2$ l becomes even, which proves c)

Numbers n such that $l < 2^d$ are called Proth numbers and the lemma above shows that there are strong conditions on the factors of a Proth number. In fact we can make the following observation.

COROLLAY. *If f is a factor of a Proth number p then $d(f) < d(p)$*

PROOF If f is a factor and g the cofactor (i.e. $fg = p$) then we will have $d(f) = d(g)$ if not b) would show that $p = fg$ would not be Proth. By c) we conclude that necessarily $d(f) < d(p)$.

It is of course trivial to make a list of Proth numbers, note though as the numbers increase they tend to be scarcer. Typically the gaps between two Proth numbers is of the order of square root of n.

This can easily be made precis by the following elementary observation.

LEMMA The number of Proth numbers in the interval $[2^n, 2^{n+1}]$ is given by $2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1}$.

PROOF: Let $][a,b][$ be the number of odd numbers between 2^a and 2^b, then the sought out number is obviously given by $\sum_{\frac{n}{2}<k\leq n}][n-k, n+1-k][$ which can be rewritten as $\sum_{0\leq k\leq \frac{n}{2}}][k, k+1][=][0, \lceil \frac{n}{2} \rceil][= 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Their interest is due to the following observation known as Proth theorem.

THEOREM: *A Proth number p is prime iff there is a number a such that*

$$a^{\frac{p-1}{2}} = -1(p)$$

Note: This is obviously necessary because for any (odd) prime p we choose a generator a for $\mathcal{Z}_p^*$. Thus the sufficiency is the interesting aspect.

PROOF: The assumption implies that there is a smallest n such that $a^n = -1(p)$. From this it follows that $\frac{p-1}{2}$ is an odd multiple of n i.e. $d(p) = v_2(n)+1$ where $v_2(n)$ is the exponent of 2 in the prime decomposition of n. Assume that q is a prime factor of p. Obviously *a fortiori* $a^n = -1(q)$ and if m is the smallest exponent such that $a^m = -1(q)$ we have that n is an odd multiple of m thus $v_2(m) = v_2(n)$. Furthermore $a^{2m} = 1(q)$ hence $q - 1$ is a multiple of $2m$ and hence $d(q) \geq v_2(m) + 1 = v_2(n) + 1 = d(p)$ which contradicts the corollary, and we are done.

Note: An even simpler proof, dispensing with the corollary above, can be obtained if one observes that there will be a prime factor $q \leq \sqrt{p}$, then the estimate $d(q) \geq d(p)$ alone leads to a contradiction.

Proth primes of form $q \cdot 2^{20} + 1$

7340033($q = 7$)	13631489($q = 13$)	26214401($q = 25$)	28311553($q = 27$)	70254593($q = 67$)
101711873($q = 97$)	120586241($q = 115$)	141557761($q = 135$)	147849217($q = 141$)	158334977($q = 151$)
185597953($q = 177$)	204472321($q = 195$)	221249537($q = 211$)	246415361($q = 235$)	290455553($q = 277$)
305135617($q = 291$)	311427073($q = 297$)	330301441($q = 315$)	347078657($q = 331$)	359661569($q = 343$)
361758721($q = 345$)	399507457($q = 381$)	409993217($q = 391$)	447741953($q = 427$)	468713473($q = 447$)
493879297($q = 471$)	531628033($q = 507$)	581959681($q = 555$)	605028353($q = 577$)	655360001($q = 625$)

◇ ◇ ◇ ◇

Olof Hanner in memoriam

Peter Sjögren

Professor Olof Hanner avled den 19 september 2015 i Göteborg, i en ålder av 92 år. Han var hedersledamot av Svenska Matematikersamfundet.

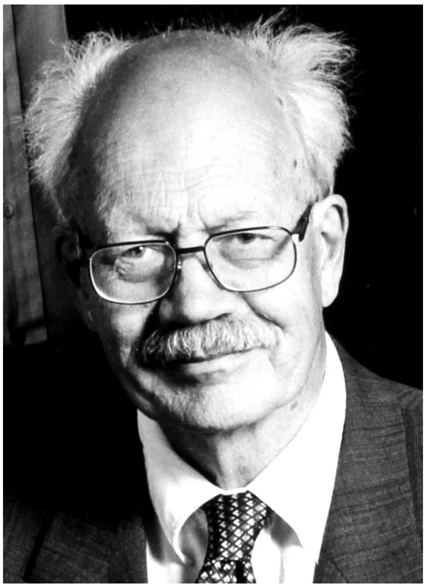
Olof Hanner cirka 1960
(Fotograf okand)

Carl Olof Hanner föddes i Stockholm den 7 december 1922, i en familj av revisorer; hans far, John Hanner, liksom hans farfar och farbror och senare även hans två år äldre bror Per, utövade alla detta yrke. Efter studentexamen 1941 och inledande studier och amanuensanställning vid Stockholms Högskola avlade Hanner fil.lic.-examen i matematik där 1947. Han verkade därefter som biträdande lärare i Lund under ett år. Läsåret 1949/50 tillbringade han med ett stipendium vid Institute for Advanced Study i Princeton. De kunskaper och den inspiration som han fick i den intensiva miljön i Princeton ledde bland annat till två publicerade vetenskapliga arbeten. Tillsammans med ytterligare ett arbete kom de att utgöra hans avhandling, med titeln Retraction and Extension of Mappings, då han disputerade vid Stockholms Högskola 1952. Doktorsgraden ledde till docentkompetens och docenttjänst. År 1957 blev han laborator i matematik vid Stockholms Högskola, och i denna funktion reste han runt i landet som censor vid studentexamina.

