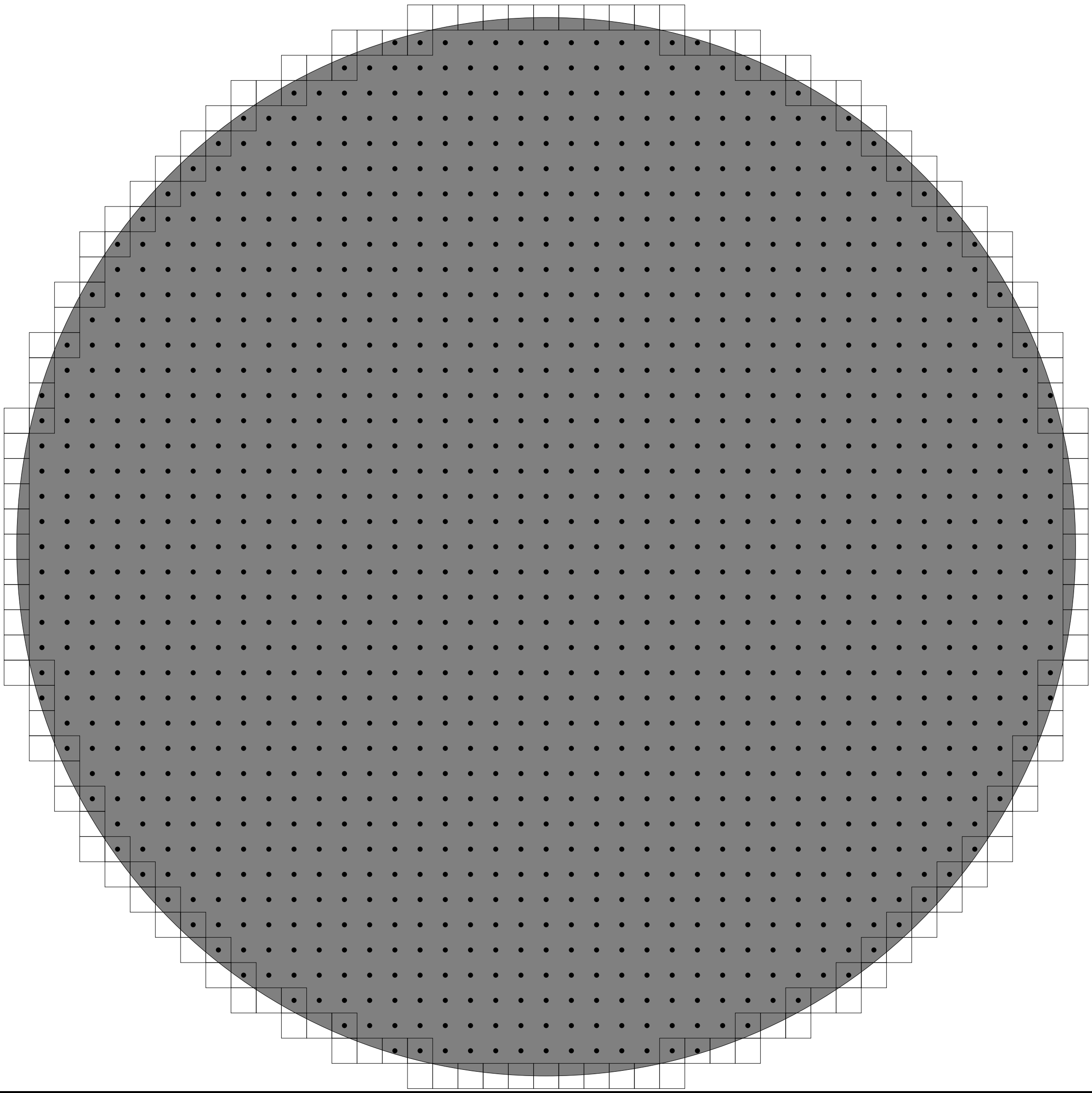
Bulletinen

15 februari 2019 *Svenska Matematikersamfundets Bulletin*

ISSN **2003-055X** (Tryckt)

Redaktör: Ulf Persson *Ansvarig utgivare:* Klas Markström

ISSN **2003-0541** (Online)



Bourgain: *Benedicks, Staubach* **Stein:** *Sjögren*

Swinnerton-Dyer, Atiyah: *Persson*

Almkvist: *Lönnroth, Jensen, Brattström, Tambour, Persson*

Matematiskhistorisk Krönika: *Jockum Aniansson*

Undervisningshjälpmedel: *Arne Söderqvist*

Göran Gustafson Symposiet: 12-14 juni

Bulletinen

utkommer tre gånger per år I Januari, Maj och Oktober. Manusstopp är den första i respektive månad

Ansvarig utgivare: *Klas Markström*
Redaktör: *Ulf Persson*
Adress: *Medlemsutskicket c/o Ulf Persson*
Matematiska institutionen
Chalmers Tekniska Högskola

Manus kan insändas i allehanda format `.ps, .pdf, .doc` Dock i tillägg önskas en ren text-fil. Alla texter omformas till `latex`

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem betala in avgiften på samfundets `plusgirokonto 43 43 50-5.`
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om Du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter (per år)

Individuellt medlemsskap, *200 kr*
Reciprocitetsmedlem *100 kr.*
(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal):
Doktorander gratis under två år
Gymnasieskolor: *300 kr.*
Matematiska institutioner: *Större 5 000 kr, mindre 2 500 kr*
(institutionerna får sälva avgöra om de är större eller mindre).
Ständigt medlemsskap: *2 500 kr (engångsinbetalning)*

Man kan även bli individuellt medlem av EMS genom att betala in 220 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

HEMSIDA: `http://www.swe-math-soc.se`

Här återfinnes bl.a. protokoll från möten

STYRELSE:

ordförande *Klas Markström*
`090-786 97 21`
`president@swe-math-soc.se`

vice ordförande *Tomas Persson*
`046 - 222 85 86`
`vice-president@swe-math-soc.se`

sekreterare *Olof Svensson*
`011-36 32 64`
`secretary@swe-math-soc.se`

skattmästare *Frank Wikström*
`046-222 85 64`
`treasurer@swe-math-soc.se`

5:te ledamot *Jana Madjorava*
`031 - 772 35 31`
`bm5@swe-math-soc.se`

ANNONSER

(Dessa publiceras inom en ram som denna)

helsida 3000 kr
halvsida 1500 kr
mindre 750 kr

Annonser i tre konsekutiva nummer ger endast dubbla priser d.v.s. 1/3 rabatt

Annonser inlämans som förlaga
samt i förekomamnde fall som text-fil, Dessa formateras om i PostScript

Detta Nummer

Ulf Persson

Vår förre redaktör Per-Anders Ivert varnade under sin tid för att göra Bulletinen till en dödsrunetidning, ty material för en sådan skulle näppeligen fattas. Hans farhågor har till en viss del besannats, förra februarinumret ägnades till en stor del åt Jan-Erik Roos bortgång, i numret innan dess lärde läsarna känna Henrik Eriksson om de inte kände till honom tidigare, och i det påföljande numret tecknades Stephen Hawking av fysikern Lars Brink, och i det senaste numret uppmärksammades Thomas Kaijser. Men detta nummer blir rena sepulkern. d.v.s en gravkammare.

Först blev jag uppmärksammad på Gert Almkvists oväntade bortgång i slutet av november via dödsannonsen som Arne Söderqvist hade oförhappandes stött på. Jag chockerades ty jag hade fått en e-post från honom bara några dagar före det officiella dödsdatumet. Nu vet ingen exakt när han dog ty han hittades i sin bostad i Höör med hunden vid sin sida, men han kan inte ha legat död länge. Lars Lönnroth, emiterad litteraturprofessor vid GU skriver om deras gemensamma tid vid Berkeley på 60-talet, Christian Jensen skriver om honom som skandinavisk kollega, precis som han skrev om Roos för ett år sedan. Gudrun Brattström minns honom som sin uppskattade mentor med sitt gula halmhår och Torbjörn Tambour slutligen skriver om Almkvist såsom handledare. Arne Meurman har lovat att skriva om Almkvists vetenskapliga gärning men det hanns inte med till detta nummer.

Under julen dog tre framstående matematiker inom ett par dagar. Först dog den belgiske Fieldsmedaljören Jean Bourgain, nästa dag dog princetonmatematikern Elias Stein och tredjedag jul den brittiske matematikern Peter Swinnerton-Dyer. Både Bourgain och Stein är väl kända bland svenska matematiker. Bourgain var utländsk ledamot av KVA och jag har därför bett Michael Benedicks att skriva om honom ty han är den svenske matematiker som kände Bourgain bäst. Wolfgang (Wulf) Staubach, en tyskbördig men svensktalande matematiker vid Uppsala, erbjöd sig att också skriva om Bourgain, vilket jag accepterade tacksamt. Bourgain var om något av ett fenomen, och troligen bland moderna matematiker den som publicerat mest. Slår man ut hans vetenskapliga produktion under hans verksamma år blir det (drygt) en i månaden. Han diagnosticerades med cancer i bukspottskörteln redan 2014, en cancer som ofta har ett mycket snabbt förlopp, men som han levde med i drygt fyra år. Huruvida det faktum att hans syster är en mycket framstående onkolog spelade någon roll låter jag vara osagt, liksom huruvida en obändig livsvilja (under sitt sista levnadsår skrev han sju artiklar) stod honom bi. Stein, som även han var född i Belgien[1], var nestorn i harmonisk analys, av vissa beskriven som en patriark. Enligt genealogi-sajten hade han drygt 50 studenter, men detta kan vara taget i underkant. Bland dessa finner man två Fieldsmedaljörer, nämligen Charles Fefferman (78) och Terence Tao (06), den senare har för övrigt skrivit två inlägg på sin blogg nyligen om just Bourgain och Stein, vilka rekommenderas. Jag har låtit Peter Sjögren skriva några ord om Stein.

Swinneron-Dyer däremot är inte lika väl känd bland svenska matematiker, och i den mån hans namn får klockor att pingla är det i samband med Birch och Swinnerton-Dyers förmodan som ger en koppling mellan rangen för Mordell-Weilgruppen av rationella punkter på en elliptisk kurva och ordningen av nollstället i punkten $s = 1$ till kurvans L-funktion. En förmodan som ingår i listan av Clay-institutets Millennieproblem. Denna förmodan stammar från 60-talet och baserades på datorberäkningar. Swinnerton-Dyer var något av en pionjär på att använda datorer på rent matematiska problem, och området var då så primitivt att han nödgades utveckla sitt eget programmeringsspråk. Han var en engelsk adelsman som aldrig brydde sig om att skaffa sig en Ph.D. ty det ansåg han inte behövdes. Han framstår som en karaktär tagen ur C.P. Snows berömda cykel 'Strangers and Brothers' (eller lite vanvördigare placerad i en roman av Waugh eller Woodhouse) och han var under

[1] Familjen tvingades fly av uppenbara skäl i samband med Tredje Rikets invasion 1940

många år 'master' vid ett av collegen i Cambridge, något som passade honom som hand i handske. Jag tar på mig uppgiften att introducera honom för en svensk matematikerkrets.

Slutligen dog Sir Michael Atiyah i början av året. Han däremot tarvar knappast en närmare presentation. Han saknar inte, i motsats till Swinnerton-Dyer, svensk anknytning han var inte bara, liksom Bourgain, utländsk medlem av KVA utan tillbringade en tid vid Lund där han lärde sig PDE av Hörmander och Gårding. Jag har även blivt pålagd uppgiften att skriva om honom, och slogs under arbetet av ett så tydligt genomgående tema i hans matematiska arbeten.

Efter alla dessa dödsfall blir det knappt rum för något annat, men Jockum Aniansson fortsätter sin matematikhistoriska krönikeserie och Arne Söderqvist har några synpunkter på moderna undervisningshjälpmedel.

◇ ◇ ◇ ◇

Resestipendier

SVeFUM – Stiftelsen för Vetenskaplig Forskning och Utbildning i Matematik - ledigförklarar härmed resestipendier för i Sverige bosatta matematiker av alla kategorier, dock lägst på doktorandnivå. Stipendier kan sökas för konferenser och andra resor med vetenskapligt syfte, ävensom för längre postdoc-vistelser i utlandet. Utdelade stipendier är personliga och utbetalas till stipendiatens privata konto. Ansökningar, ställda till SVeFUM, c/o Prof. Kjell-Ove Widman, sänds per e-post till svefum@widman.ch och bör innehållande en kort redogörelse för ändamålet med resan, budget, CV i kortform samt svenskt personnummer och kontonummer för utbetalning. Svenska examens- och anställningstitlar används i förekommande fall. För doktorander fordras rekommendationsbrev från handledare, skickat direkt till SVeFUM, liksom en lista över genomgångna kurser och ev. publikationer eller preprints. Sista ansökningsdag är 2019-02-28. Ev.frågor riktas till SVeFUM

Stiftelsen utgår från att sökanden, genom att ansöka, godkänner att i ansökan angivna personuppgifter lagras i enlighet med stiftelsens principer, innebärande att radering sker efter tio år för sökande som tilldelats anslag, medan för ansökningar som helt avslagits gäller att uppgifterna normalt raderas senast året efter det verksamhetsår som ansökan gäller.

◇ ◇ ◇ ◇

Något om Jean Bourgains liv och verk

Michael Benedicks

Jean Bourgain avled den 22 december 2018 efter en lång tids kamp mot cancer. Detta hindrade inte honom att vara ytterst aktiv matematiskt även sin sista tid. Även under sina sista 3 levnadsår hade han omkring 7 publikationer per år.

Jean Bourgain har arbetat inom en stort antal områden: harmonisk analys, ergodteori, geometri för Banachrum, konvexitet, talteori och icke-linjära partiella differentialekvationer och dynamiska system. Han har varit utomordentligt produktiv och när detta skrivs har han inte mindre än 497 publikationer i Mathscinet, åtskilliga i ledande tidskrifter. Han var mycket idérik och var förmodligen den analytiker under den senaste tiden, som har haft det bredaste spektrumet, och som varit den bäste problemlösaren. Låt mig försöka ge en kort beskrivning av en del av Bourgains forskningsaktivitet med betoning på hans arbeten under den senaste tiden och också med viss tonvikt på svensk anknytning, som klart visar på den oerhörda bredd hans forskning har haft. Långt ifrån alla hans arbeten ger slutgiltiga resultat men han hade en unik förmåga att göra något på kort tid med nästan vilket problem som helst. Här följer ett relativt godtyckligt axplock från hans rika produktion.

Verk

1) Geometri för Banachrum. Här har Bourgain bl.a. arbetat med delrum till Banachrum som liknar Hilbertrum och Banachrum med en sk ovillkorlig bas.

Låt mig speciellt nämna ett ämne med svensk anknytning.

> *Two decades ago, analysts stumbled upon a surprising fact [...], the Johnson–Lindenstrauss Lemma, as a crucial tool in their project of extending functions in continuous ways. This result [...] says that, if you project n points in some high dimensional space down to a random $\mathcal{O}(\log n)$-dimensional plane, the chances are overwhelming that all distances will be preserved within a small relative error. So, if distance is all you care about, there is no reason to stay in high dimensions!*

C. Papadimitriou, 2004 (forward to The random projection method by S. Vempala).

Detta innebär att om man vill interpolera en kontinuerlig funktion i punkter i $\mathbb{R}^n$ räcker det att studera en projektion av punkterna på ett lågdimensionellt plan. Detta är högst relevant för det nu mycket aktuella studiet av stora datamängder i datalogi. En relaterad fråga är om man kan bädda in ett metriskt rum med en bi-Lipschitz funktion i $\mathbb{R}^n$. Ytterligare en sådan är det sk Ribe-programmet. Martin Ribe är en svensk matematiker, elev till Hans Rådström, som bevisade ett antal eleganta satser i funktionalanalys under 1970-talet. Ribe var under sin yrkesverksamma tid huvudsakligen verksam vid SCB. Bland Ribes resultat är ett rigiditetsresultat som visare att den lokala linjära teorin för Banachrum kan i väsentligen beskrivas genom avståndet mellan punkter och kan därmed i princip tillämpas på allmänna metriska rum. Bourgain tog upp detta i artikeln "The metrical interpretation of superreflexivity" och han var den som införde namnet Ribe-programmet som nu är ett stort område i funktionalanalys.

2) Harmonisk analys. Rudins $\Lambda(p)$-problem handlar om huruvida de olika L^p-normerna för trigonometriska polynom eller trigonometriska summor är jämförbara med då p varieras. Det mest klassiska resultatet är att att om en trigonometrisk summa är lakunär dvs. följden $\{\lambda_n\}$ av heltal har egenskapen att det finns en konstant $q > 1$ så att $a_{n+1} \geq qa_n$ för $n \geq 1$ så gäller för cosinusserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\lambda_n x)$$

att alla L^p normer $1 \leq p < \infty$ är jämförbara.

En mängd av frekvenser Λ kallas en $\Lambda(p)$ mängd, $p > 2$ om L^p-normen för ett trigonometriskt polynom med frekvenser i Λ är jämförbar med L^2 normen. Den triviala uppskattningen via Hölders olikhet är $||f||_2 \leq ||f||_p$ om $p > 2$. Bourgain bevisade (Acta Math. 1989) som korrolarium av sitt huvudresulat att för varje $p > 2$ finns en $\Lambda(p)$ mängd som inte ligger i $\Lambda(r)$ för något $r > p$.

Ett annat av Bourgains intresseområden är dimensionen för Harmoniskt mått. Representationen av en harmonisk funktion från dess randvärden i tex cirkelskivan eller halvplanet i $\mathbb{C}$ med Poissons formel är väl det enklaste exemplet på harmoniskt mått. I det allmänna fallet är harmoniskt mått representationen av en harmonisk funktion via sina randvärden tolkade som en kontinuerlig funktion. Dimensionen för harmoniskt mått definieras som infimum av Hausdorffdimensionen av mängder av fullt mått. Termen harmoniskt mått infördes av Nevanlinna och viktiga resultat erhölls av Beurling och Ahlfors. Det är ganska lätt att bevisa att harmoniskt mått i planet för enkelt sammanhängande områden har dimension $\geq \frac{1}{2}$ och Carleson förbättrade detta till $\frac{1}{2} + \delta, \delta > 0$. Makarov visade att dimensionen för harmoniskt mått för enkelt sammanhängande områden i planet (utom givetvis för planet självt!) alltid är 1. Senare visade P. Jones och T. Wolff att harmoniskt mått i planet alltid har dimension ≤ 1. Detta ledde Berndt Øxendahl till en förmodan att stödet för harmoniskt mått i $\mathbb{R}^n$ alltid är $\leq n-1$. Wolff visade dock att detta är fel. Med en konstruktion av kuber ovanpå kuber liknande von Kochs snöflinga visade han att dimensionen i tre dimensioner kan vara större än 2. Bourgain visade dock att dimensionen för harmoniskt mått i $\mathbb{R}^n$ aldrig kan överstiga $n - \delta_n$ där $\delta_n > 0$. Vad δ_n är fortfarande ett olöst problem. Kanske är $\delta_n = 1/(n-1)$ för $n \geq 2$, som förmodats av P. Jones.

Kakeya nålproblem är frågan huruvida det finns ett minimum för ytan för ett område där man kan vända en nål 360°. Besicovitch visade att det inte finns någon undre gräns > 0. Den slutliga förmodan om Kakeya mängder blev följande:

Definiera en Besicovitchmängd i $\mathbb{R}^n$ som en mängd som innehåller ett linjesegment av enhetslängd i alla riktningar. Måste en sådan mängd ha Hausdorffdimension och Minkowskidimension d lika med n?

Kakeyaförmodan är sann för $n = 1$ (trivialt) och $n = 2$ (Davies).