Det område av matematiken som blev Hanners efter Princetonvistelsen är allmän topologi, och han fortsatte att forska inom detta område under resten av 1950-talet, vilket resulterade i ytterligare ett antal publikationer. Flera av dem gjorde internationella avtryck, och ledde till etablerande av begrepp som Hannerpolytoper och Hannerrum. Dessa behandlas mer ingående i texten nedan, där det framgår att Hannerpolytoperna fortfarande är högst aktuella. Topologin var inte väl representerad i Sverige vid denna tid, och Hanner måste betraktas som autodidakt. En aktiv skola i topologi fanns då i Polen, som Hanner hade kontakt med och besökte 1957, och därvid gjorde starkt intryck på sina kolleger.

Olof Hanner var till sin karaktär blygsam, och han tvekade under en tid att söka professur eftersom han menade att topologin inte var tillräckligt central för att han skulle kunna erbjuda sig att handleda forskarstuderande. Men när Göteborgs Universitet ledigförklarade sin andra professur i matematik sökte och fick han denna 1963. I Göteborg gjorde han sig snabbt känd som en lärd matematiker och en utomordentlig föreläsare, och bidrog starkt till att de forskarstuderande i matematik fick en högkvalitativ och bred grundläggande utbildning. Särskilt omtalade blev hans kurser i topologi, som han dessutom försåg med mycket välskrivna kompendier. Ett med titeln *Inledning till Algebraisk topologi* var särskilt betydelsefullt och användes under decennier regelbundet inom forskarutbildningen. Han var även själv handledare för två elever fram till doktorsexamen. Efter persondatorernas inträdande intresserade han sig för dessas användning och skrev kompendier i olika programmeringsspråk. I sitt författande använde sig Hanner av stenografi, och renskrev sedan själv texterna på skrivmaskin.

Olof Hanner var kanske en representant för en äldre typ av professor som inte bara ägnade sig åt forskning och forskarhandledning utan även var aktivt intresserad av den inledande matematikundervisningen. Exempelvis gjorde han inhopp i föreläsningarna och presenterade på ett mycket klargörande sätt viktiga begrepp som Taylors formel och annat. Han författade också ett antal läroböcker för det som då kallades 1- och 2-betygskurser, i geometri, kombinatorik och lineär algebra, och deltog i utgåvor av tentamensproblem med lösningar. Professor Hanner var känd för sina intressanta muntliga tentamina, som ofta utvecklade sig till föreläsningar om matematik för tentanden.

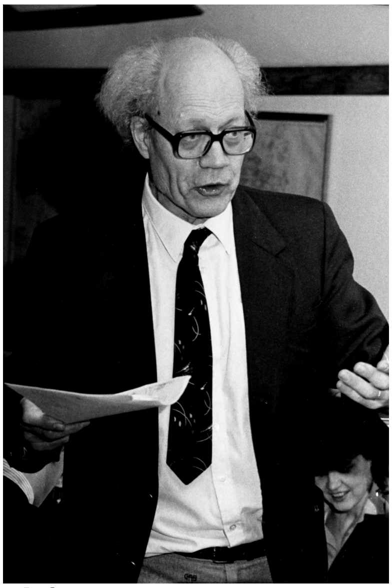


Olof Hanner 1998
(Foto: Atelje Uggla)

Hanner var mycket engagerad i det som nu kallas den tredje uppgiften, att förmedla kunskap till en bredare publik. Han skrev flera artiklar i tidskrifterna Elementa och Normat, med titlar som *Vad är topologi?*, *En axiomatik för euklidisk och icke-euklidisk geometri*, *Olösbara knutar* och *Regelbundna polyedrar i flerdimensionell geometri*. En av sina stora insatser i den utåtriktade verksamheten gjorde Hanner för Skolornas matematiktävling. Under många år medverkade han mycket aktivt i utformningen av problemen och bedömde tusentals tävlingsbidrag, och han publicerade också en samling tävlingsproblem med lösningar.

Liksom många andra matematiker var Olof Hanner intresserad av tankekrävande spel, som bridge och det japanska brädspelet go. Som matematiker var han en utpräglad problemlösare, och fann inspiration till matematiska undersökningar även inom sina spelintressen. Go blev han först bekant med under sitt år i Princeton där spelet var populärt bland matematiker. Mer aktivt intresserad blev han sedan han några år senare råkat hitta en japansk bok i ämnet. Ett felaktigt exempel i denna gav upphov till ett matematiskt arbete inom spelteori, publicerat i Pacific Journal of Mathematics. Han insats var ämne för en artikel i Nordisk GoBlad från 2004 med titeln *A Swedish pioneer of go and of its mathematical investigation*. I liknande anda tillkom ett par artiklar om Rubiks kub. Hans spelintresse ledde också till uppsatsen *Mathematics, a solitary game*, som tillkom under en vistelse i USA 1969-70. Där jämförde han matematikens sätt att argumentera med solitärspelet, som han skall ha genomskådat redan vid 9-10-årsåldern.

Bridge fick han lära sig spela i sin familj redan vid 8 års ålder, och intresset fanns kvar under hela hans liv. Under sin aktiva Göteborgstid spelade han regelbundet tillsammans med matematikerkolleger. Även inom detta område ledde hans intresse till en vetenskaplig matematisk publikation. Efter sin pensionering 1988 kom han att intressera sig för hur bridgetävlingar skulle organiseras på optimalt sätt. Ett samarbete med två bridgeexperter resulterade i ett större verk, *Tävlingsledaren*, som senare kom att bli översatt till engelska och utgöra ett internationellt standardverk. En tävlingsform benämns the Hanner movement.



Olof Hanner 1986
(Foto: Thomas Pettersson)

Olof Hanner tyckte om att sjunga, och började redan som 8-åring i Skansens stjärngossar. På 1940-talet var han mycket aktiv studentsångare och medverkade bl.a. i ett par operor, därav en som uppfördes på Drottningholmsteatern. Bilden visar honom i färd med att dirigera "Vi gingo ner till Röda havet ... " vid en studentfest 1986.

Olof Hanner och hans hustru Elisabet fick fyra söner. Familjen vistades ofta på sitt sommarställe Sandkulla i Östergötland, som förblev en samlingsplats för familjen även efter föräldrarnas skilsmässa, och dit även institutionens doktorander ibland inbjöds för muntliga teoritentamina.

Avslutningsvis kan nämnas att under Hanners tid i Princeton fanns det där en fysiker som till utseendet liknade honom, något som fick Einstein att hälsa på Hanner.

◇ ◇ ◇ ◇

Om Hannerpolytoper

Peter Sjögren

I ett arbete [2] från 1956 betraktar Hanner konvexa kroppar i $\mathbb{R}^n$, alltså kompakta konvexa mängder med icketomt inre.

Fråga: Anta att $K \subset \mathbb{R}^n$ är en konvex kropp. Om tre translat av K skär varandra parvis (två och två), måste då de tre ha en gemensam punkt?

Hanner visade till att börja med att K i så fall måste vara en polytop (dvs. den n-dimensionella motsvarigheten till polygon och polyeder), och att K dessutom måste vara symmetrisk kring någon punkt. Denna punkt kan utan inskränkning antas vara origo, och i det följande betyder symmetrisk att $K = -K$.

Han konstruerade sedan rekursivt en klass av symmetriska polytoper med denna egenskap. Man kallar dem numera *Hanner-polytoper*, och definitionen är denna:

Klassen består av alla polytoper som kan fås med följande fyra regler.

1. Ett kompakt, symmetriskt intervall är en Hannerpolytop i $\mathbb{R}$.

2. Om $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ och $K_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ är Hannerpolytoper så är också $K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$ en Hannerpolytop.

3. Om $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ och $K_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ är Hannerpolytoper, så är det konvexa höljet av $K_1 \times \{0\}$ och $\{0\} \times K_2$ en Hannerpolytop i $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. (Här ska 0 tolkas som origo i $\mathbb{R}^{n_2}$ resp. $\mathbb{R}^{n_1}$.)

4. Bilden av en Hannerpolytop under en inverterbar linjär avbildning är också en Hannerpolytop.

I tre dimensioner ser man att en kub och en regelbunden oktaeder är exempel på Hannerpolytoper.

Polaren (med betoning på a) till en symmetrisk konvex kropp $K \subset \mathbb{R}^n$ definieras som

$$K^o = \{y \in \mathbb{R}^n : x \cdot y \leq 1\}.$$

Den är också en symmetrisk konvex kropp.

Eftersom de polytoper i $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ som fås i 2. resp. 3. är varandras polarer, följer det att polaren till en Hannerpolytop är en Hannerpolytop. I definitionen ovan kan för övrigt denna egenskap ersätta 2. eller 3.

I sitt arbete visade Hanner att svaret på frågan ovan är positivt för varje Hannerpolytop. För dimension $n \leq 5$ bevisade han också omvändningen, att svaret är positivt endast för Hannerpolytoper. Detta kompletterades 1981 av A. B. Hansen och Å. Lima [3], som visade att omvändningen gäller i godtycklig dimension.

Varje Hannerpolytop kan ses som enhetsklotet i ett normerat rum, som då kallas ett *Hanner-rum*.

Hannerpolytoper har fått förnyad aktualitet de senaste åren genom begreppet *Mahlervolym*, som för en symmetrisk konvex kropp K definieras av

$$M(K) = \operatorname{vol}(K)\operatorname{vol}(K^o).$$

Ju större K är, desto mindre är polaren K^o, så intuitivt kan man tänka sig att Mahlervolymen inte varierar alltför mycket. Man kan lätt verifiera att Mahlervolymen är invariant under inverterbara linjära transformationer. Speciellt har i $\mathbb{R}^n$ varje ellipsoid samma Mahlervolym som ett klot, båda centrerade i origo.