Det finns flera resultat av Wolff, Katz och Tao men låt mig beröra hur Jean Bourgain relaterade det högdimensionella problemet 1998 på ett överaskande sätt till addition och subtraktion. Med ett kombinatoriskt verktyg som nu kallas Szeneréti-Gowers lemma förbättrade Bourgain den nedre gränsen för Minkowskidimensionen $d \geq \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} + 1$ till

$$d \geq \frac{n-1}{2 - 1/13} + 1.$$

3) Analytisk talteori Inom detta område har Bourgain bland annat arbetat med uppskattningar av exponentialsummor. Under den senaste tiden har han arbetat tillsammans med Demeter om "decoupling theory". Detta var ett av Jeans huvudfokus under de senaste fem åren och ledde till beviset med Demeter och Guth av Vinogradovs medelvärdessats. De visar först en "frikopplingssats" (decoupling theorem) om en uppskattning av Fouriertransformer av mått. Som korollarium erhåller de

Vinogradovs huvudförmodan. Låt $s, n, N \geq 1$ vara heltal och låt $\varepsilon > 0$. Då gäller att

$$\int_{[0,1]^n} \left|\sum_{j=1}^{N} e(jx_1 + j^2x_2 + \cdots + j^n x_n)\right|^{2s} dx_1 \dots dx_n$$
$$\leq C(\varepsilon, s, n) \left(N^{s+\varepsilon} + N^{2s - \frac{n(n+1)}{2} + \varepsilon}\right),$$

där $e(x) = e^{2\pi i x}$

Detta ledde till den bästa kända uppskattningen av tillväxten för Riemann's zetafunction längs den kritiska linjen.

Lindelöfhypotesen, som är en följd av Riemannhypotesen säger att $|\zeta(\frac{1}{2} + it)| = \mathcal{O}(|t|^a)$ för alla $a > 0$ då $t \to \infty$.

Bourgain bevisade att a kan väljas som $a = 13/84 + \varepsilon$ för alla $\varepsilon > 0$. De första kända exponenterna var $\frac{1}{4}$, Lindelöf själv, och $\frac{1}{6}$ (Hardy och Littlewood). '

'Decoupling method" ger också nytt världsrekord för Gauss problem om heltalspunkter i en cirkel.

Sats(Bourgain & Watt)
Låt

$$R(X) = \sum_{m^2+n^2 \leq X} 1 \; - \; \pi X$$

Då gäller

$$R(X) = \mathcal{O}(X^{\theta+\varepsilon}) \text{ där } \theta = \frac{517}{1648}.$$

6) Ergodteori Här har Bourgain skapat nya angreppssätt, t ex ergodteori för för polynomiella tidssekvenser som n^3.

För min student Davit Karagulyan (och därmed mig själv) är Bourgains arbeten om Sarnaks förmodan om Möbiussummor viktiga.

Förmodan(Sarnak). Låt f vara en avbildning av ett kompakt metriskt rum med topologisk entropi 0. Låt $\mu(n)$ vara Möbius μ-funktion som defineras av $\mu(n) = 0$ om n innehåller en primtalskvadrat och $\mu(n) = \pm 1$ om n är kvadratfritt och innehåller ett jämnt antal primfaktorer respektive ett udda antal primfaktorer.

Då gäller för alla kontinuerliga funktioner φ att

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(n)\varphi(f^n x) = o(N) \qquad \text{då } n \to \infty, \quad (*)$$

Det är välkänt att Riemannhypotesen är ekvivalent med uppskattningen

$$\sum_{n=1}^{N} \mu(n) = \mathcal{O}(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$$

för alla $\varepsilon > 0$.

I fallet att funktionen $f = R_\alpha$, en rotation av en cirkel med vinkel α, vilket är en typisk funktion av topologisk entropi 0, bevisades (*) av Harold Davenport.

Bourgain bevisade Sarnaks förmodan för en klass av 3-intervallutbytesavbildningar dvs. stela avbildningar som permuterar tre delintervall av ett intervall. Det är lätt att att se att cirkelrotationer kan tolkas som 2-intervallavbildningar.

Sarnaks förmodan som helhet är fortfarande olöst. Till och med fallet av *alla* 3-intervallavbildningar är olöst.

7) Teorin för icke-linjära partiella differentialekvationer Här har Bourgain arbetat med uppskattningar av Greenfunktioner för diskreta Schrödingeroperatorer, kvasiperiodisk Anderssonlokalisering, icke-linjära Schrödingeroperatorer med periodisk potential, det globala Cauchyproblemet för icke-linjära Schrödingeroperatorer och ickelinjära dispersionsekvationer. Han har skrivit en serie arbeten med olika medförfattare: Goldstein, Schlag, Zitomirskaya, Wei-Min Wang. Ett välkänt arbete är: "Quasi-periodic solutions of nonlinear random Schrödinger equations" med Wang.

Hans book om Greenfunktioner för diskreta system av differensekvationer "Green's Function Estimates for Lattice Schrödinger equations" innehåller en mängd nya idéer för framtiden.

Liv

Bourgain var född 1954 i Ostende, Belgien och disputerade 1977 vid Vrije Universiteit i Bryssel.

Han har varit talare vid International Congress of Mathematicians tre gånger, varav en gång som plenarföreläsare.

Bourgain har varit Lady Davis Professor of Mathematics vid Hebrew University, Jerusalem, 1988 och Fairchild Distinguished Professor vid Caltech, 1991. År 1995 lämnade Bourgain sin anställning vid Institut des Hautes Études Scientifique, Bures-sur-Yvette, för att bli professor vid Institute for

Advanced Study i Princeton. Han har också varit verksam vid University of Illinois at Urbana Campain.

Han fick Fieldsmedaljen 1994 och har också fått många andra utmärkelser, t.ex. Salempriset 1983. Han har vidare fått Shawpriset 2010, det svenska Crafoordpriset 2012 och senast *Breakthrough prize in Mathematics 2017*. År 2015 blev han adlad av kung Phillipe av Belgien. Han var utländsk ledamot av KVA och deltog aktivt i arbetet där.

Jean Bourgain har ett rykte som varandes mycket tävlingsinriktad i sin matematik, åtminstone i unga år, men han har alltid varit mycket generös med sina idéer till sina yngre kolleger och samarbetspartners.

Han var gift med den välkända kvinnliga matematikern Mei-Chu Chang (de har flera gemensamma arbeten) och de har sonen Eric, som också har ett gemensamt matematiskt arbete med sin far.

Vi är många som saknar honom mycket, inte bara för hans brillianta matematik, men också för hans vänlighet och villighet att dela med sig av sina idéer.

◇ ◇ ◇ ◇

Jean Bourgain *28/2* 1954 – *22/12* 2018

Wolfgang Staubach [1]

En analysens *problemlösare utan motstycke* gick ur tiden, då Baron Jean Bourgain, IBM John von Neumann Professor i matematik vid Institute for Advanced Studies (IAS) i Princeton U.S.A, avled den 22 december 2018 i Belgien, 64 år gammal. Han föddes likaså i Belgien den 28 februari 1954, och sörjs närmast av hustrun och matematikern Mei-Chu Chang, sonen Eric Bourgain-Chang, och systern och läkaren Claire Bourgain.

Bourgain föddes i staden Ostende, belägen i den flamländska delen av Belgien. Hans högutbildade föräldrar tillhörde den vallonska (fransktalande) minoriteten i landet, något som han var mycket stolt över. Han avslutade sina doktorandstudier 1977 vid Vrije Universiteit i Bryssel, under handledning av Freddy Dalbaen. Han flyttade till USA 1985 och höll J. L Doob-lärostolen vid University of Illinois Urbana-Champaign mellan 1985-2006. Parallellt med denna tjänst och fram till 1995 hade han också en professur vid Institute des Hautes Études Scientifiques (IHES). År 2010 fick han IBM John von Neumanns professorsstolen vid den matematiska avdelningen av IAS, som han innehade ända till sitt frånfälle. Redan 2014 fick han ett cancerbesked, men trots den begynnande framgången i cellgiftsbehandlingen, så dog han på ett sjukhus i staden Bonheiden, i hemlandet Belgien.

Under sin karriär fick Bourgain en rad priser och utmärkelser såsom Salempriset (1983), Ostrowskipriset (1991), Fieldsmedaljen (1994), Shawpriset (2010), Crafoordpriset (2012) som utdelas av Kungliga Vetenskapsakdemien (KVA), Genombrottspriset i matematik (2017) d.v.s. det stora amerikanska Breakthrough Prize, och sist men inte minst Steelepriset (2018) från det amerikanska matematikersamfundet.

Han valdes in som medlem i många vetenskapsakademier världen över, och var sedan 2009 ledamot i KVA i klassen för matematik. År 2015 adlades Jean Bourgain av det belgiska kungahuset

[1] Stort tack till Christer O. Kiselman som föreslog mig att skriva denna minnesteckning och för hans synpunkter som lett till flera förbättringar

och tilldelades titeln Baron Bourgain och fick också skapa sin egen vapensköld, med bilden av fyra tangerande Apolloniska cirklar, samt det latinska citatet *In spem contra spem*[2]

Baron Bourgains vapensköld (källa IAS websida)

Bourgains matematik

Bourgains matematiska alster spänner över ett brett område inom både den rena och den tillämpade matematiken. Han publicerade arbeten inom Banachrumsgeometri, harmonisk analys, analytisk talteori, ergodteori, partiella differentialekvationer, kombinatorik och gruppteori. För närvarande har man tillgång till hela 512 publicerade artiklar av honom, och många av dem är författade i samarbete med andra kollegor. Hans matematiska förmåga kännetecknades av en enastående skicklighet att sammanfläta analytiska och kombinatoriska verktyg, för att sedan lösa problem av en mycket hög svårighetsgrad. Som kollegan Peter Sarnak sade, Bourgain var en "problemlösare utan motstycke". Bourgains stora problemlösarförmåga och kolossala mångsidighet, ledde till att många av de ledande matematikerna, i synnerhet inom den matematiska analysen, betraktade honom som en "naturens urkraft". Denna uppfattning var förhärskande bland talarna under Bourgainsammankomsten på IAS 2016, som var en hyllning till Bourgain och hans verk. Med hänsyn till vad som sagts ovan, förefaller det fåfängt och tämligen omöjligt att här återge en uttömmande beskrivning av Bourgains matematiska verk. Därför väljer jag bara att ganska kortfattat beskriva några få av hans viktiga bidrag till harmonisk analys och partiella differentialekvationer. Vidare, och med tanke på läsarnas olika matematiska bakgrund, har jag medvetet strävat efter att undvika teknikaliteterna, som ju är ganska många när man talar om Bourgains verk, och genomgående hålla en översiktlig ton. Jag har gått in på detaljer endast då de inte varit alltför invecklade.

Harmonisk analys

Bourgains väsentliga bidrag till harmonisk analys var utvecklandet av nya analytisk-geometrisk-kombinatoriska metoder för att angripa de mest grundläggande problemen inom ämnet. Därutöver, lyckades han även att lösa en rad svåra problem som länge varit öppna. Två av de centrala begreppen/verktygen inom harmonisk analys och teorin för partiella differentialekvationer, som utgjorde kärnan av Bourgains verksamhet, är maximalfunktioner och oscillerande integraloperatorer.

1. *Maximalfunktioner*

Maximalfunktioner spelar en viktig roll i analysen, då dess är de naturliga verktygen för att undersöka punktvis konvergens (nästan överallt) i olika sammanhang. Vikten av maximalfunktioner betonades redan 1930 av G.H. Hardy och John Littlewood i det klassiska Actapappret [26]. Där visade författarna hur *Hardy–Littlewoods maximalfunktion*

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\, dy,$$

[2] Ganska fritt översatt från latin till svenska "hoppfull i hopplösheten". Citatet är hämtat ur Hieronymus latinska översättning av Paulus brev till romarna, som var skrivet på grekiska.

kan användas för att undersöka den punktvisa konvergensen av medelvärdet

$$\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy,$$

då $r \to 0$. Man kan nämligen visa att operatorn M är begränsad på det svaga L^1-rummet och detta kan användas för att visa *Lebesgues derivationssats* som säger att för $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy = f(x),$$

punktvis nästan överallt (n.ö.). I övrigt är det också sant att M är begränsad på $L^p(\mathbb{R}^n)$ för alla $1 < p \leq \infty$, med en operatornorm som beror på dimensionen n och på p.
För olika tillämpningar inom den harmoniska analysen och PDE-teorin är uppskattningar av operatornormen av M också viktiga. Elias M. Stein (tillika född i Belgien och en betydande analysfigur, som avled dagen efter Bourgain) och Jan-Olov Strömberg [32] visade att operatornormen av M beror i själva verket enbart på p. Bourgain [2] utvidgade Stein och Strömbergs resultat till fallet av Hardy–Littlewoods maximalfunktioner definierade genom att ersätta klot med konvexa mängder (med vissa geometriska begränsningar). Han visade att operatornormen av den nya maximalfunktionen beror enbart på p då $p > 3/2$.
Ett av Bourgains sista arbeten som han skrev i samarbete med Stein, Mariusz Mirek och Błażej Wróbel, återkopplar till hans tidigare nämnda verk [15] om maximalfunktionen.

Man kan också betrakta den sfäriska maximalfunktionen

$$Af(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{|S(x,r)|}\left|\int_{S(x,r)} f(y)\,d\sigma(y)\right|,$$

där $|S(x,r)|$ är arean av sfären och $d\sigma$ dess ytmåttet. Denna maximalfunktion är av betydelse i PDE-teorin, främst i samband med studiet av begynnelsevärdesproblem för vågekvationen. Stein visade i [30] att den sfäriska maximalfunktionen A är begränsad på L^p då $n \geq 3$ och $p > \frac{n}{n-1}$, och ej begränsad om $p \leq \frac{n}{n-1}$. Däremot stod problemet i dimension $n = 2$ öppet ganska länge innan Bourgain [1] visade att A är begränsad även i dimension två för $2 < p \leq \infty$, med en operatornorm som enbart beror på p.

Lennart Carleson i sitt berömda bevis av Luzins förmodan (punktvis n.ö.-konvergensen av Fourierserien av L^2-funktioner) [17], nyttjade också maximalfunktionsuppskattningar. Men då var det en annan maximalfunktion som låg i brännpunkten och denna var maximalfunktionen till Dirichletoperatorn, d.v.s. $\sup_N |D_N * f(x)|$ där D_N är Dirichletkärnan (eller en lämplig modifiering därav). Carleson visade att denna maximalfunktion är begränsad på det svaga L^2-rummet. Senare visade Richard Hunt [27] att maximaloperatorn ovan är i själva verket begränsad på L^p för alla $1 < p < \infty$, och detta visade att Fourierserien av en L^p-funktion konvergerar punktvis n.ö. till själva funktionen. I samband med detta finns det ett klassiskt problem, ställt av Andrej Kolmogorov som spörjer om giltigheten av Luzins förmodan för godtyckliga ortogonala system (och inte enbart Fourierserier). Här har också Bourgain visat framfötterna och bevisat de för närvarade bästa resultaten, se [3]. Efter detta arbete av Bourgain, är den slutliga domen följande: man kan inte lösa Kolmororovs problem i den allmänhet som det en gång ställdes, och ytterligare krav måste ställas på det ortogonala systemet.

Från diskussionen ovan framgår (även något vagt) att nyckeln till den punktvisa n.ö.-konvergensen, är begränsningen av den tillhörande maximalfunktionen i det relevanta funktionsrummet. Men detta ger oss ett ypperligt tillfälle att ta upp ännu ett väsentligt bidrag av Bourgain till harmonisk analys och PDE. Det finns nämligen ett tredje slags maximalfunktion som har stor betydelse i teorin för partiella differentialekvationer. Denna är maximalfunktionen som kan tillskrivas en evolutionsekvation. För att inskränka oss till Bourgains viktigaste bidrag i detta sammanhang, betraktar vi begynnelsevärdesproblemet till Schrödingerekvationen

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0, \\ u(0,x) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n), \quad s > 0, \end{cases}$$

där $s \in \mathbb{R}$ och $H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n);\ (1+|\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ är (det L^2-baserade) Sobolevrummet med normen $\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|(1+|\cdot|^2)^{s/2}\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$. Vidare är $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ rummet av tempererade distributioner (distributioner med måttlig tillväxt), och $\widehat{f}(\xi)$ Fouriertransformen av f. Lösningen till detta Cauchyproblem ges formellt utav

$$u(t,x) = e^{it\Delta}u_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi + it|\xi|^2}\widehat{u}_0(\xi)\,d\xi,$$

och här är den naturliga frågan, huruvida $u(t,x)$ konvergerar punktvis n.ö. mot begynnelsevärdet u_0. Svaret till denna grundläggande fråga kan återigen utrönas genom att visa en maximalfunktionsuppskattning av följade form

$$\|\sup_{0<t<1}|e^{it\Delta}u_0|\,\|_{L^2(B(0,1))} \leq C\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \tag{0.1}$$

I dimension $n = 1$, visade Carleson [18] att (0.1) gäller om $s = 1/4$, och Björn Dahlberg och Carlos Kenig [21] visade att detta är skarpt, d.v.s. om $s < 1/4$ så finns det begynnelsevärden $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ för vilka (0.1) inte håller. Sedan dess har Per Sjölin spelat en ledande roll inom studiet av maximalfunktioner till Schrödingeroperatorn, se exempelvis [29]. År 2016 visade Bourgain [13] att (0.1) kan ej gälla om $s < \frac{n}{2(n+1)}$. Det bästa resultatet för närvarande är det som visades 2018 av Xiumin Du och Ruixiang Zhang [22] som ger att (0.1) gäller för alla $s > \frac{n}{2(n+1)}$. Problemet för $s = \frac{n}{2(n+1)}$ och $n \geq 2$, står öppet.

2. *Oscillerande integraloperatorer*
Inom teorin för oscillerande integraloperatorer har Bourgain verkat på ett banbrytande sätt och nått i många fall de bästa resultaten som för närvarande är tillgängliga. I detta sammanhang återkallar vi tre fundamentala problem inom harmonisk analys, där Bourgains närmanden och metoder varit stilbildande.

- *Kakeyas problem*

För att beskriva Kakeyas problem, låt K vara en kompakt mängd i $\mathbb{R}^n$ sådan att för alla riktningar e i enhetssfären $\mathbb{S}^{n-1}$, finns det $x \in \mathbb{R}^n$ så att $x + te \in K$, för alla $t \in [\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}]$. Detta innebär att mängden K innehåller ett linjestycke i varje riktning. En sådan mängd kallas för en *Kakeyamängd* i $\mathbb{R}^n$. För en delmängd E av $\mathbb{R}^n$ definieras dess δ-dimensionella *Hausdorffinnehåll* som

$$C_H^\delta(E) := \inf\{\sum_i r_i^\delta\}$$

där infimum tas över alla uppräknerliga övertäckningar av E med klot med radier $r_i > 0$. Med hjälp av detta kan man definiera *Hausdorffdimensionen* av E genom

$$\dim_H(E) = \inf\{\delta > 0;\ C_H^\delta(E) = 0\}.$$

Givet dessa definitioner, ställs Kakeyas problem på följande sätt:

Visa att Hausdorffdimensionen av en Kakeyamängd K in $\mathbb{R}^n$ är lika med n.

- *Restriktionsproblemet*
  Detta problem är av särskild betydelse i studiet av linjära och ickelinjära skingrande partiella differentialekvationer, såsom Korteweg–de Vries-ekvationen, ickelinjära Schrödingerekvationer och ickelinjära vågekvationer. Kopplingen mellan restriktionsproblemet och de ovannämnda PDEn blir mycket påtaglig genom de så kallade *Strichartzuppskattningarna*. Dessa uppskattningar (uppkallade efter amerikanen Robert Strichartz), som involverar rum-tidsnormen (i Lebesguerum) av lösningar till fria evolutionsekvationer, spelar en nyckelroll i att bevisa välställdheten (d.v.s. existens, entydighet och kontinuerligt beroende på begynnelsedata) av olika begynnelsevärdesproblem för ickelinjära partiella differentialekvationer, genom fixtpunktargument (Banachs fixtpunktsats).

  Själva restriktionsproblemet kan formuleras enligt följande:
  Låt $d\sigma$, beteckna ytmåttet på $\mathbb{S}^{n-1}$. Då gäller för $p > \frac{2n}{n-1}$ och $f \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ att

$$\| \int_{\mathbb{S}^{n-1}} e^{i\langle x,\xi\rangle} f(\xi)\, d\sigma(\xi) \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

  Problemet ställdes första gången av Stein [31], och läsaren bör märka att den formulering som återges här är bara en av många likvärdiga formuleringar av problemet.

- *Bochner–Riesz' förmodan*
  I samband med summerbarheten av Fourierserier och Fourierintegraler, är olika typer av konvergens (exempelvis normkonvergens eller Cesárokonvergens) av stor betydelse. Följande problem är kopplat till summationen av Fourierserier i flera variabler, och går under namnet Bochner–Riesz' förmodan:

  Låt $\varphi(x)$ vara en glatt funktion på den reella linjen med stöd i intervallet $(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$, och sätt $m_\delta(\xi) = \varphi(\frac{1-|\xi|}{\delta})$. Då gäller för alla $\varepsilon > 0$ och $\frac{2n}{n+1} \leq p \leq \frac{2n}{n-1}$ att

$$\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,\xi\rangle} m_\delta(\xi)\widehat{f}(\xi)\, d\xi \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \delta^{-\varepsilon}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Dessa tre problem har en central ställning inom harmonisk analys, inte minst tack vare sina tillämpningar inom teorin för partiella differentialekvationer. Det mest anmärkningsvärda i det här sammanhanget är att dessa tillsynes olika problem är intimt förknippade med varandra enligt följande schema:

$$\text{Bochner–Riesz' förmodan} \Rightarrow \text{Restriktionsproblemet} \Rightarrow \text{Kakeyas problem}$$

Den första implikationen visades av Terence Tao [33] och den andra väsentligen av Charles Fefferman [23]. I två dimensioner, visades Bochner–Riesz' förmodan allra först av Carleson och Sjölin [19], och senare gavs andra bevis av Lars Hörmander [28], Charles Fefferman [24] och Antonio Cordoba [20]. Sedan dess har några av de främsta experterna inom harmonisk analys försökt att lösa dessa problem på olika sätt, men endast lyckats att uppnå en uppsjö av delresultat. Jag skulle också vilja nämna att det ovannämnda arbete av Hörmander, som rörde uppskattningar för oscillerade integraler, var också av stor betydelse för utvecklingen av teorin för oscillerande integraloperatorer och innehöll en viss förmodan för $L^p - L^q$ uppskattningar av allmänna oscillerande integraler (som var inspirad av Steins restriktionsproblem för Fouriertransformen). Dock lyckades Bourgain [4] att konstruera motexempel till Hörmanders förmodan (i dimension tre och högre).

Gällande restriktionsproblemet visade Bourgain och Lawrence Guth [12] ett resultat som sedan förbättrades ytterligare av Guth [25]. Beträffande Bochner–Riesz' förmodan, så förbättrade Bourgain och Ciprian Demeter [11] resultaten i [12] ytterligare, och uppnådde de för närvarande bästa resultaten. Bourgain och Demeter stödjer sig på en metod som de själva utvecklade och kallade för *frikopplingsmetoden.* I grova drag ger Bourgain–Demeters frikopplingssats en mycket abstrakt generalisering av Pythagoras sats. Medan denna bara visar hur längder av kateterna i en rätvinklig triangel är kopplade till längden av hypotenusan (eller kvadraten av normen av summan av ett antal ortogonala vektorer i ett Hilbertrum är lika med summan av kvadraten av de enskilda normerna), visar frikopplingssatsen att man kan skapa fram ett liknande förhållande mellan normen av individuella vågpaket och normen av deras sammanslagning, även om det underliggande rummet inte är ett Hilbertrum! Bourgain, Demeter och Guth använde frikopplingssatsen med stor framgång i olika sammanhang, med höjdpunkten i beviset av *Vinogradovs förmodan* i analytisk talteori [14].

Ickelinjära partiella differentialekvationer

Bourgains bidrag till partiella differentialekvationer är många och ligger nästan uteslutande inom den ickelinjära evolutionerande teorin. Han blåste nytt liv i ämnet, särskilt där utvecklingen nästan avstannat p.g.a problemens stora tekniska svårigheter och brist på tillvägagångssätt.

1. *Skingrande evolutionära* PDE

Skingrande PDE är de evolutionsekvationer vars lösningar är vågor som sprider sig i tid och rum. Vågorna skingras i enlighet med sina våglängder i den bemärkelsen att vågor med olika våglängder skingras med olika fashastigheter. De typiska exemplen på skingrande ickelinjära PDEn är olika slags ickelinjära vågekvationer (däri också räknas Schrödingerekvationer). Bourgains arbeten inom detta område, som återigen kombinerade metoder från harmonisk analys och kombinatorik, var banbrytande och ledde till flera genombrott där problemens stora tekniska svårigheter stoppat utvecklingen i flera decennier. I sina berömda papper [5] och [6] visade han nästan optimala resultat för välställdheten av den ickelinjära Schrödingerekvationen

$$\begin{cases} i\partial_t \Psi(x,t) + \Delta_x \Psi(x,t) + |\Psi|^{p-2}\Psi = 0,\ p \geq 3, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ n \geq 1 \\ \Psi(x,0) = \Psi_0(x) \in H^s(\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n), \end{cases}$$

där $\Psi(x,t)$ antas vara periodisk med period 1 i alla sina x-variabler, och för den periodiska Korteweg–de Vriesekvationen d.v.s.

$$\begin{cases} i\partial_t u(x,t) + \partial_x^3 u(x,t) + u\partial_x u = 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) \in H^s(\mathbb{R}/\mathbb{Z}), \end{cases}$$

där $u(x+1,t) = u(x,t)$.

I samband med dessa papper så introducerar Bourgain funktionsrummen $X^{s,p}$ som sedermera visat sig vara nyttiga i samband med studiet av alla typer av evolutionära skingrande ekvationer, eftersom de kan anpassas till ekvationer i fråga.

I den berömda artikeln [10] visar Bourgain den globala välställdheten av den ickelinjära Schrödingerekvationen

$$\begin{cases} i\partial_t\Psi(x,t)+\Delta_x\Psi(x,t)-|\Psi|^4\Psi=0,\ x\in\mathbb{R}^3,\\ \Psi(x,0)=\Psi_0(x)\in H^1(\mathbb{R}^3),\text{ och }\ \Psi_0\text{ är radiell}\end{cases}$$

som betraktades som ett nästan ogenomträngligt problem av experterna i området.

2. *Hamiltonska* PDE

I samband med Bourgains många bidrag till partiella differentialekvationer (och i detta fall även dynamiska system) bör man också nämna hans arbete inom ickelinjära Hamiltonska PDEn (se exempelvis [8]) där han studerade de dynamiska aspekterna av dessa ekvationer och visade existensen av invarianta mått (de så kallade *Gibbsmått* inom statistisk mekanik) samt periodiska och kvasiperiodiska (i tidsvariabeln) lösningar. För att uppnå sådana resultat, är det gängse att man använder Kolmogorov–Arnol′d–Moser–eller KAM–teorin, emellertid baseras Bourgains närmande till problemet på den mer klassiska Lyapunov-Schmidtmetoden. Han också tillämpar denna metod för att konstruera periodiska och kvasiperiodiska lösningar till många ickelinjära evolutionsekvationer [7] och [9].

3. *Navier-Stokesekvationer*

År 2008 publicerade Bourgain och Nataša Pavlović en mycket intressant artikel [16], där de löste en förmodan gällande välställdheten av Navier-Stokesekvationen med begynnelsedata i ett visst Besovrum, och visade att även om begynnelsevärdet är snabbt avtagande och har godtyckligt liten norm i det nämnda Besovrummet, så kommer lösningen att urarta efter en kort stund, i samma Besovrum. Därför är Navier-Stokesproblemet ej välställt i Besovrummet i fråga.

Detta axplock av bidrag till harmonisk analys och PDE, som näppeligen gör Bourgains stora insatser inom dessa ämnen rättvisa, kan förhoppningsvis ge läsaren en glimt av den viktiga roll som han spelade i utvecklingen av dessa ämnesområden. Läsaren skall också vara förvissad om Bourgains likaledes viktiga roll i utvecklingen av andra grenar av den rena och tillämpade matematiken, och som stöd för detta påstående, räcker det bara att hänvisa till förteckningen över hans publicerade artiklar på databasen *MathSciNet*.

(Foto 2012:George M. Bergman, CC BY-SA 4.0, klicka)

Möten med Jean Bourgain och personliga intryck

Min handledare Peter Greiner kände Bourgain, och ett tag planerade vi att jag skulle åka till IAS och jobba med honom (vilket Jean hade uttryckt sig tämligen positivt om). Men så blev det inte. Emellertid träffade jag honom på Fieldsinstitutet i Toronto, då jag var anställd som postdoktor 2004. James Colliander (nu professor vid universitetet i British Columbia, Kanada) som var en av organisatorerna till ett PDE-program på Fieldsinstitutet som pågick under det läsåret och som var Bourgains enda doktorand, introducerade oss och det var så min personliga kontakt med Jean började. Då jag jobbade på universitetet av Chicago (2008) och samarbetade med Wilhelm Schlag som hade varit Bourgains postdok en gång i tiden (nu professor vid Yale universitetet, USA), så bad Bourgain oss om att bidra med en artikel till Journal of Functional Analysis' jubileumsnummer till Paul Malliavins ära (både Willi och jag kände Paul sedan tidigare), vilket vi gjorde med nöje.

Alla som känt Jean är eniga om hans obevekliga hårdhet i sitt eget matematiska arbete, och den snabba takt som han skrev sina artiklar. Hos honom kombinerades ett gott självförtroende och tilltro på den egna förmågan, med stor generositet i att dela med sig av sina många snillrika idéer till de som samarbetade med honom. Sist men inte minst, ställdes också höga krav, inte bara på medförfattarna, utan också på läsarna av hans verk! Bourgain har alltid varit en outtömlig inspirationskälla för mig och ett par av mina arbeten har fått sina ingivelser ifrån hans verk. Men detta har onekligen varit fallet för en stor skara matematiker verksamma inom matematisk analys och angränsande områden. Därför måste man bara hålla med Terry Tao om att analysens värld är fattigare utan Jean Bourgain.

Referenser

[1] Bourgain, J. Averages in the plane over convex curves and maximal operators. *J. Analyse Math.* 47 (1986), 69–85.

[2] Bourgain, J. On dimension free maximal inequalities for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$. Geometrical aspects of functional analysis (1985/86), 168–176, *Lecture Notes in Math.*, 1267, Springer, Berlin, 1987.

[3] Bourgain, J. On Kolmogorov's rearrangement problem for orthogonal systems and Garsia's conjecture. Geometric aspects of functional analysis (1987–88), 209–250, *Lecture Notes in Math.*, 1376, Springer, Berlin, 1989.

[4] Bourgain, J. L^p-estimates for oscillatory integrals in several variables. *Geom. Funct. Anal.* 1 (1991), no. 4, 321–374.

[5] Bourgain, J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. I. Schrödinger equations. *Geom. Funct. Anal.* 3 (1993), no. 2, 107–156.

[6] Bourgain, J. Fourier transform restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations. II. The KdV-equation. *Geom. Funct. Anal.* 3 (1993), no. 3, 209–262.

[7] Bourgain, J. Construction of quasi-periodic solutions for Hamiltonian perturbations of linear equations and applications to nonlinear PDE. *Internat. Math. Res. Notices* 1994, no. 11, 475ff., approx. 21 pp.

[8] Bourgain, J. Gibbs measures and quasi-periodic solutions for nonlinear Hamiltonian partial differential equations. *The Gelfand Mathematical Seminars*, 1993–1995, 23–43, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.

[9] Bourgain, J. Quasi-periodic solutions of Hamiltonian perturbations of $2D$ linear Schrödinger equations. *Ann. of Math.* (2) 148 (1998), no. 2, 363–439.

[10] Bourgain, J. Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case. *J. Amer. Math. Soc.* 12 (1999), no. 1, 145–171.

[11] Bourgain, J.; Demeter, C. The proof of the l^2 decoupling conjecture. *Ann. of Math.* (2) 182 (2015), no. 1, 351–389.

[12] Bourgain, J.; Guth, L. Bounds on oscillatory integral operators based on multilinear estimates. *Geom. Funct. Anal.* 21 (2011), no. 6, 1239–1295.

[13] Bourgain, J. A note on the Schrödinger maximal function. *J. Anal. Math.* 130 (2016), 393–396.

[14] Bourgain, J.; Demeter, C.; Guth, L. Proof of the main conjecture in Vinogradov's mean value theorem for degrees higher than three. (English summary) *Ann. of Math.* (2) 184 (2016), no. 2, 633–682.

[15] Bourgain, J.; Mirek, M.; Stein, E. M.; Wróbel, B. On dimension-free variational inequalities for averaging operators in $\mathbb{R}^d$. (English summary) *Geom. Funct. Anal.* 28 (2018), no. 1, 58–99.

[16] Bourgain, J.; Pavlović, N. Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in $3D$. *J. Funct. Anal.* 255 (2008), no. 9, 2233–2247.

[17] Carleson, L. On convergence and growth of partial sums of Fourier series. *Acta Math.* 116 1966 135–157.

[18] Carleson, L. Some problems in harmonic analysis related to statistical mechanics. Fourier analysis and approximation theory (Proc. Colloq., Budapest, 1976), Vol. I, pp. 213–217, *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, 19, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[19] Carleson, L.; Sjölin, P. Oscillatory integrals and a multiplier problem for the disc. Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, III. *Studia Math.* 44 (1972), 287–299.

[20] Córdoba, A. A note on Bochner-Riesz operators. *Duke Math. J.* 46 (1979), no. 3, 505–511.

[21] Dahlberg, B. E. J.; Kenig, C. E. A note on the almost everywhere behavior of solutions to the Schrödinger equation. Harmonic analysis (Minneapolis, Minn., 1981), pp. 205–209, *Lecture Notes in Math.*, 908, Springer, Berlin-New York, 1982.

[22] Du, X.; Zhang, R. Sharp L^2 estimate of Schrödinger maximal function in higher dimensions. *arXiv*:1805.02775 [math.CA]

[23] Fefferman, C. The multiplier problem for the ball. *Ann. of Math.* (2) 94 (1971), 330–336.

[24] Fefferman, C. A note on spherical summation multipliers. *Israel J. Math.* 15 (1973), 44–52.

[25] Guth, L. Restriction estimates using polynomial partitioning II. *Acta Math.* 221 (2018), no. 1, 81–142.

[26] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E. A maximal theorem with function-theoretic applications. *Acta Math.* 54 (1930), no. 1, 81–116.

[27] Hunt, R. A. On the convergence of Fourier series. 1968 Orthogonal Expansions and their Continuous Analogues (*Proc. Conf., Edwardsville, Ill.*, 1967) pp. 235–255 Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, Ill.

[28] Hörmander, L. Oscillatory integrals and multipliers on $\mathrm{F}L^p$. *Ark. Mat.* 11, 1–11. (1973).

[29] Sjölin, P. Regularity of solutions to the Schrödinger equation. *Duke Math. J.* 55 (1987), no. 3, 699–715.

[30] Stein, E. M. Maximal functions. I. Spherical means. *Proc. Nat. Acad. Sci.* U.S.A. 73 (1976), no. 7, 2174–2175.

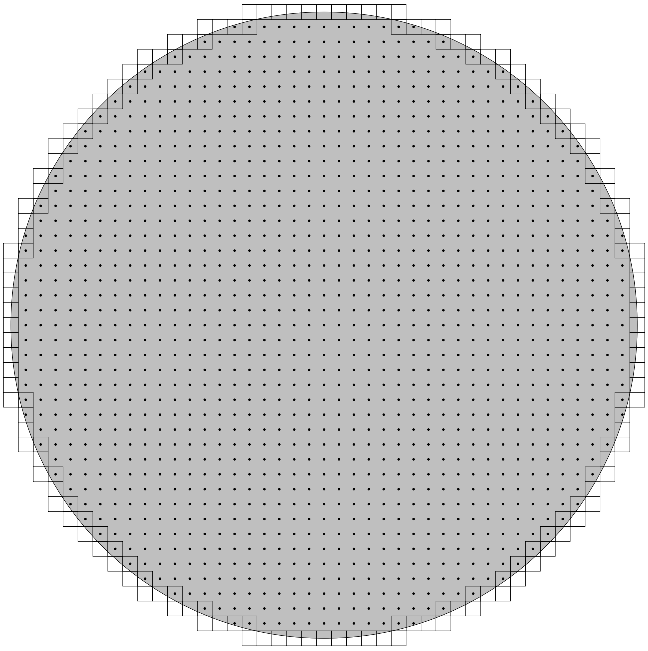
[31] Stein, E.M. Some problems in harmonic analysis, in Harmonic Analysis in Euclidean Spaces *Proc. Sympos. Pure Math.*, Williams Coll., Williamstown, Mass., 1978, Part 1, pp. 3–20.

[32] Stein, E. M.; Strömberg, J.-O. Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n. *Ark. Mat.* 21 (1983), no. 2, 259–269.

[33] Tao, T. The Bochner-Riesz conjecture implies the restriction conjecture. *Duke Math. J.* 96 (1999), no. 2, 363–375.

Titelsidans Illustration

Ulf Persson



Bilden visar gitterpunkterna inom en cirkel av radien $N(21)$. Det är lätt att inse att deras antal är approximativt lika med cirkelns area πN^2, genom att för varje sådan gitterpunkt centrera en enhetskvadrat. Vissa av dessa kvadrater kommer att sticka ut ur cirkeln, och vissa delar av cirkelskivan förblir otäckta. Frågan är till vilken grad dessa två fenomen kommer att ta ut varandra, vilket uppenbarligen är en ytterst delikat fråga. I bilden visas de kvadrater som skär cirkelranden av vilka en del härrör från gitterpunkter strax utanför cirkelskivan. Det är lätt att inse att det kommer att vara precis $8N$ sådana kvadrater ty det kommer att vara $2N$ vertikala linjer och $2N$ horsiontella linjer som skär cirkelranden två gånger.[1] Varje kvadrat kommer att innehålla en cirkelbåge, genomsnittslängden på en sådan kommer således att alltid vara $\frac{\pi}{4}$. Och en intressant fråga är huruvida detta är vad man statistiskt kan förvänta sig. Man kan notera att det råder en D_4 symmetri genererad av $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$ och $(x, y) \mapsto (y, x)$ således kan man reducera till sektorn med ena radien längs positiva x-axeln och bildandes vinkeln $45°$. En kombinatorisk fråga hur sekvensen ser ut om man håller reda på när cirkeln skär en horisontell (H) respektive vertikal linje (V). I vårt fall får vi om vi börjar på x-axeln sekvensen $HHHHHVHHHVHHVHHVHVHVH$ sedan spegelvändes denna och varje V ersätts med ett H och vice versa. Det är mer H än V, asymptotiskt är kvoten som man lätt inser $1 + \sqrt{2}$ i vårt fall rör det sig om 15 versus 6. Om vi låter kvadraterna vara en bas för öppna mängder kan vi tala om det inre av cirkelskivan samt det slutna höljet. Randen har arean $8N$, antalet gitterpunkter ligger mellan arean av det inre och det för det slutna höljet, samma sak gäller för arean av skivan således får vi en feluppskattning $8X^{\frac{1}{2}}$ (jämför Michael Benedicks artikel).

Låt oss för stora cirklar approximera cirkelbågen i kvadraten med en korda. Man beräknar lätt dess längd L med avseende på x och θ (se nedan). Antag att x, θ är likformigt fördelade och tar således värden på en rektangel R given av $0 \leq x \leq 1$ och $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (vi behöver bara begränsa oss till den ovan angivna sektorn). Det är elementärt att beräkna integralen $\int_R L dx d\theta$ i de båda fallen och vi erhåller respektive $\log(1 + \sqrt{2}) + \frac{1-\sqrt{2}}{2} = 0.674267$ och $\frac{1}{2}\log(\sqrt{2} + 1) = 0.440687$. Vi påminner om att dessa fall förekommer asymptotiskt i proportionerna $(\sqrt{2} + 1) : 1$ och medelvärdet blir då

$$\frac{4((1 + \sqrt{2})\log(1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}(\log(\sqrt{2} + 1) - 1))}{\pi(2 + \sqrt{2})} = 0.771396$$

vilket knappast är $\frac{\pi}{4} = 0.785398$, således är inte x, θ likformigt fördelade, som man skulle kunna tro. (forts. se sidan 30)

[1] I allmänhet om radien R är ett godtyckligt positivt reellt tal väljer vi $N = \lfloor R \rfloor$. Vi måste även anta att inga kvadrathörn faller på cirkelranden vilket inträffar precis när $4R^2$ är summan av två udda heltalskvadrater så väsentligen endast om alla primtal $p = 3(4)$ förekommer med jämn multiplicitet i detta heltal.

Elias M. Stein *13/1* 1931 – *23/12* 2018

Peter Sjögren

Eli Stein avled strax före jul 2018. För oss inom det vida fältet harmonisk analys var han nog den främste, och hade så varit under sin långa karriär.

Som barn bodde han i Antwerpen, i en judisk familj. När Belgien invaderades 1940, flydde familjen till USA. Stein berättade en gång att flykten underlättades av att hans far var diamanthandlare, eftersom diamanter är lätta att smuggla med sig.