Polaren K^o till en symmetrisk konvex kropp har samma Mahlervolym som K, eftersom $K^{oo} = K$.

För produkten av två symmetriska konvexa kroppar $K_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$ och $K_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ visar man att

$$M(K_1 \times K_2) = c\, M(K_1)\, M(K_2),$$

där $c = c(n_1, n_2)$ är en konstant.

Det följer nu att alla Hannerpolytoper i $\mathbb{R}^n$ har samma Mahlervolym.

Mahlers förmodan säger att i varje dimension gäller för varje symmetrisk konvex kropp K att

$$M(\text{Hannerpolytop}) \leq M(K) \leq M(\text{ellipsoid}),$$

med likhet bara då K är en Hannerpolytop resp. en ellipsoid. Den antyder att Mahlervolymen mäter "rundhet", den är som störst för klot och som minst för symmetriska kroppar som är så spetsiga som möjligt.

Det kan nämnas att

$$\frac{M(\text{ellipsoid})}{M(\text{Hannerpolytop})} = \left(\frac{2\pi}{4} + o(1)\right)^n$$

då $n \to \infty$.

Den övre uppskattningen i Mahlers förmodan visades av L. A. Santaló 1949, se [5].

Den undre uppskattningen är fortfarande en öppen fråga, men det finns partiella resultat. J. Bourgain och V. D. Milman [1] bevisade 1987 att

$$M(K) \geq \delta^n\, M(\text{Hannerpolytop})$$

för alla K och någon absolut konstant $\delta > 0$.

J. Kims resultat i [4] från 2012 säger att Hannerpolytoperna är lokala strikta minima för Mahlervolymen. Detta uttrycks mera precis med hjälp av *Banach-Mazur-avståndet* mellan två symmetriska konvexa kroppar K och L i $\mathbb{R}^n$. Det definieras genom

$$d(K, L) = \inf\{\beta \geq 1 : L \subset TK \subset \beta L\},$$

där infimum tas över alla ickesingulära linjära transformationer T. Detta "avstånd" tar sitt minsta värde 1 precis då $L = TK$ för någon sådan T. Vad Kim visade var att om K är en Hannerpolytop och $1 < d(K, L) < 1 + \varepsilon$, så är $M(L) > M(K)$; detta för något $\varepsilon > 0$ som bara beror av dimensionen.

References

[1] J. Bourgain och V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in R^n.* Invent. Math. 88 (2) (1987), 319–340.

[2] O. Hanner, *Intersections of translates of convex bodies.* Math. Scand. 4 (1956), 65–87.

[3] A. B. Hansen och Å. Lima, *The structure of Banach spaces with the 3.2. intersection property.* Acta Math. 146 (1981), 1–23.

[4] J. Kim, *Minimal volume product near Hanner polytopes.* J. Funct. Anal. 266 (4) (2014), 2360–2402.

[5] L. A. Santaló, *Un invariante afín para los cuerpos convexos del espacio de n-dimensiones.* Portugaliae Math. 8 (1949), 155–161.

◇ ◇ ◇ ◇

Olle Hanner på Stockholms högskola

Christer Kiselman

Olle Hanner var från 1957-07-01 laborator vid Stockholm högskola. Två månader senare, 1957-09-02 09:15, startade han kursen Differential- och integralkalkyl i en variabel; under våren 1958 hade han motsvarande kurs i flera variabler. För mig, som började studera på Stockholms högskola just hösten 1957, blev dessa två de viktigaste matematikkurserna.

Matematiska institutet vid Stockholms högskola låg i ett hus med adress Kungstensgatan 45. Där fanns ett bibliotek och två kontorsrum för de två professorerna Otto Frostman (1907–1977) och Lars Hörmander (1931–2012). Laboratorn hade inget rum. Men Olle verkade inte så missnöjd med detta: han gillade att jobba på kaféer och gjorde det ofta. (För yngre läsare vill jag nämna att en laborator hade exakt samma arbetsuppgifter som en professor, med ett enda undantag: en laborator kunde inte vara prefekt. Senare, 1969, ändrades titeln till biträdande professor och 1979 till professor. Och andra än professorer kunde tjänstgöra som prefekter.)

Som föreläsare på de två analyskurserna var Olle för oss en underbar ledare in i det okända. Det var många som läste ett betyg i matematik det året (bland annat många från Ungern, som redan kunde tillräckligt med svenska), så vi måste använda juristernas hus på Norrtullsgatan 2, där det fanns en stor föreläsningssal. Denna sal hade nio stora skrivtavlor ordnade i tre kolumner. Olle skrev en tavla full på fem minuter. När alla nio tavlorna var fulla hade det gått 45 minuter. God planering! Och eftersom det var högt i tak, kunde tavlorna ställas in så att alla nio blev synliga samtidigt. En perfekt översikt av presentationen under de gångna 45 minuterna uppnåddes. Under föreläsningen hänvisade Olle till tidigare resultat: "Hanner bläddrar bland tavlorna" var ett uttryck som jag minns. Nu låter det som om hans skicklighet låg i att hantera tavlor, men detta var bara det yttre visuella intrycket av hans framträdande. Det viktiga var hans förmåga att förklara matematiken, med klar logik, frapperande tankegångar, många fina liknelser och ofta med insiktsfulla återblickar på historien. För mig blev det allt som allt en otroligt fin inblick i matematisk analys, erhållen under ett läsår.