Stein studerade vid University of Chicago och disputerade där 1955. Som handledare hade han Antoni Zygmund, känd för sin klassiska bok om Fourierserier och mycket annat. Efter anställningar vid MIT och sedan University of Chicago blev han "full" professor vid University of Princeton 1963.

Här kan bara några av hans viktigaste insater nämnas. Calderón och Zygmund införde i början av 1950-talet en reell metod för att behandla singulära integraler, och Stein förde denna teori långt vidare. För detta och annat uppfann han en form av komplex interpolation där inte bara L^p-rummen utan även operatorn tillåts variera. I samband med restriktionssatser visade han vilken viktig roll ytors krökning kan spela i Fourieranalys.

Det var känt sedan länge att punktvis konvergens i många situationer följer av en uppskattning för motsvarande maximalfunktion, man ersätter "lim" med "sup". Stein visade att den omvända implikationen ofta gäller. Han förbättrade också Cótlars lemma om nästan ortogonala operatorer, dessutom med ett mycket elegant bevis. Vidare bidrog han till representationsteorin för Liegrupper, och han har sitt namn knutet till Kunze-Stein-fenomenet som handlar om faltning på halvenkla Liegrupper. Inom komplexanalys fann han mycket användbara explicita approximativa lösningar till $\overline{\partial}$-ekvationen i strikt pseudokonvexa områden.

Stein skrev en rad fundamentala böcker. Hans "Singular integrals and differentiability properties of functions" från 1970 står sig väl ännu idag. Den korta monografin "Topics in harmonic analysis" innehåller resultat om halvgrupper av operatorer; numera talar man om Littlewood-Paley-Stein theory. Den citeras ofta, eftersom delar av materialet knappast återfinns någon annanstans. Boken har röd-orange färg och tillkom i början av 1970-talet då Mao hade många anhängare världen över, så den fick benämningen "Steins lilla röda".

År 1993 kom det omfattande verket "Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals", som innehåller mycket av vad som hade hänt efter 1970.

Stein handledde mer än 50 doktorander, varav många nu är välkända matematiker. En av dem är Fieldsmedaljören Charles Fefferman, som tillsammans med Stein utvecklade teorin för Hardyrum och BMO. En annan av hans doktorander stötte jag på då jag på 1980-talet besökte min samarbetspartner Garth Gaudry i Adelaide. Garth gav då privatlektioner åt en begåvad 12-årig pojke av kinesisk härkomst. Pojken hette Terence Tao, mer behöver inte sägas.

Som person var Eli alltid vänlig och hjälpsam, i matematiska och andra sammanhang. De som hade förmånen att få samarbeta med honom brukade säga att det jobbigaste var att hänga med, Eli var oerhört snabbtänkt. Han hade ett visst intresse för politik, och frågade gärna matematiker han träffade om förhållandena i deras hemländer. Efter presidentvalet i USA 2016 berättade han att han hade hoppats på Bernie Sanders.

Sir Michael Atiyah *22/4* 1929 − *11/1* 2019

Ulf Persson

Första gången jag stötte på namnet 'Atiyah' måste ha varit tidigt 1970 när jag köpte den klassiska boken 'Introduction to Commutative Algebra' av Atiyah och MacDonald. 'Atiyah' vilket konstigt namn tänkte jag då, och läste sedan på omslagsbladet att han fått Fieldsmedaljen i Moskva 1966, en typ av utmärkelse som jag för övrigt först ett halvår tidigare hade blivit medveten om, och jag förstod att detta inte var vem som helst. Jag har fortfarande kvar boken, med sitt röda tejpade omslag, där inköpsdatumet (februari 1970) är prydligt textat (en vana som jag snart gjorde mig av med). Jag finner även att boken kostade 70 kronor, vilket var mycket pengar för femtio år sedan, och som student vid den tiden gick således det mesta av mina disponibla medel åt att köpa matematikböcker. Många av dem förblev olästa, men Atiyah-MacDonald var en god investering, den tillhör i själva verket en av de få matematikböcker jag läst från pärm till pärm, och som en exemplarisk student löste jag så gott som samtliga uppgifter.

'Atiyah' är mycket riktigt, åtminstone för oss västerlänningar, ett något udda namn, och är i själva verket arabiskt. Hans far - Edward Selim Atiyah (1903-64) - var libanes, och närde under hela livet, enligt sin son, en dröm om att bli en engelsk gentleman, men trots att han utbildade sig vid Oxford och var mer engelsk än engelsmännen, accepterades han aldrig som sådan och blev istället något av en arabisk nationalist och opinionsbildare. Han skrev vid unga år en självbiografi med titeln 'An Arab Tells His Story' som kom ut strax efter kriget, och ett decennium senare 'The Arabs' som ofta citerades. Han var sekreterare på londonkontoret för 'the Arab League' och drabbades av en hjärtattack och dog under en debatt om Arabisk-Israeliska relationer anordnad av the Oxford Union. Detta präglade den unge Atiyah och när dennes gode vän Hirzebruch firades med en försenad 65-års konferens i Tel-Aviv vägrade han att deltaga. Som ett kuriosium kan nämnas att fadern Atiyah även skrev en deckare med titeln 'The Thin Line' (1951) senare återutgiven under titeln 'Murder, My Love' och till och med filmad av Chabrol under titeln 'Just Avant La Nuit'(1971) [1] Modern däremot var skotsk, men dotter till en komminister i Yorkshire och hade träffat fadern vid Oxford.

Visserligen var Atiyah född i London men växte upp i Khartoum i Sudan där han genomgick sin grundläggande skolutbildning. Sedan följde en kort tid i Libanon, innan han fortsatte sina studier vid Victoria College i Kairo, och först efter kriget flyttade familjen permanent till England[2]. Med andra ord en ganska oortodox bakgrund. Hans matematiska intresse väcktes mycket tidigt, och bortsett från en kort period i Kairo, då han blev intresserad av kemi, har han varit matematiken trogen. I kemi, speciellt den oorganiska, har han berättat, tvingades man lära sig så många fakta utantill (den organiska hade lite mera struktur), medan i matematiken räcker det med att förstå några principer, sedan bir det lätt (åtminstone på skolnivå), man behöver inte minnas så mycket. Väl i England sändes han till Manchester Grammar School, en av de bästa matematikskolorna i England, där han drillades under två år för att vinna ett stipendium till Cambridge. Han berättar att skolan var mycket tävlingsinriktad och tuff och han tvigades arbeta mycket hårt för att hålla sig i främsta ledet. Han hade förmånen att ha en gammaldags men inspirerande lärare som väckte hans fascination för den projektiva geometrins elegans, liksom för skönheten hos Hamiltons kvaternioner, och han skulle för resten av livet identifiera sig som geometriker, vilket kan tolkas på

[1] För den filmintresseade kan även nämnas att några år tidigare hade en japansk film producerats baserad på samma bok. Jag är tacksam för att Bo Berndtsson visade mig boken med det värsta kioskdeckaromslaget. Själv hade han försökt läsa den men blivit alltför äcklad av intrigen. Tilläggas kan att fadern även skrev andra deckare och romaner.

[2] Familjen var brittisk, och hemma (liksom i skolan) talades det engelska, men arabiska var inte främmande för honom, det var språket inom släkten. Dock de arabiska studierna kröntes inte med någon framgång, och han lärde sig inte skriva arabiska på acceptabel nivå, det enda skolämnet han misslyckades med.

många olika sätt under olika stadier. 1947 vann han mycket riktigt det åtråvärda stipendiet till Trinity College, dit de bästa i skolan anmodades söka, men istället för att börja omedelbart beslöt han uppskjuta det med två år, och istället göra sin National Service som då var obligatorisk, han var ju ändå två år yngre än sina studiekamrater. Han utnyttjade tiden maximalt genom att läsa böcker och artiklar och den sista tiden av militärtjänstgöringen fick han tillbringa i Cambridge. Detta uppehåll ansåg han inte vara ett slöseri, utan tvärtom, genom studieuppehållet mognade han, och när han återvände till Cambridge var han fylld av entusiasm, medan de klasskamrater som hade fortsatt direkt började lida av en viss utmattning. Karriären därefter blev spikrak. En B.A. 1952, då hade han redan publicerat sitt första papper (om tangenter till en vriden kubik), och en avhandling med titeln *Some Applications of Topological Methods in Algebraic Geometry* följde 1955 under den legendariske Hodges ledning. Titeln för tankarna till Hirzebruchs klassiska verk *Neue topologische Methoden in der algebraische Geometrie* som stammar från tidigt 50-tal från dennes tid vid IAS. Avhandlingen innebar ett avsteg från den klassiska geometrin som fortfarande härskade vid Cambridge vid den tiden och som illustreras av Semple and Roths klassiska bok, och han hade tidigare studerat under den mer klassiskt inriktade Todd, men hade valt Hodge ty denne hade ett internationellt rykte. Det var inte helt lätt, Hodge hade rykte om sig att vara svår och attraherade få studenter, men detta år hade han ovanligt många, fyra stycken i själva verket och utöver Atiyah även den framtide kosmologen Roger Penrose. Med Hodge introducerades han till moderna metoder och fick därmed bryta upp från den traditionella geometrin som han hade uppskattat väldigt mycket. Således ett exempel på en av dessa kritiska vändpunkter i livet. Att börja forska innebär en stor omställning, visste han att berätta, och det är mycket naturligt att man drabbas av tvivel på sin egen förmåga. Detta drabbar speciellt de bästa, ty de har mycket höga ambitioner och är insiktsfulla nog att inse sina begränsningar, ja rentav Serre funderade på att hoppa av under sin första tid. För de goda medelmåttorna däremot är det enklare, de kan vara ganska nöjda med vad de åstadkommit. Efter avhandlingen sökte han och fick ett stipendium att studera vid IAS ett år, och där lärde han känna Serre, Hirzebruch, Kodaira, Spencer, Bott och Singer, kontakter som skulle visa sig livsavgörande. Efter Princeton återvände han till Cambridge, där han i praktiken ersatte Hodge som med ålderns rätt började dra sig tillbaka, och införde vissa amerikanska nymodigheter som att organisera ett regelbundet kollokvium. Han stannade fram till 1961, sedan blev hans bas Oxford fram till 1990 (avbrutet av tre år vid IAS 1969-72) för att därefter bli föreståndare för det nyinrättade Newtoninstitutet i Cambridge och under de sista tjugo åren av sitt liv var han affilierad till Edinburgh, troligen på grund av sina skotska rötter på mödernet.

Att ge en fullödig översikt över hans arbeten, hans samlade verk innefattar sju band, vore givetvis omöjligt och jag skall begränsa mig till några höjdpunkter.

Matematik

Algebraisk geometri utgjorde hans första kärlek, och man kan här nämna hans klassifikation av vektorknippen på en elliptisk kurva. Grothendieck hade visat att varje vektorknippe på en rationell kurva (Riemannsfären) splittras upp i en direkt summa av linjeknippen. Detta stämmer inte för elliptiska kurvor där man lätt kan definera ett irreducibelt vektorknippe av rang två[3]. Atiyah klassificerade de irreducibla vektorknippena och visade att dessa är väsentligen unikt bestämda av rang och grad[4], och att som man förväntar sig, varje knippe splittrar upp på ett unikt sätt i

[3] Vektorknippen av rang två på en kurva är intimt förknippade med regelytor över kurvan. Genom att blåsa upp en punkt på ytan, gör man fibern till en så kallad exceptionell divisor som kan blåsas ner. Detta kallas en elementär transformation. Gör man tre sådana på generiska punkter på en trivial regelyta över den elliptiska kurvan, får man en kurva där varje sektion har strikt positivt självsnitt och kan således inte komma från ett linjeknippe kompleterat i oändligheten.

[4] Rangen av ett vektorknippe bör vara uppenbart. Till varje vektorknippe kan man associera dess determinant, genom att ta determinanterna av transitionsmatriserna och därvid erhålla ett linjeknippe vars grad säges vara det ursprungliga knippets. Genom att ta tensorprodukten med linjeknippen kan man alltid reducera till fallet när graden

en summa av irreducibla knippen. I retrospekt är inte detta resultat så slående, men man skall inte glömma att härvidag var Atiyah en pionjär och intoducerade metoder som sedan blev allmängods. Han har berättat att en stor del av arbetet på artikeln skedde medan han körde på tomma amerikanska motorvägar under en av sina 'cross-country trips'. På frågan om han inte då och då måste stanna bilen för att skriva ner vad han just kommit på, skakade han på huvudet, och menade att när man väl en gång kommit på hur man skall gå tillväga kan man lätt återskapa det när tillfälle ges. Jag skulle vilja betona att detta att förstå hur man skall gå till väga är något som är svårt om ens möjligt att formulera, det finns bara där i hjärnan. För övrigt har studiet av vektorknippen på kurvor och mer allmänt på variteter av högre dimensioner har under decennier utgjort ett aktivt forskningsområde. Man kan se detta arbete som övergången från mer traditionell matematik till mer visionär, vilket skulle utmärka honom.

(topologisk) K-teori utvecklades tillsammans med Hirzebruch under 60-talet. Detta har en direkt koppling till vektorknippen och är baserat på kärvteorin som utvecklades i Frankrike under senare delen av 40-talet.

Hirzebruch presenterade i början av 50-talet en elegant teori för Riemann-Roch för komplexa mångfalder. Den klassiska Riemann-Roch kunde då formuleras i termer av linjeknippen L och kohomologiteori.

$$\dim H^0(L) - \dim H^1(L) = \deg(L) + 1 - g$$

där g är genuset hos kurvan och $H^0(L)$ kan tolkas som dimensionen hos de globala sektionerna till knippet L och $H^1(L) \cong H^0(K-L)$ där K är den kanoniska divisorn till kurvan (givet av graden $2g-2$). Vad det hela kokar ner till är att finna meromorfa funktioner på Riemannytorna med nollställen och poler med givna multipliciteter vid givna punkter. Detta problem kan lätt lösas för Riemannsfären, och via theta funktioner för elliptiska kurvor. Men Riemann-Roch är starkare, med dess hjälp bevisar man att faktiskt den enda komplexa strukturen på S^2 är Riemannsfären (d.v.s. $\mathbb{C}P^1$). Nu kan detta generaliseras till högre dimensioner och vektorknippen, ja rentav till allmänna koherenta kärvar, men låt oss begränsa oss till vektorknippen E på ett rum X. Vi betraktar då den alternerande summan

$$\chi(X,E) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X,E)$$

Alternerande summor av (ko)homologigrupper är ett genomgående tema i all homologiteori. Kanske första gången vi träffar på det är i samband med definitionen för eulerkaratäristiken $e(X)$ för ett rum X nämligen som en alternerande summa av betti-talen d.v.s. dimensionerna för $H_i(X)$ med mer eller mindre godtycklig koefficient-kropp. Denna definition är dock inte så lyckad för beräkningar ty betti-talen är betydligt svårare att beräkna än euler-talet, och i den alternerande summan försvinner information. Ett annat exempel på en alternerande summa är den av spåren för de inducerade linjära transformationerna på (ko)homologi-nivå av en avbildning f. En sådan ger eulerkaraktäristiken för fix-punktmängden, och är känd som Lefschetz fix-punkt sats.

och problemet är att ge en formel för denna. Hirzebruch visade att

$$\chi(X,E) = \int_X ch(E)td(X)$$

där $ch(E), td(X)$ betecknar chern-klassen av vektorknippet E och todd-klassen av tangentknippet till X och skall ses som element i en lämplig kohomologiring och därmed kunna ses som polynom. Den formella cup produkten ger en topp-form om evalueras, d.v.s. i praktiken integreras, på topp-cykeln, d.v.s. den unika fundamentalcykeln. De explicita formerna för dessa kan beräknas elegant via genererande serier som det vore för invecklat att gå närmare in på.

är mellan noll och rangen, via euklides algoritm.

Om E är ett linjeknippe L existerar bara en chern-klass nämligen $c_1(L) = \deg(L)$ och för enkelhetens skull skiver vi L för $c_1(L)$. Den totala chernklassen $ch(L)$ skrivs då formellt som $e^L = 1 + L + \frac{1}{2}L^2 + \frac{1}{6}L^3 + \ldots$ medan för den totala Toddklassen använder vi serien $\frac{x}{1-e^{-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + \ldots$ (den allmänna formeln kan uttryckas med Bernoullital $\frac{B_n}{(2n)!}x^{2n}$). Vi kan betrakta cherntalen till ett rum X (d.v.s. cherntalen till dess tangentknippe) som ett formellt polynom $1 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$ (c_i är ett element i $H^2(X)$) och formellt faktorisera den som $(1+\gamma_1 x)(1+\gamma_2 x)\ldots(1+\gamma_n x)$ och sätta $td(X) = \prod_i \frac{\gamma_i}{1-e^{-\gamma_i}}$. I det endimensionella fallet har vi bara γ_1 och således $c_1 = \gamma_1$ därmed blir toddklassen $1 + \frac{c_1}{2}$ (enligt serieutvecklingen ovan) tar vi produkten får vi $(1+L)(1+\frac{c_1}{2}) = 1 + (L + \frac{1}{2}c_1) + \ldots$ där vi ignorera alla termer utom den som tillhör topp-homologin H^2. L står som bekant för $\deg(L)$ och $c_1(X) = c_1(-K) = 2 - 2g = e(X)$ pch $L + \frac{1}{2}c_1$ tolkas då som $\deg(L) + 1 - g$. För att betrakta fallet med dimension 2 får vi nu multiplicera

$$(1+\frac{1}{2}\gamma_1 - \frac{1}{12}\gamma_1^2)(1+\frac{1}{2}\gamma_2 - \frac{1}{12}\gamma_2^2) = 1 + \frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2) + \frac{1}{4}(\gamma_1)(\gamma_2) + \frac{1}{12}(\gamma_1^2+\gamma_2^2)$$

vilket kan förenklas till

$$1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{3\gamma_1\gamma_2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2}{12}$$

för den sista termen kan vi skriva

$$\frac{\gamma_1\gamma_2 + (\gamma_1+\gamma_2)^2}{12} = \frac{c_2 + c_1^2}{12}$$

. Tar vi nu produkten

$$(1 + L + \frac{1}{2}L^2)(1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)) = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) + \frac{1}{2}L(-K) + \frac{1}{2}L^2$$

erhåller vi Riemann-Roch för ytor

$$\dim H^0(L) - \dim H^1(L) + \dim H^2(L) = \frac{1}{2}L(L-K) + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$$

'Man kan notera att $\frac{1}{12}(c_1^2 + c_2)$ är det så kallade holomorfa eulerkaraktäristiken $1 - q + p_g$ där q är antalet holomorfa 1-former oh p_g antalet holomorfa 2-former, och således ett heltal, vilket brukar benämnas Noethers sats efter Max Noether, fadern till Emmy Noether.

Grothendieck träder senare in på scenen och definierar vad som kommer att kallas Grotehdieck-gruppen genom att till varje semi-grupp funktoriellt associera en grupp

Detta är givetvis elementärt ur en ren formell synpunkt. Givet en abelsk monoid $(A, +)$ definera en relation $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ på A^2 omm $\exists c \in A : a_1 + b_2 + c = a_2 + b_1 + c$. Detta associerar en gruppstruktur på $A^2/\sim$ som läsaren lätt kan övertyga sig om. Notera att från $a + c = b + c$ kan man inte i allmänhet sluta att $a = b$ utan vi får en grövre indelning, som i sin tur kan inbäddas i en grupp precis som de naturliga talen i heltalen. Exempel på sådana monoider utan kancelleringsegenskapen utgörs av just vektorknippen. En variant på det hela är att kvotera ut relationer $E' + E'' - E$ där $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ är en kort exakt sekvens..

Filosofin bakom det hela är att livet vore mycket enklare om alla korta exakta sekvenser splittrades och varje vektorknippe vore en direkt summa av linjeknippen. Grothendieck erhöll genom att betrakta korta exakta sekvenser av koherenta kärvar den så kallade Grothendieck gruppen $K_0(X)$ vilket grovt sett ger upphov till chernavbildningen $\mathrm{ch} : K_0(X) \to H^*(X, \mathbb{Q})$ av gruppen in i den jämna kohomologiringen[5]. Vitsen med det hela är att vi kan låtsas som om alla vektorknippen vore

[5] Vi har som bekant en 'cup'-produkt $\cup : H^n \times H^m \to H^{n+m}$ vilket gör den direkta summan av kohomologigrupper $\oplus_n H^n$ till en ring liksom $\oplus_n H^{2n}$ till en delring. Kohomologigruppen verkar även på homologin via 'cap' produkten $\cap : H^n \times H_m \to H_{n+m}$

direkta summor av linjeknippen. Funktorialiteten kommer till uttryck ett kommutativt diagram. Givet en avbildning $f : X \to Y$ får vi

$$\begin{array}{ccc} K^0(Y) & \xrightarrow{f^!} & K^0(X) \\ \downarrow \mathrm{ch} & & \downarrow \mathrm{ch} \\ H^*(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^*(X) \end{array}$$

där $f^! = \sum(-1)^i R^i f^*(K^0(Y) \to K^0(X))$ och f^* är den vanliga 'pullbacken' på kohomologin.