På den tiden visste jag nog att Olle höll på med topologi, men under de två analyskurserna var han för oss studenter den som behärskade analysen perfekt. När jag senare blev amanuens och assistent var Olle en intressant och intresserad deltagare i den dagliga te-stunden klockan 15:00. Han hade ett stort kortregister över publikationer, där han antecknade referenser framåt, d.v.s. på ett kort om en viss artikel skrev han in senare publikationer som refererade till den förra. Sånt slipper man nu.

◇ ◇ ◇ ◇

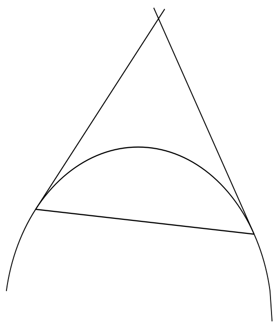
Polarer och Dualitet

Ulf Persson

Kvadriker

Den klassiska dualiteten handlar om det reella projektiva planet. Inte bara kräver vi att genom två distinkta punkter skall det gå precis en linje, utan att även två distinkta linjer skall skära varandra i en unik punkt. På grund av existensen av parallella linjer, inför man då ideala punkter i linjen i oändligheten. En punkt i det projektiva planet kan ses som en linje genom origo i rummet. Med andra ord ges av ko-ordinater $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ med $(x_0, x_1, x_2) \sim (x'_0, x'_1, x'_2)$ omm $x'_i + \lambda x_i$ för något $\lambda \neq 0$. Dessa koordinater kallas homogena och ger den direkta kopplingen mellan projektiva plan och perspektivlära. Projektiva plane infördes vid ett tidigt stadium och gav aldrig upphov till några kontroverser, åtminstone inga av betydelse. En linje i det projektiva planet ges av planet $\zeta_0 x_0 + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 = 0$ i rummet, som givetvis kan ses som en punkt i det duala $\mathbb{R}^3$.

Det finns som bekant ingen kanonisk isomorfi mellan ett vektorrum och dess dual. Varje sådan isomorfi bestämmer en icke-urartad kvadratisk form (upp till en icke-försvinnande skalning) och omvänt varje kvadratisk form bestämmer en isomorfi.



Detta kan ges en slående geometrisk tolkning. För enkelhetens skull begränsar vi oss först till att betrakta det projektiva planet. Varje icke-urartad kvadratisk form definierar en glatt andragradskurva C, ett så kallat kägelsnitt. Genom varje punkt P kan man dra två tangenter till C. Dessa sammanfaller till en tangent om P ligger på C. Genom de två tangeringspunkterna kan man dra en linje $\hat{P}$, benämnd plaren till P. Om P ligger på C blir polaren naturligt tangenten till C. Omvänt en linje skär kvadriken i två punkter, dessas tangenter skär varandra i en punkt. Denna punkt kallas linjens polar. Polarens polar är lika med ursprunget, såväl som om denna är en linje som punkt.

Denna beskrivning fungerar bara om kroppen vi antar är algebraiskt sluten. (Ty i vår definition kan vi betrakta vektorrum över godtyckliga kroppar). En kvadratisk ekvation har jämn grad, således beror inte tecknet av $C(X)$ på de homogena koordinaterna vi väljer. En kvadrik delar det reella projektiva rummet i två sammanhängande delar, medan ett hyperplan (line) inte gör det. Två punkter P och Q säges ligga på samma sida av C om $C(P), C(Q)$ har samma tecken (detta beror givetvis inte heller på ekvationen vi väljer för C).

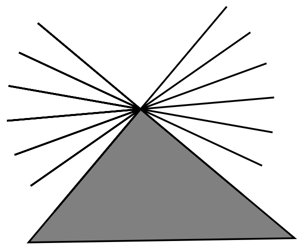
Vi säger att en punkt P ligger innanför en kvadrik C om man inte kan dra tangenter från den. Tangenterna kommer att vara komplext konjugerade, liksom dess tangeringspunkter, så polaren kommer att vara väldefinerad. På liknande sätt kommer en linje disjunkt från kvadriken skära denna i två komplext konjugerade punkter, med två komplext konjugerade tangenter, som skär varandra i en reell punkt.