Grothendiecks genombrott ägde rum i mitten av 50-talet och skissades upp i ett brev till Serre, som tillsammans med Borel presenterade det i en mer polerad form. Det revolutionära bestod i att betrakta Riemann-Roch inte som något som berörde en varitet X utan en avbildning $f : X \to Y$ mellan två varieteter och kunde uttryckas via ett annat kommutativt diagram. Eller via formeln som relaterar kohomologin för ett komplex $\mathcal{F}$ av kärvar.

$$ch(f_! \mathcal{F}^*) td(Y) = f_*(ch(\mathcal{F})) td(X)$$

där f är som ovan och $f_! = \sum_i (-1)^i R^i f_* : K_0(x) \to K_0(Y)$ där $f_!$ uttalas som f-skrik (!) och $R^i f_*$ betecknar en högerderiverad funktor en del av en invecklad 'yoga' som det båtar föga att gå in på här. Det klassiska fallet erhåller man när man väljer Y att vara en punkt och koefficientkroppen de komplexa talen, men Grothendieck siktade alltid mot största möjliga generalitet, med förbehållet att denna skulle vara naturlig.

Vad Atiyah insåg var att Grothendieck-gruppen K_0 endast utgjorde nivån noll av högre K-grupper som skulle kunna användas som en kraftfull kohomologiteori och K-teorin var född. Detta är vad man kan kalla en visionär matematisk insats. Typiskt är att när Hirzebruch skulle till att presentera det hela i Paris upptäckte denne att ett visst faktum som spelade en nyckelroll och utan vilket hela bygget skulle kollapsa, inte var bevisat. Det måste helt enkelt vara sant, tyckte Atiyah allt hängde ihop så vackert. Han lyckades dock på kort tid presentera ett logiskt bevis, som sedan förenklades av Bott. Det illustrerar hur Atiyah tänkte i stora drag och alltid, liksom fallet med Grothendieck, med en klar strategi.

Man kan se det hela som mycket abstrakt, men det är inte fråga om en abstraktion för abstraktionens egen skull, utan man kan jämföra det hela osökt med introduktionen av negativa tal. Om man bokstavligen betraktar negativa tal såsom tal blir de helt obegripliga, och mycket riktigt de mötte stort motstånd när de först introducerades och rester av denna misstro kan faktiskt fortfarande skönjas här och var. Men utan negativa tal hur skulle vi då kunna manipulera på det sätt som vi är vana vid? På samma sätt skall man betrakta de abstrakta begrepp vars syfte är just att underlätta beräkningar och manipulationer ('to give more elbow room' som författarna uttryckte det i Atiyah-MacDonald). Detta kan ses som en aspekt på matematikens platoniska väsen. Atiyah talar om att sfärer inte existerar i den verkliga världen, men det betyder inte att de är overkliga, de existerar i den mänskliga fantasin och detta är den viktigaste världen som finns, enligt honom. Men ibland undrar man om inte vissa abstrakta matematiska begrepp ligger bortom den mänskliga fantasins föreställningsförmåga och vi leds dit av formalismens obönhörliga kraft. Man är frestad att travestera Pascal *La raison a ses raisons que le coeur ne connaît point* [6]

Med dessa arbeten i K-teori hade Atiyah således fjärmat sig mycket från den klassiska som ursprungligen hade väckts hans kärlek. Atiyah jämförde sig med Bott vid ett tillfälle, och hävdade att Bott var gammaldags och ville alltid skriva ner konkreta formler medan Atiyah föredrog att vara mer abstrakt, men erkände att när han tvingades att så göra av sin medförfattare gav det alltid nya insikter. Med sin student Segal var det tvärtom, då var Atiyah konkret och gammaldags, och denne undrade alltid över hur Bott och Segal någonsin lyckats skriva ett gemensamt papper.

[6] Man kan jämföra med kvantteorin som ingen fysiker begriper sig på, men som de kan 'räkna' med framgångsrikt.

Att närmare gå in på K-teorin vore ogörligt, men jag vill i alla fall nämna Botts periodiciets sats som kanske de flesta har hört talas om utan att nödvändigtvis sätta sig in i vad den innebär. Denna lär ha utgjort en väsentlig inspiration för Atiyah och kan i K-teorin formuleras i de enklaste termer som

$$K(X) \otimes K(S^2) \equiv K(X \times S^2)$$

Partiella differentialekvationer. Det resultat för vilket Atiyah är mest känd för är otvivelaktligen **Atiyah-Singer Index Teorem** och också det som han var stoltast över. Och det var för detta, samt sin insatser inom topologisk K-teori, som han belönades med Fieldsmedaljen 1966. Teoremet säger att ett index som uppkommer i samband med partiella differentialekvationer, närmare bestämt elliptiska sådana, även kan ges en topologisk tolkning och därmed faktiskt beräknas i motsats till den analytiska definitionen (som är enklare att formulera). Sambandet hade tidigare förmodats och verfierats i några enstaka fall, men det var Atiyah och Singer som bevisade teoremet[7] som skulle visa sig ha många djupa och oväntade tillämpningar.

Om vi på en skala ett till oändligheten skulle ge ett för det faktum att en euklidisk triangel har vinkelsumman π, något som de allra flesta människor bör känna till, inte bara matematiker[8]. Kan vi ge tio för Gauss-Bonnets sats, nämligen den att om man integrerar Gauss-krökningen på en kompakt Riemann yta X får man alltid värdet $2\pi e(X)$ där $e(X) = 2 - 2g$ är eulerkaraktäristiken där g är antalet hål, också känt som genuset[9]. Beviset är rent kombinatoriskt om man ger 'rätt' definition av krökning i varje punkt[10]

> Ett elementärare exempel på en index sats, kanske hundra på skalan, är att betrakta signaturen för en reell 4-mångfald X. Vi har då via cup-produkt en kvadratisk form på $H^2(X, \mathbb{Z})$ som har en signatur givet av skillnaden mellan 'positiva' och 'negativa' kvadrater Exempelvis $x^2 + y^2 - z^2$ har signaturen $2 - 1 = 1$ (vi behöver ibland gå till $\mathbb{Q}$ för att få en diagonalisering). Definitionen är enkel men svårt att lägga vantarna på. I fallet med komplexa 2-dimensioner kan vi dock enkelt uttrycka signaturen med hjälp av chern-invarianter, i själva verket ges det av $\frac{c_1^2 - 2c_2}{3}$ och speciellt i det projektiva fallet är det enkelt att beräkna dessa. Denna sats bevisades av Hirzebruch som förarbete till sin generaliserade Riemann-Roch.

Men på denna skala var skall man placera Atiyah-Singer? Kanske tusen?

Men vad är teoremet? Det kräver ett visst förarbete. Låt $U \subset \mathbb{R}^n$ vara en öppen mängd och V, W ändligt dimensionella komplexa vektorrum, samt $C^\infty(U, V)$ vektorrummet av differentierbara funktioner f med värden i V. En differential operator D av ordning r är given av

$$Df = \sum_{|t| \leq r} g_t D^t f$$

där man på sedvanligt vis skall tolka t som ett multi-index $t_1, t_2 \dots t_n$ med $|t| = \sum_i t_i$ och $D^t = (-i)^{|t|} \frac{\partial^{|t|}}{\partial^{t_1} \dots \partial^{t_n}}$ (med $i^2 = -1$) och $g_t \in C^\infty(U, \mathrm{Hom}(V, W))$. En sådan ger en linjär avbildning

[7] Det hade formulerats av Gelfand strax innan Atiyah och Singer gav sig i kast med det, och desa skulle sedan ständigt komma på nya bevis och infallsvinklar.

[8] Visst skulle π i detta sammanhang förvirra de flesta icke-matematiker, men vi kan kalla det vad vi vill som säg 180^o, huvudsaken att det är konstant.

[9] De bilder man brukar ha på en Riemann-yta är ofta mycket enkla, och man ser direkt hur många hål det rör sig om, men ta en tubulär omgivning till en klätterställning, hur många hål har den? Euler karaktäristiken beräknar man bäst genom att dela upp ytan i cylindrar och sfärer med ett icke-negativt antal hål.

[10] Som $\lim_{\Delta \to p} \frac{d(\Delta)}{\mu(\Delta)}$ Där Δ är en följd av trianglar som konvergerar mot p och d anger dess totala vinkelsummedifferenser och μ dess areor. Det hela har även en diskret version, som går tillbaka till Descartes och troligen ännu tidigare då vi betraktar en polyheder med platta sidor och hörn där all krökning är koncentrerad, och som lätt beräknas.

$D : C^\infty(U,V) \to C^\infty(U,W)$. Till detta definierar man traditionellt symbolen $\sigma_r(D)$ till D genom att för varje $v = (u,y) \in U \times \mathbb{R}^n$ anordna den linjära avbildningen mellan V och W given av

$$\sigma_r D(v) = \sum_{|t|=r} g_t(u) y^t$$

D säges vara elliptisk av ordning r om för varje $v = (u,y)$ med $y \neq 0$ homomorfismen $\sigma_r D(v)$ är inverterbar.

Nu kan man generalisera vektorrummen till vektorknippen genom att betrakta det hela lokalt över öppna mängder, utvidga begreppet symbolen $\sigma_r(D)$ till en homorfism mellan knippen och som satisfierar $\sigma_{r_1+r_2}(D_2D_1) = \sigma_{r_2}(D_2)\sigma_{r_1}(D_1)$ för en komposition av differentialoperatorer D_1, D_2 mellan rummen av globala sektioner $\Gamma(E)$ av vektorknippen E. Om homomorfismen är en isomorfism kallar vi operatorn elliptisk.

Nu antar vi att X är kompakt och har en Riemann-metrik så vi kan tala om integration, ja att vi i själva verket i det komplexa fallet har en hermitisk metrik $H(*,*)$ och via

$$\int_X H(Ds,t) = \int_X H(s, D^*t)$$

(där D är en operator $D : \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ och $s \in \Gamma(E), t \in \Gamma(F)$) definera till varje D en formell adjunkt D^* (ett standardbegrepp i abstrakt funktionalanalys med en grothendieckisk prägel[11]. Man kan även kontrollera att $\sigma_r(D^*) = \sigma_r(D)^*$ och att $H(e, \sigma_{2r}(D^*D)) = H(\sigma_r(D)e, \sigma_r(D)e)$. Ur detta följer att om D är elliptisk, så är också D^* elliptisk och man kan då definiera det analytiska indexet $\tau(D)$ av D som

$$\tau(D) = \dim \ker D - \dim \operatorname{coker} D = \dim \ker D - \dim \ker D^*$$

vilket ger ett heltal.

> Denna formel har mening eftersom ellipticitet medför att operatorn D har en svag invers D' i meningen att $DD' - I, D'D - I$ är båda kompakta. Denna definition går tillbaka till Fredholm. Vitsen med detta uttryck är att dimensionen av kärnan kan hoppa, men i så fall hoppar den likadant för kokärnan. Ett klassiskt exempel är cirkeln $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ och operatorn $D = d/dx - \lambda$ för någon komplex konstant. Om λ är en heltalsmultipel av $2\pi i$ är kärnan genererad av $e^{\lambda x}$ annars finns det inga lösningar ty de uppenbara kandidaterna är inte definierade på cirkeln.

Den naturliga frågan är således om man kan beräkna detta index på något annat sätt, kanske i termer av topologiska invarianter av X? Vi kan notera att $\ker D$ utgörs av lösningar av differential ekvationen $Df = 0$ så ett positivt index är ett tillräckligt villkor för existens av lösningar vilket i allmänhet är ett djupt problem. Men hur skall man finna dessa topologiska invarianter? Atiyah har noterat att koppling mellan algebraisk geometri och algebraisk topologi är ganska direkt och naturlig medan det föreligger ett mycket större avstånd mellan analys och topologi[12]. Ja var skall vi hitta dessa invarianter? Kanske föga förvånande i vår diskussion om Riemann-Roch (man letar ju där ljuset är som bäst, inte där det kan råka befinna sig, ibland har man dock tur). Man definierar helt enkelt

$$\gamma(D) = \kappa^{2m}[ch(D)td(\eta)]$$

som ser halvvägs bekant ut, men vad betyder det? κ^{2m} skall ses som en fundamentalklass över vilken man integrerar en topp-form (av grad $2m$) så vi kunde lika gärna ha skrivit

$$\gamma(D) = \int ch(D)td(\eta)$$

[11] Grothendieck började sin bana som funktionalanalytiker, men till funktionalanalytikernas stora lättnad övergick han snart till Algebraisk Geometri. Adjunkter förekommer även mellan funktorer.

[12] observera dock att det ursprungliga terminologin för topologi var *analysis situs* och dess grundare var Poincaré, knappast att betraktas som algebraiker.

Men vad är chern-klassen för en differentialoperator, och vad är η för vilken man tydligen kan ta Toddklassen av?

Det enklaste att förklara är η det är helt enkelt det komplexfierade tangentknippet av X och ofta helt enkelt betecknat med $td(X)$.

> Givet kotangentknippet T^* till en m-dimensionell riemansk mångfald X kan vi betrakta det totala rummet som blir av dimension $2m$ och får en nästan-komplex struktur, som motsvarar det komplexifierade tangentknippet till X

Att definiera chernklassen av D är betydligt mera omständligt. D är associerad till två vektorknippen E, F enligt ovan, så de utgör en ingredient. Vidare givet en mångfald X kan vi associera ett enhetsdiskknippe $B(X)$ och ett sfärknippe $S(X)$ förutsatt att vi har en Riemann metrik så att det är meningsfullt att tala om normen, speciellt normen 1, av en tangentvektor. Vi har naturliga projektioner $p : B(X) \to X$ och dess restriktioner till sfärknippena. Vektorknippena E, F kan lyftas till disk- och sfärknippena, och med hjälp av symbolen kan vi definera ett differensknippe, som i likhet med andra knippen har en chernklass som naturligt lever i $H^n(B(X), S(X))$ och kan via Thom-isomorfismen placeras i H^{n-m}. Detta får en naturlig formuleringen i Atiyahs K-teori.

Atiyah-Singer innebär helt enkelt att de två indexen sammanfaller.

Miraklet är att det krångligare indexet är relativt lätt att beräkna, med starka konsekvenser som vi noterat, medan det analytiska indexet uppenbarligen är ett heltal, vilket inte alls är uppenbart för det topologiska. Det är denna asymmetri som gör Atiyah-Singer så applicerbart och fruktbart. Vad är vitsen med att bevisa att två oberäkningsbara storheter är lika?

Man kan se index-teoremet som kronan på verket av 'a circle of ideas' och ett flertal av dess resultat som en specifiering av det universiella teoremet. Om t.ex. X är en kompakt orienterad mångfald (säg en komplex sådan) och låt E vara summan av jämna yttre produkter av kotangent knippet och F summan av de udda. Betrakta differentialoperatorn d och dess adjunkt d^* och betrakta $D = d + d^*$ som en differentialoperator från E till F. Då är det analytiska indexet lika med eulerkaraktäristiken för Hodge-kohomologin (en alternerande summa) och dess analytiska index den så kallade eulerklassen för E. Atiyah-Singer ger då Cherns generalisering av klassiska Gauss-Bonnet till högre dimensioner.

> Den 4-dimensionella Gauss-Bonnet ges av
>
> $$e(X) = \frac{1}{32\pi^2}\int_X (|Rie|^2 - 4|Ric|^2 + R^2)d\mu$$
>
> Där Rie är den kompletta Riemannkrökningstensorn, Ric Ricci-krökningstensorn, och R slutligen den vanliga skalärkrökningen.
>
> Den gaussiska krökningen är mycket lätt att åskådliggöra, men det är betydligt krångligare att få ett påtagligt och intutivt begrepp om krökning i högre dimensioner. Betänk bara hur svårt det är att finna en meningsfull analogi till vinkelsumman i en triangel för tetrahedrar, Riemann-tensorn är den kanoniska formen att beskriva krökningen, d.v.s. avvikelsen från det platta euklidiska för en allmän Riemann mångfald. Den spelar en fundamental roll i den allmänna relativitetsteorin. För varje par (u, v) av tangentvektorer anordnar den en linjär avbildning $R(u, v)$ på tangentrummet och definieras i termer av Levi-Civita konnektionen (förbindelse?[13]) som har att göra med derivaton av vektorfält med avseende på vektorfält, eller mera påtagligt hur man parallelförflyttar en vektor längs en kurva. Rent formellt skriver vi $R(u, v) = \nabla_u\nabla_v - \nabla_v\nabla_u - \nabla_{[u,v]}$ för vektorfält u, v som utvidgar u, v.
>
> Ricci-krökningen kan uttryckas i termer av Riemann-tensorn R genom att betrakta för varje u, v i tangentrummet ta spåret av avbildningen $w \mapsto R(w, u)v$. Man kan visa att Ricci-tensorn är symmetrisk och kan således härledas ur den kvadratiska funktionen $R(u, u)$, speciellt från den som funktion på enhetssfären, refererad till som Riccikrökningen. Man kan även se den som ett medelvärde för krökningen

[13] Jag känner inte till den svenska terminologin, kanske ingen finns, på tyskan talar man om 'Zusammenhang', på holländska 'verbinding' och även ryssarna använder en term som betyder 'förbindelse'

i ett plan (om planet definieras av en orthonormal bas u, v är dess krökning given av $< R(u,v)v, u >$ som ger den Gaussiska krökningen i det 2-dimensionella fallet). Ricci-krökningen spelar också en viktig roll i den allmänna relativitetsteorin och Ricciflödsekvationen spelade en stor roll för Perelmans lösning av Poincarés förmodan.

Den skalära krökningen ger ett sammanfattade tal för varje punkt och kan uttryckas med hjälp av Ricci-krökningen. Den är en direkt generalisering av Gausskrökningen. Om vi tar kvoten mellan volymen av en boll av radius ϵ i rummet och mostvarande volym i det euklidiska rummet erhåller vi $1 - \frac{S}{6(n+2)}\epsilon^2 + O(\epsilon^4)$ där S är skalärkrökningen och n dimensionen av rummet. För $n = 2$ är denna den dubbla Gausskrökningen.

Andra tillämpningar av indexteoremet är Hirzebruch-Riemann-Roch teoremet och även Hirzebrchs signaturteorem, ett specialfall av vilket togs upp ovan. Men kanske än viktigare än teoremet som sådant är de olika metoder som utvecklats för att bevisa och förklara det, och som tidigare påpekats, Atiyah spenderade många år med att finna nya alternativa bevis.

Fysik. Atiyahs första kontakt med fysiken lär ha varit ganska negativ beroende på den betoning på det praktiska i form av fysikaliska försök som utmärker den elementära fysikundervisningen[14]. Atiyah var därvidlag klumpig. Man skall dock inte dra den förhastade slutsatsen att teoretisk begåvade personer är ohändiga, även om de senare gärna vill skylla på det förra, som mot-exempel kan nämnas Newton. Att få mekaniska saker att fungera har mycket gemensamt med programmering och strikta logiska resonemang, låt vara i ett annat medium. Det var först när han konfronterades med fysiken på högre nivå som det klickade, och steget från matematik till fysik visade sig vara ganska naturlig. På frågan huruvida han ångrade att han inte kommit i kontakt med fysiken på ett tidigare stadium och därmed fått en solidare bakgrund, svarade han, inte alls, ty under dessa år hade fysikerna följt allehanda blindspår och kört fast i åtskilliga återvändsgränder och han var tacksam över att han först kom in på scenen när denna förvirring var till största delen utredd. Hans matematiska karriär visar sig i retrospekt vara ganska spikrak [15] med, som jag hoppats lyckats indikera, ett tydligt tema. Atiyah-Singer visade sig ha tillämpningar inom teoretisk fysik vilket Atiyah anammade med sedvanlig entusiasm. Det ligger nära till hands att misstänka att det var Atiyah som såg till att Witten fick en Fieldsmedalj 1990 i Kyoto och att strängteoretikerna uppmärksammades av matematikerna. Detta vore inte så långsökt med tanke på att han under ett besök vid MIT träffade på Witten när denne fortfarande var en helt ung man och imponerades storligen av denne och det hela sade uppenbarligen 'klick'[16]. Man kan med ett visst fog hävda att strängteoretikerna med Witten i spetsen är Atiyahs verkliga arvtagare. Man kan däremot inte hävda att han gjort några verkliga bidrag till fysiken per se, men det har heller inte strängteoretikerna gjort, däremot har de haft en mycket fruktbar inverkan på den rena matematiken. Vad Atiyah har bidragit med är att i tillägg till den geometriska intuitionen införa en slags 'fysikalisk' (eller snarare en förädlad geometrisk). Ett exempel på detta är hans student Donaldsons doktorsavhandling där han visade att $\mathbb{R}^4$ har oändligt många differentierbara strukturer. Atiyah har låtit berätta med stor tillfredställelse hur Witten länge kämpade med Donaldsonteorin innan han förstod den, och drar slutsatsen att detta är en teori som fysikerna knappast skulle ha kommit på själva. När det gäller Atiyah och fysik skall man inte glömma att Penrose var en doktorandbroder under Hodge, och Atiyah förklarade gärna hur han hjälpt Penrose på traven genom att introducera honom till kärvteorin. Penrose bör ha varit en fysiker naturlig för Atiyah att konversera eftersom de delade samma matematiska bakgrund.