Den första dualiteten, som beror på ett val av en bas, ges av kvadriken $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ och som inte har några reella punkter. En annan dualitet ges av $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$. I det första fallet ges polären till en punkt $P = (x, y)$ av linjen ortogonal till linjen genom origo och P och genom en punkt $P' = (x', y')$ sådan att $|P| \cdot |P'| = 1$ och P och P' ligger på ömse sidor av origo, medan i det andra fallet ligger de på samma sida. I det första fallet liggeringa punkter på sin polar, i det andra fallet utgör sådana punkter av enhetscirkeln. Genom att associera till varje punkt den närmaste punkten på sin polar erhåller vi respektive avbildningar $P \mapsto \frac{-P}{|P|^2}$ och $P \mapsto \frac{P}{|P|^2}$

Den senare avbildningen är helt enkelt inversion i enhetscirkeln, den fîosta inversion följd av antipodavbildningen. Rent algebraiskt ges polarlinjen av gradienten av C vid punkten P. I första fallet ges gradienten vid punkten $P = (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ av $(\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2)$ och polaren av $\zeta_0 x_0 + \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 = 0$, medan i det andra fallet får vi motsvarande $(\zeta_0, \zeta_1, -\zeta_2)$ och polaren av $\zeta_0 x_0 + \zeta_1 x_1 - \zeta_2 x_2 = 0$.

Konvexa mängder

När det gäller en godtycklig konvex mängd K kan vi fortfarande tala om tangenter. En tangent är helt enkelt en stödjande linje, d.v.s. den delar inte mängden i två delar och den skär den konvexa mängden i åtminstone en punkt.



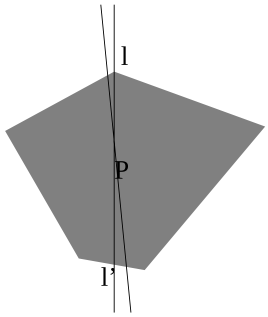
Om vi har ett hörn kommer det att finnas många tangenter genom dem, dessa kommer att beskriva ett segment i det duala rummet. Betraktar vi en polygon kommer dess kanter att motsvaras av hörn i dualplanet, medan hörnen motsvaras av de segment som förbinder dessa i dualen. (Polygonen behöver inte vara konvex, precis som man i den algebraiska geometrin kan betrakta den duala kurvan genom att betrakta tangenterna).

Vi kan även tala om dualen till en godtycklig mängd genom att betrakta alla linjer som inte skär mängden (och beroende på smak kan man sedan ta det slutna höljet). Dualen blir automatiskt konvex, vilket betyder att dualen till dualen blir det konvexa höljet och vi tvingas därmed begränsa oss till konvexa mängder om vi vill ha reflexivitet.

En konvex mängd har en utsida och en insida. Genom en punkt inuti mängden kan man inte dra några tangenter. Således kan man bara associera polärer till punkter utanför mångden.

I det projektiva planet delar inte en linje detta i två delar, men däremot om man väljer en oändlighetslinje dessutom delas planet i två delar av de bägge linjerna. I det vanliga (affina) reella planet delar således varje linje planet i två delar. Man kan tala om vänster och högerplan på ett konsistent sätt om man väljer en punkt och talar om den halva som innehåller denna. (Detta fungerar således inte för linjer som går genom denna punkt), Väljer man punkten inuti den konvexa mängden, kan man således beskriva denna som snittet av alla halvplan som innehåller denna punkt.

Betraktar vi alla linjer genom en punkt (som kan ligga på oändlighetslinjen men utanför den konvexa mängden), finner vi bland dessa exakt två stödjande linjer, mellan dessa finns exakt en linje som halverar mängdens area. Kalla en sådan linje en bisektor. Om alla bisektorer går genom en punkt P kallas den konvexa mängden symmetrisk, och P dess centrum.



Man observerar följande att om centrum existerar kommer mängden att vara invariant under $X \mapsto -X$ om P translateras till 0. Betrakta nämligen alla linjer genom P När vi vrider en linje L infinitismalt genom P, och l, l' betecknar Ls extrema snittpunkter med K vinner en halva l och förlorar samtidigt l', således måste $l = l'$.

I Peter Sjögrens artikel om Hannerpolytoper begränsas vi naturligt till symmetriska mängder. Centrumet blir då den naturliga punkten för att definiera det innehållande halvplanet.

Vi erhåller då följande definition av polaren till en konvex mängd K

$$\hat{K} = \{y : x \cdot y \leq 1 \quad \forall x \in K\}$$

Om vi fixerar $y \neq 0$ kommer $\{x : x \cdot y \leq 1\}$ beskriva ett halvplan innehållande origo och givet av linjen $x \cdot y = 1$ vilken kommer att vara ortogonal till y och gå genom punkten $\frac{y}{|y|^2}$ d.v.s. vara polaren till y med avseende på enhetscirkeln. $\hat{K}$ beskriver således alla linjer 'utanför' K och sammanfaller därmed med den dual vi beskrev tidigare.

Givetvis allt vad jag sagt generaliseras direkt till högre dimensioner genom att byta ut linjer mot hyperplan.