---

[14] Man kan jämföra med H.G.Wells attityd som jag diskuterade i ett tidigare nummer av Bulletinen.

[15] Mandelbrot yvdes över att hans egen akademiska karriär var så långt ifrån spikrak som möjligt, måhända en fraktal kurva?

[16] Upmanship inom matematiken är legion. Det berättas hur Bott, en man som verkligen inte led av bristande självförtroende, stapplade bort från en diskussion mellan Atiyah och Witten, synbarligen skakad muttrande 'those guys..'

Obiter Dicta

Studenter Hur kan man attrahera studenter? Spännande områden där många olika begrepp kommer samman är något riskabla för studenter, ty det är en fara att de sprider sig själva för tunt och aldrig riktigt lyfter. Den andra ytterligheten är att de specialiserar sig i ett litet tekniskt hörn av matematiken. Men då och då dyker det upp en Donaldson. Ett råd vill han ge alla studenter och det är att inte följa en matematisk bana såvida de inte är passionerat intresserade av matematiken, det finns så många enklare sätt att tjäna sitt levebröd på. Uppenbarligen kan man inte bestämma sig för att bli passionerad, noterar jag, det måste komma innifrån, men det kan vara värdefullt för en student att rannsaka sig själv.

Matematiska hjältar Newton naturligtvis, det är omöjligt att bortse från honom, det kan man ej heller göra med Gauss, men han var inte någon som väcker ens mänskliga sympatier, alltför hård och omänsklig. Av alla forna matematiker var Hermann Weyl nog den som han mest kunde identifiera sig med. 'Heilige Hermann' kallad, kanske lite pompös men mycket sympatisk om människa. Tyvärr träffade han aldrig Weyl, det närmaste han kom var att lyssna på honom under ICM 1954 i Amsterdam och denne dog påföljande år.

Matematiska traditioner

Traditioner är seglivade. Talteori och klassisk algebraisk geometri är fortfarande livskraftiga i Cambridge, och samma fenomen kan observeras vid andra europeiska universitet. Om en institution är svag inom ett område fungerar det inte med att inbjuda någon världsledande och ge denne en massa pengar.

Matematikens framtid

Matematiken börjar med diskreta objekt. som kan urskiljas ifrån varandra och räknas, vilket leder till algebra och kombinatorik. Sedan kom infitesmalkalkylen, det kontinuerliga som innebar ett tämjande av oändligheten och geometrin men fortfarande ändligtdimensionella rum. Nu står vi på tröskeln till den dubbla oändligheten, oändligt dimensionella rum, men det är inte klart hur vi skall fortsätta. Han hänvisar vagt till 'kvantum-matematik'.

Antalet universitet och följaktligen akademiskt verksamma matematiker har ökat exponentiellt sedan han började sin egen bana, men han undrar om detta gäller de ledande 'top-people', eliten är fortfarande tunn.

Matematikens styrka ligger i dess förmåga att förnya sig själv. Det är ingen fara att den kommit till vägs ände, även om det ibland kan tyckas så. Gammal matematik som det tog århundranden att utveckla kan förenklas och strömlinjeformas och avskalas sina oväsentligheter tills det kan ges som en doktorandkurs.

Att föreställa sig matematiken om hundra år är så gott som omöjligt för att inte tala om tusen. 'Mind-boggling'.

Matematikens filosofi

Platon hade rätt, matematiken existerar, men vi hittar på terminologin och begreppen och ordningen i vilka de presenteras. Det matematiska landkapet ligger framför oss men det är vi som bygger vägarna. Att matematiken är så effektiv i beskrivningen av verkligheten beror på att den är så intimt förknippad med den. Detta att vi kan urskilja diskreta objekt grunden för talteorin som troligen aldrig hade uppkommit om vi hade varit oformliga massor som flöt in i varandra. Den mänskliga hjärnan har evolverat i termer av att beskriva verkligheten. Skönheten i matematiken står att finna i koncentrationen av sanning i en liten kompakt formulering. En hög täthet så att säga. Det är notoriskt svårt att definiera skönhet i matematik, men lätt att känna igen när man möter den. Skönheten är viktig i matematiken ty man måste göra val, och det finns så många val att göra. Man kan ha ett klumpigt och fult bevis för ett vackert resultat, men knappast tvärtom. Matematiker är i själva verket sysselsatta med att uppfinna intellektuella maskiner (med topologin som ryggrad), och sådana maskiner kan användas inom vida områden.

Matematiken och samhället

Det är svårt att nå ut med matematiken till en större skara, speciellt den rena. Vad vi behöver är förmedlare som fysiker och ekonomer, som har betydligt lättare att nå ut och som kan inskärpa matematikens centrala betydelse i sina egna verksamheter. En annan koppling är mellan matematiken och juridiken. Denna är uppenbarligen inte byggd på matematiska tillämpningar, men det finns en likhet åtminstone i det formella tänkandet med sin betoning på precision och logiska argumentation enligt Atiyah, som förresten hade en yngre bror (Patrick) som var en framgångsrik akademisk jurist. Jag skulle dock vilja framhålla att juristerna är mera cyniska ty för dessa är rättvisan inte en platonsk form utan endast vad som kan argumenteras fram, medan matematikerna ytterst söker Sanningen även den obevisbara, något som knappast engagerar juristerna.

Avslut

I motsats till även många svenska matematiker har jag aldrig konverserat Atiyah, än mindre haft någon som helst personlig relation till honom. Jag minns inte ens när jag träffade på honom första gången i verkliga livet, troligen någon gång på 70-talet när han besökte Harvard för att ge någon föreläsning[17]. Däremot har jag ofta hört honom föreläsa, det var kutym att han alltid inledde den årliga Arbeitstagung i Bonn som jag brukade regelbundet bevista i början av 80-talet. Och så sent som förra sommaren hörde jag honom i Rio om vilket jag redan rapporterat i förra Bulletinen. Hans föredrag var alltid mycket underhållande, han tyckte om att vifta med händerna och anlägga det stora perspektivet, med breda och snabba penseldrag. Man kunde inte förvänta sig att lära sig något konkret, men ett enstaka föredrag är aldrig avsett att vara en kurs, utan har som uppgift att roa och om möjligt inspirera. Detta förstod han. Han har berättat att matematiska och litterära aktiviteter befinner sig på motsatta poler. Inom matematiken vill man vara så precis och kortfattad som möjligt, och att fylla ut anses vara ett oskick. I litteraturen däremot går det hela ut på att brodera och lägga till. Som föreläsare upplever han att han ofta har svårt att fylla ut tiden, han tycker sig ha sagt det väsentliga och finner därmed ingen anledning att fylla ut.

Atiyah hade kopplingar till Sverige, främst då till Lund med Gårding och Hörmander. Han skrev en artikel tillsammans med Gårding (och Bott) 1973, om lakuner för hyperboliska differentialoperatorer[18], och besökte institutionen ett antal gånger. Han blev invald som utländsk medlem av KVA 1972 liksom han blev invald i ett stort antal andra vetenskpaliga sällskap, alltför talrika för att listas, liksom mottagare av otaliga pris och utmärkelser, och hedersdoktor vid ett trettiotal olika lärosäten. I tillägg till Fieldsmedaljen fick han även Abelpriset 2004 tillsammans med Singer, just för Atiyah-Singer.

Med Atiyah går en av den moderna matematikens namnkunnigaste matematiker ur tiden, ja man kan likna honom vid en matematikens rockstjärna. Såsom mytologisk person kan han visserligen

[17] Det närmaste jag kommit honom var i början på 80-talet när jag deltog i en lunch som Roos hade arrangerat. Jag har inget minne av att jag växlade några ord, men en brevavskrift från 23/1 1981 avslöjar att jag satt bredvid honom, presenterades av Roos, varvid han nickade otåligt och bekräftade att han hört talas om mig, sedan följde en kort konversation om chern-invarianter för ytor, han avslöjade bland annat att Hawking hade ur en outgrundlig fysikalisk intuition förmodat olikheten $c_1^2 \leq 3c_2$ och hade några uppslag om de mest sannolika cherninvarianterna för ytor. När jag påpekade att detta var lite väl vagt, tappade han snabbt intresset (kanske led jag som ung man av för mycket tunghäfta och framstod som lite väl timid och obenägen till 'flights of fancy') och istället vände han sig till fysikern Bengt Nagel och undrade: antag att det finns en 'wonderful theory' 100 % bekräftad, som förutsäger partiklar vid nivåer ovanför universums totala energi 'Then What?'. Nagel tystlåten och besvärad mumlade något om att universum är oändlig, men Big Bang då? undrade Atiyah obenägen att släppa bettet. Nagel räddades av gong-gongen när Roos avbröt och undrade vilka som ville ha kaffe. Jag minns att även Björn Dahlberg var där, men han sade inte ett knyst under hela lunchen. Atiyah hade just hållit två föreläsningar i Stockholm och skulle en timme senare flyga ner till Lund för ytterligare en föreläsning för Svenska matematikersamfundets konferens för att hedra Hörmander på hans 50-årsdag dagen därpå.

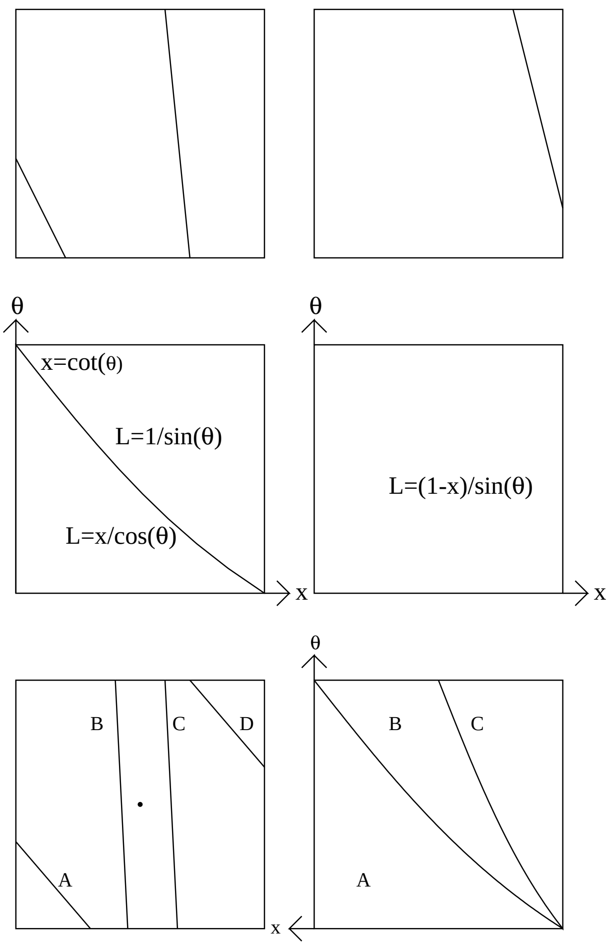
[18] Enligt Atiyah var den 'sub-contraced', och vad som menas med detta kan man spekulera om. Möjligen att Gårding höll i det hela och delegerade vissa delar till Bott och Atiyah att levereras inom en viss tid.

inte jämföras med Grothendieck, ty i motsats till denne var han ständigt närvarande, och han njöt uppenbarligen av sin närvaro, och som jag antytt ovan, denna njutning tenderade att vara ömsesidig.

Man kan givetvis finna mycket om Atiyah på nätet. Jag skulle vilja rekommendera `Klick` *där man kan se närmare hundra korta intervjusnittar med Atiyah. En annan källa är Springerboken 'The Abel Prize 2003-2007' i vilken man bland annat finner en initierad presentation av 'Atiyah-Singer' av Nigel Hitchin, min egen källa har varit ett appendix i en reviderad engelsk upplaga av Hirzebruchs 'Topological Methods in Algebraic Geometry' av Schwartzenberger.*

◇ ◇ ◇ ◇

Titelsidans illustration, fortsättning från sid 17



Till vänster ser vi hur längderna L beräknas aktuella i vår sektor. Vi kan även beräkna areorna som skärs av kordorna och se om dess tar ut varandra. Kordor av typ C, D tillhör inre kvadrater, och areorna i övre högre delen av kvadraten sticker ut, medan kordor av typ A,B tillhör yttre kvadrater och areorna i nedre vänstra hörnet sticker in. Formlerna för areorna ges av $(1-x)^2 \tan\theta$ (A,D), $x + \frac{1}{2}\cot\theta$ (B,C). De två kurvorna ges från vänster till höger av $\tan\theta = \frac{1}{1-x}, \tan\theta = \frac{1}{1-2x}$. Integrationen över rektangeln med A, B, C är en aning involverad men inte värre än att utgöra en lämplig övning för studenter. Alla integraler har explicita primitiver och de numeriska resultaten utgörs av rationella kombinationer av $1, \pi, \log(2)$ (naturlig logaritm). Fallet D är enklast och ger direkt $\frac{\log 2}{12}$. För slutresultatet skall integralerna över A, B viktas med $1+\sqrt{2}$ över C med $-(1+\sqrt{2})$ och över D med -1. Om under antagandet av likformig fördelning, denna summa visade sig vara skild från noll, skulle man erhålla en nedre asymptotisk begränsning av fel-termen av typ $CX^{\frac{1}{2}}$ (med $X = N^2$). Om det skulle vara noll, skulle man erhålla ett liknande problem med att uppskatta med fel-termer en integral genom att evaluera den i likformigt spridda punkter. Själva cirkelproblemet är av denna typ. Man integrerar 1 över en cirkel genom att evaluera i likformigt spridda punkter, nämligen gitterpunkter, som är betydligt enklare än att uppskatta integralen av krångligare funktioner över mer komplicerade figurer över mer vagt definerade punkter. Troligen utgör denna angreppsvinkel ett blindspår.

Peter Swinnerton-Dyer *2/8* 1927 – *27/12* 2018

Ulf Persson

Jag misstänker att de flesta svenska matematiker inte har hört talas om Swinnerton-Dyer[1] och de få som händelsevis gjort det kanske bara i form av ett av namnen i Birch and Swinnerton-Dyers förmodan, som utgör ett av millennieproblemen. Första gången jag träffade på namnet hade jag ingen aning om denna förmodan, utan denne engelsman var gästforskare på Harvard under min första termin där hösten 1971. Hans affiliering var University of Cambridge, och ung som jag var, associerade jag bissart nog inte till Cambridge University utan till ett möjligt litet universitet i Cambridge Mass, som visade sig inte ha någon existens utanför min egen fantasi. Jag åhörde en föreläsning av honom och allt jag minns var frasen 'hand waving' som jag då hörde för första gången och som han skuldmedvetet upprepade gång på gång. En gång flög han tillbaka till Cambridge över ett veckoslut och Garrett Birkhoff (son till den legendariske George Birkhoff) var smått chockerad och frågade hoom om han tillhörde 'the jet set'. Jag ansåg att Swinnerton-Dyer var en gammal man med en tandrad som förde tankarna till Dracula, men han var bara strax över fyrtio vid den tiden men utseendet tycktes förbli närmast oförändrat över de följande decennierna.

Swinnerton-Dyer var adelsman. Riktig adelsman, inte som Atiyah och Bourgain, som förlänats hederstiteln i kraft av sina prestationer. SD behövde inte bekymra sig om prestationer, han var av adel utav lång ohejdad vana och tradition som gick sekler tillbaka[2]. I ett fortfarande klassmedvetet England utgör detta inte bara en kuriositet. Han föddes 1927 i Ponteland Northumberland men flyttade tidigt i barndomen till Shopshire. Fadern, en baron, var ingenjör och framgångsrik affärsman och direktör för många olika bolag, dessutom välkänd bland brittiska schackspelare. Sonen visade tidigt fallenhet för matematik, vilket hans mor uppmuntrade liksom hans lärare. Han fick ett stipendium till Eton och började vid Trinity College i Cambridge efter krigsslutet och han blev därmed den förste i släkten att ligga vid ett universitet och följa en akademisk bana. Som doktorand studerade han under Littlewood[3] men brydde sig aldrig om att fullfölja sin Ph.D. Varför skulle han göra det? Han fick ju ett jobb ändå. Hans första matematiska artikel hade han skrivit redan 1943 när han fortfarande var en skolpojke vid Eton. 1950 blev han utnämnd till Fellow vid Trinity och kom att vara detta college troget fram till 1973 när han valdes till master för St Catherines College vid den relativt unga åldern av 46 för en sådan position [4]. Där skulle han stanna i ett decennium. Därefter avancerade han till Vice-Chancellor of Cambridge University. Fastän han var medlem av the Social Democratic Party respekterade han Thatcher och hon honom och därefter tillsattes han att vara ordförande för the University Grants Committee, där han sannerligen inte gjorde sig populär bland sina akademiska kolleger, ty han förordade nedskärningar (helt i Thatchers anda) och införde så kallade research assessments, som inte heller var speciellt populära men som många anses ha utgjort en nödvändig reform för att hålla uppe kvaliten på brittiska universitet[5]. Oxbridge

[1] 'Spinnerton-Dryer' som han ibland refererades till av sina studenter

[2] Närmare bestämt till 1678 när barontitel förlänade en advokatanfader vid namn Dyer. Namnet 'Swinnerton' lade han till efter att ha äktat en lokal arvtagerska

[3] innan dess hade han studerat under Besicovitch. Littlewood brukade ge sina elever en lista av 20-30 problem och bad dem komma tillbaka när de löst ett av dem. För att problem skulle platsa på denna lista krävde Littlewood att de inte bara skulle vara olösta problem utan att någon framstående matematiker skulle ha gjort ett seriöst försök. SD lyckades lösa ett problem och fick sedan ett prestigefullt stipendium. Det fanns även en annan lista av problem, kanske mer realistiska, men denna lista såg han aldrig. Han ansåg Litlewood vara en av 20-århundradets största matematiker, verksam upp i åttio-årsåldern tills han inte längre kunde läsa sin egen handstil. Men mycket gammalmodig, då var Weil, som han träffade i Chicago, en mycket välkommen kontrast.

[4] Valet av honom var något överraskande, men det faktum att han var ungkarl var i hans favör, ty bråken brukade utspela sig mellan 'busaren' och masterns fru. Och mycket riktigt det var först mot slutet av sitt 'mästerskap' vid St-Catherine som han gifte sig 56 år gammal, med arkeologen Harriet Crawford, som brukade gräva i Mesopotamien.

[5] Han dröm om att bli vald till master för Trinity uppfyllde aldrig. 1985 hade Oxford refuserat att ge Thatcher ett hedersdoktorat, och Cambridge var således inte på humör att förära någon som upplevdes som hennes springpojke.

var i mångt och mycket en akademisk idyll, speciellt gällde detta inom humaniora, och dess lärare behövde inte bekymra sig om varken 'publish' eller 'perish'. Flera av dess filosofer publicerade ingenting, till nöds gav de en och annan föreläsningsserie som i vissa fall nedteckandes av deras elever och gavs ut. R.G. Collingwood, en av mina favoritfilosofer och historiker, klagade på sina kollegers publiceringslättja, tydligen ansågs det tillräckligt att hålla hög nivå på konversationen vid 'high table'. En modernare historiker Trevor-Roper klagade över inskränktheten bland sina humanistiska kolleger och sökte istället sina samtalspartner bland naturvetarna. Och när Atiyah flyttade från Cambridge till Oxford noterade han en helt annan atmosfär än vad han var van vid från Cambridge, det kryllade av filosofer. Vill man ta del av en skildring av akademiskt liv i Oxbridge kan man med fördel fördjupa sig i C.P. Snows romancykel, där han beskriver charmerande och briljanta men intellektuellt mediokra kolleger. Till dessa vittnen kan man således lägga Swinnerton-Dyer. Han bekrev många av sina åldrande kolleger 'who draw a full day's pay for half a day's work' och alltför många förblev på sina poster enbart för att de var 'loved and admired'. Han värnade om att forskningmeriter skulle tillmätas en avgörande roll. Med sin bakgrund, framtoning och engagemang i universitetspolitiken leder han osökt tankarna till en karaktär i en roman av Evelyn Waugh eller av P.G.Woodhouse, men framför allt skulle han platsa i den ovan nämnda C.P.Snows romancykel 'Strangers and Brothers'[6].

Som ung var han liksom sin far en skicklig schackspelare och spelade bridge på internationell nivå. Ja han deltog faktiskt i det brittiska laget som kom tvåa i de europeiska mästerskapen i Helsingfors 1953 (och nådde även framgång i en liknande tävling 1962) [7]. Han var även en pionjär inom datorer och designade ett operativsystem för datorn Titan vid Cambridge, och i samband med detta gjorde han i mitten av 60-talet de första seriösa datorexperimenten i ren matematik tillsammans med Birch, vilka skulle resultera i den eponyma förmodan. Som redan nämnt skaffade han sig aldrig en Ph.D. och kom under press av Trinity att skaffa sig ett jobb. Efter en tid vid Chicago under Weil hade han återvänt och sökt sig ett jobb som 'reader' men förlorade först mot Atiyah och sedan mot Zeeman[8]. Istället lyckades han få anställning vid universitetets datamaskinsavdelning, vilket vi således har att tacka för den epinomiska förmodan. Hans huvudsakliga matematiska gärning rörde diofantisk geometri, där han på ett mycket originellt, för att inte säga idiosynkratisk sätt kombinerade tekniker från vitt skilda ämnen för att erhålla oväntade insikter. Han var aldrig rädd för att smutsa ner sina händer, och om det krävdes ryggade han inte för krångliga och klumpiga metoder bara han fick ett resultat. Vackra teorier var inte ett självändamål utan han hade en mycket praktiskt orienterad attityd till matematiken. Denna seghet och envishet utmärkte hans arbeten under hela livet, även

[6] Waugh (1903-66) är känd för sin absurda sarkastiska humor och framför allt för *Brideshead Revisited* som utgjorde inspirationen för en framgångsrik TV-serie i början av 80-talet betydligt mer skruvad än 'Downton Abbey'. Woodhouse (1879-1974) är känd för sin serie av mycket populära böcker om Bertie och hans betjänt, ansedd som urtypen av engelsk överklasshumor. Jag läste väl någon bok av honom under mina tonår men fann mig i stort sett vara immun mot dess charm, men kanske mina intryck skulle vara mer uppskattande ett halvsekel senare. C.P.Snow (1905-80) nådde ryktbarhet med sin artikel om de två kulturerna från slutet av 50-talet, vilken fortfarande refereras till. Han gjorde en akademisk karriär som kemist, involverades i 'British Civil Service' och sadlade om och blev författare och producerade under en lång följd av år en romancykel där böckerna inte utkom i dess inbördes kronologiska följd. De är brittiskt torra och presenterar det akademiska såväl som det juridiska livet mycket detaljerat. Snow var för övrigt gift med romanförfattarinnan Pamela Hanson.

[7] I en turnering stoppade han opponentens grand slam genom att bjuda åtta klöver. Reglerna vid denna tid invaliderad omöjliga bjudningar gjorde av misstag, så han informerade turneringens domare att den var allvarligt menad. Bridgereglerna ändrades efter detta. Jag känner inte till bridge så jag har ingen aning om vad detta innebär, men tydligen var straffet för ett omöjligt bud lägre än att låta opponenten göra ett. Det illustrerar i vilket fall som helst hans idiosynkratiska attityd. Nämnas kan att han som talteoretiskt intresserad drogs mot Mordell, men tanken att behöva spela med och mot en sådan svag, om än entusiastisk, bridgespelare avskräckte honom totalt. Han gav upp bridge när han blev involverad i universitetspolitik, de hade bägge mycket gemensamt anmärkte han, men han fann att det senare var mycket mera spännande. Att han hade varit administratör förnekade han, som sådan skulle han ha varit ytterst medelmåttig, utan han såg sig själv som en 'policy maker'

[8] Att Atiyah gick före honom accepterade han, men satte ett frågetecken för Zeeman

när han var upp över öronen i administrativa plikter släppte han aldrig matematiken ur sikte och tempot slappade inte av utan han publicerade papper nästan fram till sin död. Om den berömda förmodan sägs det att han hoppade att den inte skulle lösas under han livstid, ty då skulle han nödgas sätta sig in i beviset, och för detta var han för gammal[9]. Han blev bönhörd.

Han föredrog att umgås med studenter framför sina kolleger. Han var generös, och introducerade dem till opera genom att köra ner dem till London, där han skulle bjuda både på föreställningar och efterföljande middagar. Visst var han välsituerad, anmärker en av hans studenter, men inte desto mindre var det mycket generöst. De lärde sig också uppskatta cider i tillägg till öl för att inte tala om att odla sin smak för sherry. I sin ungdom spelade han både squash och tennis med bravur, och en av våra svenska kolleger kan vittna om en vådlig bilfärd som passagerare när den åldrige Swinnerton-Dyer farmförde sin sportbil i hög fart på smala slingrga vägar. Jag hörde en gång en historia om hur han lät checka in sin bil på flyget till Belgien, kanske det var billigare än att köpa en ny, men jag misstänker att det skall klassifieras som en vandringslegend, av vilka det säkert finns en uppsjö on honom.

Slutligen skall man väl påpeka att ha blev invald i Royal Society 1967, blev den 16 baronen efter sin fars frånfälle 1975 och blev adlad, d.v.s. Sir Peter 1987 och Knight of the British Empire. Det kunde knappast skada med en tårta på tårtan. Han förärades Sylverstermedaljen av Royal Society och i 2006 Polyapriset av London Mathematical Society. Han blev även hedersdoktor wid universiteten i Bath och Warwick. 1983 gifte han sig, som nämnts ovan, med arkeologen Harriet Crawford som överlevde honom. Äktenskapet var barnlöst och den 17 barontiteln övegår till en avlägsen släkting i Minneapolis.

Birch och Swinnerton-Dyers förmodan

Ulf Persson

Jag påminner om att det finns tre olika kompakta komplexa mångfalder av dimension ett, så kallade Riemannytor. Sfären $S^2 = \mathbb{C}P^1$ (enkelt sammanhängande), torusen T^2 (kvot av $\mathbb{C}$ via ett gitter Λ) och kvoter av det hyperboliska planet (givet av varje öppet enkelt sammanhängande äkta delmängd av det komplexa planet). Fallet med torusen korresponderar till en elliptisk kurva, som ges av en icke-singuljär kubik i $\mathbb{C}P^2$ och utgjorde ett av 1800-talets aktivaste forskningsfält. Dess elementa ingår i varje inledande kurs om analytiska funktioner som presenterar Weierstrass moderna framställning, via den dubbelperiodiska Weierstrassfunktion $\wp_\Lambda = \frac{1}{z^2} + \sum_{\lambda\in\Lambda}(\frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2})$ som satisfierar den kubiska differentialekvationen[10]

$$(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

I och med detta definierar man en elliptisk kurva som en kubik given av[11]

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

vilket har mening för en godtycklig koefficientkropp K. Av intresse är $K = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_p$ där $\mathbb{F}_p$ är en ändlig primkropp av kardinalitet p ett primtal. Notera att kubiken anses sluten i projektiva planet så man lägger till en punkt på oändligheteslinjen.

Det är vissa saker om elliptiska kurvor alla matematiker bör känna till.

---

[9] Han hävdar att med ålderns rätt försvagas inte sjäva förmågan att bedriva matematik, men vad som däremot sinar är energin.

[10] där g_2, g_3 är funktioner av gittret Λ explicit $g_2 = 60\sum^*_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{\lambda^4}$ och $g_3 = 240\sum^*_{\lambda\in\Lambda}\frac{1}{\lambda^6}$

[11] Detta kallas Weierstrassformen och är standard.

I: Varje elliptisk kurva E utgör en additiv grupp med en addition givet geometriskt och som lätt kan ges explicit av en algebraisk formel. Nollan utgöres av punkten vid oändligheten.

Om $K = \mathbb{C}$ är gruppen $\mathbb{C}/\Lambda$

Om $K = \mathbb{Q}$ består gruppen av en ändlig torsionsdel och en fri abelsk grupp av ändlig rang r. Detta är Mordells sats.

Om $K = \mathbb{F}_p$ är gruppen uppenbarligen ändlig och kan högst vara $2p + 1$, detta kan förbättras betydligt.

En punkt x på en elliptisk kurva säges vara en torsionpunkt av ordning m om $mx = 0$. Varje automorfism av kurvan avbildar m-torsionspunkter på sig själva. I det komplexa fallet utgör dessa en grupp $\Lambda/m\Lambda = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. De tre icke-triviala 2-torsionspunkterna korrespondera till nollställena för $x^3 + ax + b$.

Även om kubiken inte är icke-singuljär definerar de glatta punkterna fortfarande en grupp. I det fallet kubiken är nodal, kan desssa beskrivas som $\mathbb{C}/\mathbb{Z}$ (d.v.s. gittret Λ har gått mot oändligheten i en riktning) och vi har den multiplikativa gruppen $\mathbb{C}^*$, och i fallet med en spetskubik har gittret gått till oändligheten i bägge riktningarna och vi har det additiva fallet $\mathbb{C}$. Notera att den additiva gruppen har inga torsionspunkter (bortsett från nollan), medan i det multiplikativa fallet utgörs torsionspunkterna av enhetsrötter. Den ändliga analogin har visat sig därmed ha stor betydelse för generaliseringar av koder, eftersom det innebär att gå från $\mathbb{F}_p^*$ med sin uppenbara koppling till Fermats lilla sats till mer komplicerade grupper.

II. Om N_p betecknar antalet punkter på den ändliga kurvan E_p utgör dessa i medeltal $1+p$ och vi har olikheten

$$|1 + p - N_p| < 2\sqrt{p}$$

känd som Hasses sats. Låt oss i fortsättningen sätta $a_p = 1 + p - N_p$.

Att medeltalet är $1 + p$ är lätt att inse. Till varje $f(x) = x^3 + ax + b$ associera dess dual $f^*(x) = x^3 + a\epsilon^2 + b\epsilon^3$ där ϵ är en kvadratisk icke-residy, samma sak gäller då för ϵ^3. Vi erhåller då att $f^*(\epsilon x) = \epsilon^3 f(x)$ således är de komplementära, om den ena antar en residy antar den andra en icke-residy och omvänt. Lägger vi ihop antalet punkter till respektive kurva får vi då $2(1 + p)$

Hälften av alla element är kvadratiska residyer. Om värdena av det kubiska polynomet är slumpvis spridda, förväntar vi oss att ungefär hälften är kvadratiska residyer. Om det är precis hälften får vi $1+p$ punkter. Satsen ger en skarp uppskattning av hur mycket värdena kan avvika från att vara hälften kvadratiska. Svansarna är avklippta. Om vi ersätter det kubiska polynomet med ett kvadratiskt får vi en rationell kurva och vi kan beräkna antalet punkter exakt. Detta har som konsekvens att om vi translaterar kvadraterna blir hälften kvadrater, hälften icke kvadrater. (Det exakta påståendet måste ta i beaktande huruvida p är kongruent ± 1 modulo 4). Detta är en mycket rigid situation: om vi skulle försöka konstruera en sådan mängd kombinatoriskt från scratch, skulle det vara mycket svårt.

För att få fram olikheten betraktar vi Frobenius automorfismen $F(x, y) = (x^p, y^p)$ på $\overline{\mathbb{F}_p} \times \overline{\mathbb{F}_p}$ där $\overline{\mathbb{F}_p}$ betecknar algebraiska höljet av $\mathbb{F}_p$ och noterar att N_p är antalet fixpunkter till F eller ekvivalent kardinaliteten av kärnan till $I - F$ som är lika med graden av $I - F$. Eftersom graden är en definit kvadratisk form följer uppskattningen ur Cauchy-Schwarz olikhet.

Ett alternativt sätt är att använda Lefschetz fixpunkt sats. Givet ett lämpligt topologiskt rum X och en kontinuerlig avbildning $f : X \to X$ inducerar denna linjära avbildning ${}_if_* : H_i(X) \to H_i(X)$ och vi betraktar den alternerande summan $\Lambda_f = \sum_i (-1)^i \mathrm{Tr}({}_if_*)$ som ger eulerkaraktäristiken för fix-lokuset för f. För en lämplig (ko)homologi-teori erhåller vi för Frobenius F uttrycket

$$1 - \mathrm{Tr}(F) + p$$

varvid vi ser att $a_p = \mathrm{Tr}(F)$. Om $\ell \neq p$ är ett primtal utgör ℓ^n-torsionspunkterna en grupp $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$. Man kan nu ta det inversa limis av dessa och erhålla en 2-dimensionell modul över de ℓ-adiska talen som vi kan tensorera med $\mathbb{Q}_\ell$. Varje automorfism A av kurvan ger då upphov till en linjär avbildning A_ℓ vilket i fallet $A = F$ ger upphov till en karaktäristisk ekvation

$$T^2 - a_p T + p$$

med komplexa konjugerade rötter $\alpha, \overline{\alpha}$ med $a_p = \alpha + \overline{\alpha}$ och $\alpha\overline{\alpha} = p$. Man ser omedelbart från detta att $a_{p^n} = \alpha^n + \overline{\alpha}^n$ så om N_p är känt, känner man även N_{p^n} för alla n.

Zeta funktionen för en varitet är ett sätt att genom en genererande serie kodifiera för varje primtal p antal punkter N_{p^n} över kroppen $\mathbb{F}_{p^n}$ för varje n. André Weil lät definiera zeta-funktionen

$$Z(p,t) = \exp \sum_n \frac{N_{p^n}}{n} t^n$$

och lät formulera ett antal förmodanden om den, de så kallade Weil-fömodandena som löstes av Deligne 1973 och som diskuterades i Bulletinen 2013. Det är kanske inte helt uppenbart varför man väljer en sådan form istället för säg $\sum_n N_{p^n} t^n$ men det visar sig vara naturlig att arbeta med. I fallet med elliptiska kurvor över en ändlig kropp kan vi skriva ner N_{p^n} explicit och hoppas kunna skriva funktionen i sluten form. Detta är nästan lättare gjort än sagt och vi erhåller omedelbart

$$e^{\log(1-t)+\log(1-pt)-\log(\alpha t)-\log(\bar{\alpha} t)} = \frac{(1-t)(1-qt)}{1-a_p t + pt^2}$$

vilket kanske förklarar den valda formen för Zeta-funktionen, speciellt när N_{p^n} kan skrives som en summa av potenser, vilket var fallet när Weil studerade speciella exempel. Hans allmänna förmodan var att Zeta funktionen skulle vara en rationell funktion, i vilken täljare och nämnare var polynom av en viss form, i analogi med fallet ovan.

Men vissst den envisa läsaren kan notera att $\sum_n N_{p^n} t^n$ lätt summeras till $\frac{1}{(1-\alpha t)} + \frac{1}{(1-\bar{\alpha} t)} = \frac{2-a_p t}{1-a_p t+pt^2}$. Det krävs något djupare förståelse för att uppskatta Weils form av Zeta-funktionen.

När det gäller att beräkna N_p för en given måste man i allmänhet göra datorberäkningar, men det kan vara en lämplig övning för den intresserade läsaren att visa att om $p \neq 1(3)$ gäller för varje elliptisk kurva av typ $y^2 = x^3 + b$ att $a_p = 0$ (ledning: $x \to x^3$ är en bijektion). Om $p = 1(3)$ kommer antalet punkter att variera oförutsägbart.

III. Givet en elliptisk kurva över $\mathbb{Q}$ är det frestande att då för varje primtal p reducera den modulo p.[12] På detta sätt kan vi för $Y^2 = X^3 + AX + B$ betrakta $y^2 = x^3 + A_p x + B_p$ som en elliptisk kurva över $\mathbb{F}_p$, om det finns en lösning (X, Y) över $\mathbb{Q}$ erhåller vi då genom reduktion en lösning (x, y) över den ändliga elliptiska kurvan. Men omvändningen gäller förstås inte.

Om x är ett nollställe till kubiken $x^3 + ax + b$ kommer $(x, 0)$ att utgöra en primitv (d.v.s. icke-trivia) 2-torsionspunkt). Om någon reducering inte har någon sådan, kan inte den ursprungliga kurvan ha någon heller. Den elliptiska kurvan $Y^2 = X^3 + (2a+1)X + 2b + 1$ har inga primitva 2-torsionsunkter ty $y^2 = x^3 + x + 1$ över F_2 har inga.

Att finna rationella lösningar till elliptiska kurvor skrevs det en hel del doktorsavhandligar och liss-avhandlingar om i Uppsala, medan den norske matematikern Trygve Nagell var verksam där. Han bildade ingen skola, utan hans elever spreds ut som lektorer i gymnasierna runt om i landet [13]. En annan svensk matematiker Anders Wiman var mycket aktiv upp i hög ålder med att studera enskilda elliptiska kurvor och dess Mordellrang. Problemet att bestämma rangen hos en elliptisk kurva är mycket svårt och allmänna resultat fattas fortfarande. Det är inte ens känt om rangen av en elliptisk kurva kan vara godtycklig hög, men det förmodas att detta är fallet (världsrekordet är 28 av Noam Elkes). Man förmodar att rangen för de allra flesta kurvor är antingen noll eller ett. Det är detta Birch och Swinnerton-Dyers förmodan handlar om. Men först måste vi skriva ner L-funktionen till en elliptisk kurva.

[12] Eftersom vi är intresserade av den projektiva formen, som därmed inkluderar nollan i oändligheten, betraktar vi homogena koordinater, som kan väljas som heltal utan gemensam faktor. Dessa kan vi sedan ta modulo det givna talet p

[13] Lektorn vid min skola var ett exempel. Hans matematiska allmänbildning var knappast imponerande och jag hade aldrig något matematiskt utbyte av honom. Denna aktivitet sågs ner på av matematikerna i analys, och givetvis kunde inte Nagell mäta sig med Beurling, de metoder han behärskade var begränsade. En av hans studenter var Harald Begström, som senare sadlade om och blev statistikprofessor vid Chalmers. Nagell är mest känd för sin sats som även bevisades av Elisabeth Lutz, en student till Weil, som ger nödvändiga villkor för att en punkt skall vara en torsionspunkt på en elliptisk kurva över $\mathbb{Q}$. Denna sats ger en effektiv metod att finna torsionsgruppen av varje rationell elliptisk kurva.

Vi har ovan visat att till varje ändlig elliptisk kurva kan vi associera ett kvadratiskt polynom $L_p(T) = 1 - a_pT + pT^2$ i själva verket är detta Zeta-funktionen av kurvan upp till faktorn $(1 - T)(1 - pT)$. Om vi nu till en elliptisk kurva definerad över $\mathbb{Q}$ vill sammanfatta alla data från primtalsreduktioner kan det vara naturligt att betrakta produkten av dem alla, och visar det sig, dess inverterade värde (för att få nollställen istället för poler). Man brukar nämna denna produkt en Euler-produkt och den går tillbaka till Euler som observerade den formella identiteten.

$$\prod_p \frac{1}{(1-\frac{1}{p})} = \prod_p (1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots) = \sum_n \frac{1}{n}$$

som följer ur unik factorisering. Eftersom den harmoniska serien divergerar, finner vi att det måste finnas oändligt många primtal, och än starkare att summan av inverterade primtal divergerar, och man kan även ge en uppskattning om hur snabbt den går till oändligheten vilket ger en antydan om primtalsfördelningen.