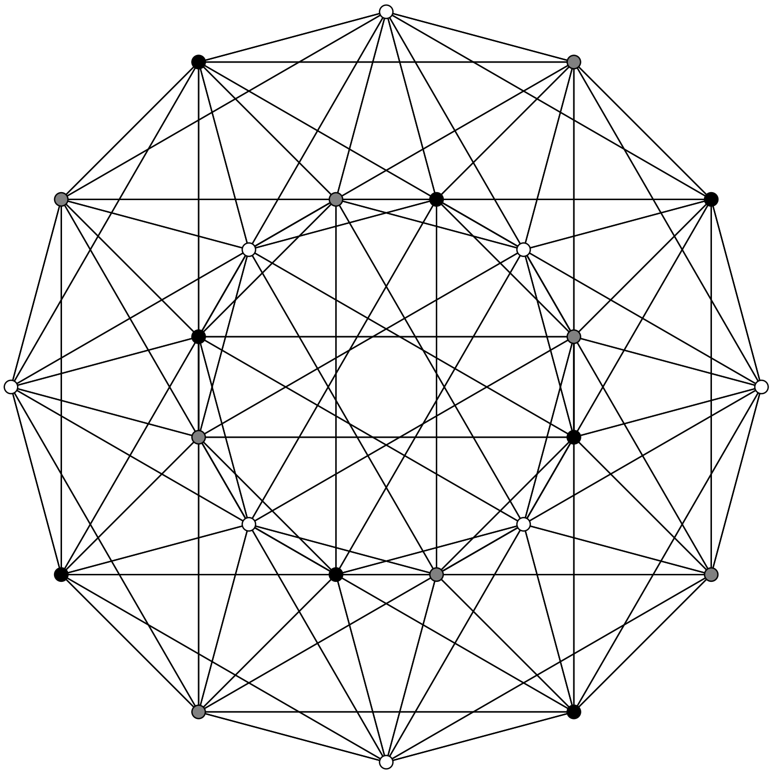
$\diamond \quad \diamond \quad \diamond \quad \diamond$

Titelsidans illustration

Ulf Persson

Oktaplexen (eller 24-cellen) är en självdual regelbunden polytop i $\mathbb{R}^4$ som inte har någon motsvarighet i någon annan dimension. Man kan presentera den som det komplexa höljet av de $24(=16+8)$ punkterna

$$\frac{1}{2}(\pm1,\pm1,\pm1,\pm1),(\pm1,0,0,0),(0,\pm1,0,0),(0,0,\pm1,0),(0,0,0,\pm1)$$



Samtliga dessa punkter ligger på enhetssfären, och kantlängderna är 1. Den erhålls från hyperkuben genom att till varje av de 8 kuberna lägga till en vektor av längd ett genom dess centrum. Gör man motsvarande för en kvadrat får man en ny kvadrat och de ursprungliga fyra hörnen försvinner till mittpunkter på de nya kanterna. Gör man det i fallet med en kub kommer kanterna ha olika länd och man får ingen regelbunden polytop. Konstruktionen fungerar endast i dimension fyra. Genom att lägga till en hyperpyramid till var och en de åtta begränsande kuberna inser man lätt att oktaplexens volym är dubbla kubens. De sexton hörnen till en hyperkub kan delas upp i två grupper av åtta, svarta och vita, beroende på huruvida $x_1+x_2+x_3+x_4$ är udda eller jämnt, därvidlag inser vi att två hörn av samma färg aldrig kan sammanbindas med en kant. Med oktaplexen tillför vi en tredje grupp av 8 (gråa) hörn. Varje val av en grupp bestämmer en annan hyperkub inskriven i oktaplexen, och de 8 hörnen bestämmer en annan regelbunden polytop, som är dualen (16-cellen) till hyperkuben (8-cellen). Oktaplexen består av 24 oktahedrar (därav namnet 24-cell). Dessa skärs ut av de 24 hyperplanen $\pm x_i \pm x_j = 1 \quad i \neq j$. Dessa är givetvis de stödjande hyperplanen [1]. Deras avstånd till origo ges av $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Eftersom en oktaheder med kantlängd 1 har volymen $\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ bekräftar vi således att Oktaplexens volym är $24 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{4} = 2$ ty oktahedernas mittpunkter befinner sig på avstånder $1/\sqrt{2}$ från origo. Dualerna till dessa

[1] Notera att ett alternativt sätt att beskriva oktaplexens hörn är genom att betrakta de tjugofyra punkterna $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0,0)$ etc

plan blir punkter med avståndet $1/(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ och utgör en annan oktaplex uppskalad med en faktor $\sqrt{2}$ och den 4-dimensionella volymen således 8. Mahlervolymen för en oktaplex blir således 16. Ifallet med en hyperkup (8-cellen) inskriven i enhetssfären, vars kantlängd är 1 och således volym lika med 1, kommer dualen att skalas med en faktor 2. Volymen av 16-cellen med omskrivna cirkeln med radien 1 är given av $\frac{2}{3}$ [2]. Skalningen 2 ger volymen $\frac{32}{3}$ och således Mahlervolymen $\frac{32}{3} < 16$. Oktaplexen är således ingen Hannerpolytop.

Om Oktaplexen är mycket att säga, låt mig begränsa mig till dess koppling till kvaternionerna. Geonom att välja basen $1, i, j, k$ för kvaternionerna, finner vi att dess hörn $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$ tillsammans med $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ utgör en delgrupp av gruppen av alla icke-noll kvaternioner. De åtta senare elementen utgör kvaterniongruppen Q_8, som tillsammans med den dihedralagruppen D_8 (symmetrigruppen till en kvadrat) är de enda icke-kommutativa grupperna av ordning åtta. De tre sidoklasserna denna bestämmer utgör de svarta, gråa och vita elementen. Kvaternionerna utgör ett 2-dimensionellt komplext vektorrum via multiplikation till vänster och varje multiplikation till höger definierar därmed en komplex linjär avbildning. På detta sätt får vi en representation av gruppen som lät inses vara irreducibel. De karaktäristiska ekvationerna ges av $(x - 1)^{,}(x + 1)^2$ för de centrala elementen ± 1, medan för de icke-centrala i Q_8 får vi $x^2 + 1$ medan i de resterande fallen får vi $x^2 \pm x + 1$ element av ordning 3 och 6. Vår grupp O_{24} med 24 element är inte den symmetriska gruppen S_4 med sin normala delgrupp A_4 eftersom den har element av ordning sex, men efter division med centrumet $Z = \pm 1$ erhåller vi att O_8/Z är isomorft med A_4. Vidare är Q_8 en normal delgrupp och givetvis $O_{24}/Q_8 = Z_3$.

Den uppmärksamme läsaren noterar att i figuren ovan kan mycket väl två noder av samma färg förbindas med en kant. Detta är en 'synvilla' beroende på att oktaplexen betraktas från en speciellt riktning. Tittar man noga finner man att genom vissa noder utgår det istället för 8 kanter 10 varav två är falska.

◇ ◇ ◇ ◇

[2]Detta inses av att berakta den som given av $(\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0,), (0, 0, \pm 1, 0), (0, 0, 0, \pm 1)$. Vi får sexton stödjande hyperplan $\pm x_1 + \pm x_2 + \pm x_3 + \pm x_4 = 1$ med avståndet $\frac{1}{2}$ från origo. Dess snitt utgörs av tetrahedrar med kantlängd $\sqrt{2}$ och således volym $\frac{1}{3}$. Den totala volyen blir således $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$

Lokala Nyheter

Lund

Konferens:
Sonja Kovalevsky-dagarna hölls i Lund den 12-14 november.

Befordringar:
Marcus Carlsson, universitetslektor samt docent
Johan Lindstöm, docent

Ny doktor:
Sebastian Farås
"Conservation Laws, Numerical Schemes and Control Strategies for Sedimentation and Wastewater Treatment" (30/10)

Ny doktorander:
Peter Meisrimel
Felicia Seemann

Karlstad

Ny doktor: (didaktisk inriktning)
Maria Fahlgren
"Designing for the integration of dynamic software environments in the teaching of mathematics" (15/12 - 2015)

Linköping

Ny doktor:
John Karlsson
"A class of infinite dimensional stochastic processes with unbounded diffusion and its associated Dirichlet forms" (matematisk statistik)

Jolanta Pielaszkiewicz
"Contributions to High-Dimensional Analysis under Kolmogorov Condition" (matematisk statistik)

Marcus Kardell
"New phenomena in the world of peaked solitons"

Licentiatavhandlingar:
Mikael Hansson
"Generalised Ramsey numbers and Bruhat order on involutions"(matematik)

Celestin Kurujyibwami
"Group classification of multidimensional linear Schrödinger equations by the algebraic method"

Befordringar:
David Rule oavlönad docent i matematik.

Nya doktorander
Björn Móren (optimeringslära)
Oskar Ålund (beräkningsmatematik).

Göteborg

Befordringar:
Aila Särkkä, professor matematisk statistik
Alexei Heintz, bitr professor tillämpad matematik

Nyanställda:
Magnus Goffeng, forskarassistent matematik
David Witt Nyström, bitr. lektor matematik
Eslam Ezzatneshan, post doc matematik

Nya doktorer:
Mahdi Hormozi,
"Topics on Harmonic analysis and Multilinear Algebra", (matematik, 2015-10-22)

Fredrik Boulund,
"Computational methods for analysis of fragmented sequence data", (biovetenskap, 2015-12-04)

Dawan Mustafa,
"Propagation of Chaos for Kac-like Particle Models", (matematik, 2015-12-17)

Nya doktorander
Raad Salman, industridoktorand matematik
Tobias Sohr, doktorand matematisk statistik

KALENDARIUM

(Till denna sida uppmanas alla, speciellt lokalombuden, att inlämna information)
27th Nordic Congress of Mathematicians
Institut Mittag-Leffler & Stockholms Universitet
16-20/3 2016

Författare i detta nummer

Maria Esteban President för International Council for Industrial and Applied Mathematics. Av basisk härkomst. verkam i Paris.

Harald Helfgott Ung talteoretiker, bördig från Perus. Väckte uppseende med sitt bevis av svaga versionen av Goldbach förmodan

Peter Sjögren Nyligen pensionerad professor vid Göteborgs Universitet . Arbetar inom harmonisk analys.

Innehållsförteckning

Notiser