Nästa steg togs av Riemann som definerade sin kända funktion $\sum_n \frac{1}{n^s}$ för en komplex variabel s och sedan följde Dirichlet som generaliserade Riemannfunktionen till att introducera karaktärer som koefficienter med en därtill hörande uppdelning i Eulerfaktorer. Med hjälp av dessa och komplex analys kunde han visa att varje aritmetisk serie innehåller oändligt många primtal (såvida inte av uppenbara skäl d.v.s. alla dess termer är delbara med ett primtal) och dessutom att dessa är jämnt fördelade. Dessa funktioner kallades L-funktioner och den naturliga L-funktionen för en elliptisk kurva E över $\mathbb{Q}$ sättes efter Hasse och Weil som

$$L(E, s) = \frac{1}{\prod_p L_p(p^{-s})}$$

Men en liten teknisk komplikation inträffar. Vissa av dessa reduktioner visar sig vara 'dåliga' (bad reduction) ty även om den ursprungliga kubiken är glatt, d.v.s. det kubiska polynomet har inga dubbelrötter, kan detta mycket väl inträffa när vi reducerar modulo p. Två fall uppkommer, det nodala med en dubbelrot (multiplikativ reduktion) och det spetsiga (additiv reduktion). Det första fallet delas upp i splittrad och icke-splittrad.

Betrakta $y^2 = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. Denna är en nodal singularitet, och antalet punkter är antingen $1 + p$ eller $-1 + p$ beroende på huruvida 3 är en kvadratisk residy modulo p. För $p = 5$ är det en icke-residy för $p = 11$ är det en residy.

I dessa nodala fallen sätter man faktorn $L_p(T) = 1 - a_pT$ med $a_p = \pm 1$ och i det additativa fallet $L_p = 1$.

Denna produkt konvergerar om $\mathrm{Re}(s) > \frac{3}{2}$ och definierar en analytisk funktion i detta område. Hasse förmodade att den hade en analytisk fortsättning till hela talplanet, d.v.s. att det utgjorde en hel funktion, detta visades för elliptiska kurvor med komplex multiplikation av Deuring 1941, men det var inte förrän de så kallade modularitetsteoremet slutligen bevisades vid millennieskiftet som man kände till det i allmänhet.

I allmänhet utgör de enda endomorfismerna på en elliptisk kurva över $\mathbb{C}$ av $X \mapsto nx$ men för vissa kurvor är gittret även invariant under multiplikation med icke-heltal. Det är lätt att inse att dessa tal är kvadratiska heltal till definita kvadratiska utvidgningar, och att gittret är isomorft med ett gitter $< 1, \tau >$ där τ är ett sådant tal. Existensen av sådana endomorfismer gör det möjligt att få en bättre hållhake på kurvorna.

Modularitetsteoremet, förr känt som Taniyama-Shimura-Weils förmodan, etablerar ett intimt samband mellan en elliptisk kurva över $\mathbb{Q}$ och modulära former. Ett sätt att formulera det är att en sådan kurva täcks av en modulär kurva $X_0(N)$, ett annat att om man skriver L-fuktionen som en Dirichlet serie. Tricket är att faktoriseringen $L(p, s) = (1 - \lambda p^{-s})(1 - \bar{\lambda} p^{-s})$ (vilket förklarar varför vi definierar L-funktionen som vi gör) och vi reducerar därmed till den klassiska euler-produkten (förklarad ovan) . Därmed är det enkelt att skriva den som $\sum_n \frac{a_n}{n^s}$ där a_n utgör en av a_p även för godtyckliga icke-negativa heltal [14]. Dessa koefficienter kan man använda för att skriva upp en q-serie (där $q = e^{2\pi z}$ så vi talar

[14] Man kan även visa att den bevarar definitionen av a_{p^k} som har en direkt tolkning för $\mathbb{F}_{p^n}$

helt enkelt om en Fourier serie) given av $f(z) = \sum_n a_n q^n$. Miraklet är att denna definierar en modulär form, mer specifikt en spetsform av vikt två och nivå N, viket för övrigt förmodades av Hasse och Weil, och dämed kan man involvera hela den sofistikerade teorin om modulära former med Hecke-operatorer.

En svagare form av modularitetsteoremet bevisades av Andrew Wiles i sitt bevis av Fermats sats.

Vi kan nu äntligen formulera Birch och Swinnerton-Dyers förmodan.

Rangen hos en elliptisk kurva över $\mathbb{Q}$ är lika med ordningen av nollstället i punkten $s = 1$ för den associerade L-funtionen.

Eftersom varje rationell punkt på en elliptisk kurva ger upphov till punkter på de reducerade kurvorna, är det naturligt att gissa att om rangen är hög, kommer dessa ändliga kurvor ha många punkter. Observera att $L_p(E,1) = \frac{N_p}{p}$ och således om produkten $\prod_p \frac{N_p}{p}$ konvergerar (inkluderade inte divergerande till noll) kommer faktiskt L serien att konvergera, om än betingat, för $s = 1$. Om den divergerar mot oändligheten, kommer L serien att ha ett nollställe för $s = 1$. De betraktade då produkter

$$\prod_{p<M} \frac{N_p}{p}$$

där de lät $M \to \infty$. Notera att faktorerna kan skrivas som $1+\frac{1}{p}-\epsilon_p$ där $|\epsilon_p| \leq 2p^{-\frac{1}{2}}$. Eftersom $\sum_p p^a$ divergerar för $a \geq -1$ måste för att konvergens överhuvudtaget skall kunna ske, att medelvärdena för a_p konvergerar mot 1 istället för mot 0 vilket man skulle förvänta sig om det hela var rent slumpmässigt[15]. Nu kunde inte Birch och Swinnerton-Dyer välja M speciellt stort[16], och det är notoriskt vanskligt att extrapolera trender från (nödvändigtvis) ändligt antal numeriska data. Nu fanns det ett antal elliptiska kurvor för vilka rangen var känd, tack vare trägna vingårdsarbetare som Nagell och Wiman, men i allmänhet finns det inga effektiva metoder att bestämma rangen hos elliptiska kurvor, och genom att studera dessa kända kurvor blev de inspirerade att formulera följande förmodan.

Om den elliptiska kurvan E har (Mordell)rangen r gäller att

$$\prod_{p<M} \frac{N_p}{p} = C(\log M)^r$$

Detta var en vågad förmodan, ty i praktiken visar produkten ett utpräglat oscillerande uppträdande, och att skatta konstanten C ansåg de vara ogörligt. Att sedan ta nästa steg och relatera detta till multipliciteten hos nollstället till L-funktionen är ännu mera vågat. Som John Tate anmärkte, existensen av en analytisk fortsättning var långt ifrån visad, och utan denna skulle hela påståendet vara nonsens. Vidare hade de även förmodat formen av den första icke-försvinnande Taylorkoefficienten bland annat i form av rangen av en grupp som ännu inte visats ändlig.

Deras resultat publicerades i två artikar i början av 60-talet[17] och Cassels hänvisade till de empiriska resutaten i sin plenarföreläsning i den internationella kongressen i Stockholm 1962.

För att vara mer precis låt $\pi_E(M) = \prod_{p<M, p\nmid N} \frac{N_p}{p} = C(\log M)^r$ d.v.s vi tar bort primtalen med 'bad' reduktion. Dessa kan karaktäriseras som primtalsfaktorerna till ett tal N (alltså bara ändligt

[15] Om $k_n \to 0$ och $\epsilon(n)$ är en följd av nollor och ettor parametriserad av enhetsintervallet, eller bättre Cantormängden med djävulstrappemåttet, kommer $\sum_n (-1)^{\epsilon(n)} k_n$ konvergera p.p.

[16] Man skall inte glömma att styrkan hos datorer i slutet av 50-talet var knappast imponerande, och datorsimuleringar vilken matematiker som helst nu för tiden lätt kan göra krävde då ett stort mått av finurlighet och tekniskt kunnande om elliptiska kurvor.

[17] Det påbörjades 1958 och tog flera år.

antal) den så kallade diskriminanten, som utgöres av $4a^3 + 27b^2$. Som vi har indikerat ovan är $\pi_E(M)$ samma som den trunkerade formen av L^{-1} upp till ett ändligt antal faktorer. Mera precist visade Goldfeld

Antag att $\pi_E(M) \sim C(\log(M))^r$ med konstanter $C \in \mathbb{R}^+$ and $r \in \mathbb{R}$.
Då är $r = ord_{s=1}L(E,s)$ och

$$\lim_{s\to 1} \frac{L(E,s)}{(s-1)^r} = \sqrt{2}e^{r\gamma}C^{-1}\prod_{p|N} L_p(E,1)^{-1}$$

där γ är Eulers konstant. Speciellt, om $r = 0$ då gäller

$$L(E,1) = \sqrt{2}(\prod_{p\nmid N} \frac{N_p}{p} \times \prod_{p|N} L_p(E,1))^{-1}$$

Vi kan kalla r den analytiska rangen och om den analytiska rangen är noll, respektive 1 medför det att Mordell rangen är noll, respektive 1. Inga resultat är kända för rang två eller högre.

L-serien har som påpekats en analytisk utvidgning till hela planet.

Om Birch Swinnerton-Dyer är sant får vi därmed en algoritm för att beräkna rangen hos en elliptisk kurva. Manjul Bhargava var vänlig nog att vidarebefordra följande per e-post

Here is the algorithm. Given an elliptic curve, do the following two things in parallel:

- *Look for rational points of higher and higher height on the elliptic curve; this will give a successively improving lower bound on the algebraic rank.*
- *Compute the L-function and its first several derivatives at s=1 with increasing precision, to see how many of first several seem to equal 0. This will give a successively improving upper bound on the analytic rank (with increasing precision, some derivatives will be proven to be nonzero, successively decreasing the upper bound on the analytic rank.)*

By BSD, the algebraic rank is equal to the analytic rank, and so the two bounds above will stabilize to the same number in finite time, and we will have determined the rank.

Problemet är att för $\mathrm{Re}(s) < \frac{3}{2}$ convergerar inte eulerprodukten absolut och det är därmed mycket vanskligt att erhålla *a priori* feluppskattningar av approximationen vilket är nödvändigt för att kunna derivera och visa att en derivata i punkten $s = 1$ är skild ifrån noll, liksom att alternativt använda konturintegraler för att bestämma ordning av nollställen (och om ordningen är strikt större än ett är det svårt att utesluta existensen av närliggande nollställen). Hur löses detta? Att L-funktionen har en analytisk fortsättning är en djup sats om först med modularitets satsen visade. Med dess hjälp kan man, som nämnts ovan, relatera den till en modulär form ($f(z)$) som möjliggör en beräkning av dess och dess derivators värden i $s = 1$ med godtycklig nogrannhet.

Mer specifikt kan man betrakta Mellintransformen g av f given av

$$g(s) = \int_0^\infty f(it)t^s \frac{dt}{t}$$

och man har

$$g(s) = \frac{1}{2\pi^s}\Gamma(s)L(s,f) \quad \mathrm{Re}(s) > k/2 + 1$$

där $L(s,f)$ är L-serien för f således vad vi också kallat $L(E,s)$. Man kan nu definiera

$$\Lambda(s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(E,s) = N^{s/2}g(s)$$

(där N är den elliptiska kurvanss konduktor) som kommer att satisfiera funktionalekvationen

$$\Lambda(s) = \pm\Lambda(2-s)$$

och vilket ger dels den utlovade utvidgningen samt dels ger ett effektivare sätt att beräkna $L(E,s)$, och utan denna konkreta koppling vore L-funktionen värdelös.

◇ ◇ ◇ ◇

Förslag till Wallenbergpristagare

Wallenbergpriset har delats ut sedan 1983 (under detta namn sedan 1987) av Svenska Matematikersamfundet. Det har delats ut till speciellt löftesrika yngre svenska disputerade matematiker, som ännu inte erhållit en fast forskartjänst. Wallenbergpriset har varit den mest prestigeladdade utmärkelse som en yngre svensk matematiker kunnat få inom landet. Den uttalade avsikten med priset har varit att uppmuntra matematisk forskning. De flesta av pristagarna har också fortsatt sin karriär som matematiker vid svenska universitet och större delen av pristagarna är idag professorer. Priset är i år på 300 000 kr.

En priskommitté bestående av Jana Björn (sammankallande), Peter Sjögren och Volodymyr Mazorchuk har utsetts av samfundet. Kommittén ber genom detta brev om förslag för år 2019.

Förslagen ska innehålla motivering och gärna ett CV samt tänkbara sakkunniga som kommittén skulle kunna tillfråga. Den person som föreslås ska vara högst 40 år vid utgången av 2019 och ha disputerat då samfundet fattar sitt beslut. Personen bör ha bedrivit väsentliga delar av sin matematiska forskning i Sverige, men behöver inte vara född i Sverige.

Förslagen skall vara kommittén tillhanda senast 15 mars 2019. Förslagen kan sändas med epost till

jana.bjorn@liu.se

Med vänliga hälsningar, Olof Svensson

Sommarskola i Lausanne, CIB, 26–30 augusti, 2019; Dynamiska system med strukturer.

Under hösten 2019 anordnas programmet “Dynamiska system med strukturer” (huvudorganisatörer; Magnus Aspenberg, Michael Benedicks, Anders Karlsson, Jörg Schmeling) vid Bernoullicentrumet (Centre Interfacultaire Bernoulli, CIB) i Lausanne, Schweiz. Detta program, som kommer att behandla olika aspekter av dynamiska system, kommer att starta i augusti med en konferens och sommarskola. Under hösten följer sedan två till konferenser under oktober och december. See här för mer information om själva programmet.

Sommarskolan, som äger rum 26–30 augusti, riktar sig till doktorander, postdoktorer och andra intresserade och kommer att omfatta 4 minikurser som kommer att kretsa kring konferensernas inriktning. Följande personer kommer att hålla i minikurserna:

David Damanik, (Rice University) Viktor Ginzburg, (University of California) Dimitry Kleinbock, (Brandeis University) Nessim Sibony, (Université Paris-Sud (Orsay))

För mer information om sommarskolan och för att registrera sig, se
Klicka.

Gert Almkvist *17/4* 1934 – *24/11* 2018

Ulf Persson

Den tolfte december förra året sände mig Arne Söderqvist ett mobilfoto av Gert Almkvists dödsannons på en datorskärm. Som jag redan skrivit ovan kom det som en chock eftersom jag hade under de senaste året haft en ganska intensiv brevväxling via e-post med honom, och faktiskt så sent som den 19 november hade han, som han skrev, reläat till mig ett mail i vilket han ondgjorde sig över svenskarnas behandling av lappar (Laplanders); och strax innan den 11 november hade jag fått ett eget mejl, som jag återger nedan

> *Hej!*
>
> *Jag har INTE gott om plats.*
>
> *I dagens DN skriver de om hur Storytel köpte Norstedts förlag. Pappersbokens dagar är nog snart räknade.*
>
> *Den vackraste boken jag har är nog "Promenade autour de Monde" av Le Baron de Huebner från 1877 med 316 träsnitt. Där kan man se "Les big trees de Mariposa" En annan fin bok är "Evangelia Slavice", ett nytryck från 1843 (originalet är från DDD=1500). Den är på kyrkslaviska.*
>
> *Hochschilds memoare* [sic] *i tre band (Hedbergs bokbinderi) från 1908 är också vackra. Vi hade t. o.m. en statsminister Hochschild på 1800-talet. Min handledare, Gerhard Hochschild var inte i släkt med dessa Hochschilds. Gerhard var jude och hans släkt hade fått överta namnet Hochschild från någon vänlig adelsman i Tyskland.*
>
> *Gert*

Den inledande meningen refererar till min förmodan att han som boendes på landet har väl gott om plats för sina böcker, ty jag ville minnas att Roos berättat att han hade tillgång till en stor lada. Detta förnekade han tydligen (men inte min förmodan att det måste röra sig om drygt 10000). Det bibliofiliska intresset var väl utvecklat hos honom, som många kan intyga, och för inte så länge sedan kunde jag övertala honom att bidraga till Bulletinen med en liten krönika om några av sina böcker. Arne Söderqvist berättade för honom att Sven Hilding[1] hade vid sin pensionering fått ett ultimatum av sin fru: Antingen väljer du mig eller böckerna, varvid Hilding hade fraktat böckerna till ett bibliotek. Almkvist hade då svarat att han hade gjort tvärtom.

Första gången jag hörde talas om honom var våren 1971 då Roos och Stenström talade om en för mig okänd 'Gert'. Han tillhörde en mycket liten skara av algebraiker i Sverige på den tiden, och senare fick jag reda på att han och Stenström och några andra hade haft en liten studiegrupp på KTH, som en smula nedlåtande hade refererats till som 'den topologiska gruppen' av Högskolans rektor Borg, som nog inte ens kände till begreppet topologisk grupp (annars hade väl inte Almkvist berättat historien med sådan förtjusning). Första gången jag träffade honom (IRL) måste ha vart i början av 80-talet på Mittag-Leffler. Mitt första intryck var inte så positivt. Först förväxlade han Rikard Bøgvad med den frånvarande Gudrun Brattström, visserligen bakifrån men ändå. Sedan talade han om Gårding som hade drabbats av ett nervsammanbrott med sin första fru under bröllopsnatten, vilket jag fann vara lite osmakligt, men han var en passionerad 'gossip'[2] under sitt liv, vilket bland annat kom till uttryck i hans memoarer som jag lät publicera i Utskicket för många år sedan. Under drygt trettio år korsades våra vägar vid olika tillfällen, sist jag såg honom i verkliga livet måste ha varit 2009 när jag gav ett litet förglömligt föredrag för Lunds Matematiska Sällskap och han fällde några sarkastiska kommentarer. Jag fann alltid has framtoning en smula för sävlig för min smak. Men i samband med Roos dödliga olyckshändelse började vi utbyta brev om allt möjligt, böcker, litteratur, Thomas Bernhard, hans komplicerade familjeförhållanden. Och med e-post framträder inte sävligheten.

---

[1] 1918-2004, legendarisk matematiklektor vid Högre Allmänna Läroverket för flickor å Norrmalm

[2] Svenskan saknar ett passande uttryck, 'skvallergubbe' låter lite väl negativt

Med Almkvist försvinner ännu en matematisk senior som kan vittna om en dåtid i svensk matematik och det kollektiva mannaminnet krymper.

Minnen av Gert

Lars Lönnroth

Jag lärde känna Gert Almkvist i Berkeley på 60-talet när vi båda var unga forskare på tillfällig flykt från det svenska universitetssystemet. Hans matematiska intressen var långt ifrån mina egna, men vi förenades av vår gemensamma avsky för kriget i Vietnam samt entusiasm för litteratur och det vänsterradikala studentuppror som bröt ut vid University of California och så småningom spred sig till akademiska miljöer över hela USA. Vi talade om allt möjligt, alltifrån Rökstenen till Wittgensteins filosofi. Jag tilltalades av Gerts lite knäppa humor och drastiska sätt att formulera sig om människor, diktverk och det lätt vildsinta kulturliv som florerade kring San Francisco Bay. Till hans vänstersinnade umgänge hörde bland annat Yippie-rörelsen stollige grundare Jerry Rubin och den excentriske matematikprofessorn Steve Smale, som lade sig på järnvägsspåren i Oakland för att hindra trupptransporter att komma fram till de fartyg som skulle föra dem till krigsfronten i Sydostasien.

Själv var jag inte lika djärv som Gert eller Steve Smale, men jag minns att jag lyckades vinna Gerts uppskattning när jag samlade in protester mot Vietnamkriget bland svenskar i San Francisco-området och gjorde ett energiskt försök att få in dessa protester i den svenskamerikanska tidningen *Vestkusten*. Försöket misslyckades givetvis, eftersom *Vestkusten* var en synnerligen högersinnad publikation som helhjärtat stödde USA:s krig, men Gert var ändå nöjd med min insats. Däremot blev han besviken när en annan Berkeley-svensk och umgängesvän, Bo Södersten, som på den tiden ännu räknades till vänstern, började orientera sig alltmer högerut.

Under något år i början av 70-talet bodde Gert med sin dåvarande fru, den livfulla österrikiskan Renate, och sina då ännu små barn i ett hus på Oxford Street i Berkeley, bara några kvarter från vår egen bostad. Där gick det glatt till, såvitt jag minns, och Gert tycktes trivas med rollen som pappa och make, så jag blev förvånad och ledsen när jag senare hörde att han och Renate gått skilda vägar. Men i och med att jag själv lämnade Berkeley bröts kontakten. Den återupptogs först för ett par år sedan, när jag plötsligt fick ett mejl från Gert, numera tydligen ensam pensionär, skild för andra gången och bosatt i Höör efter ett långt arbetsliv som universitetslärare i Lund och annorstädes. Han berättade där mycket kortfattat om vad han haft för sig under det senaste halvseklet. Därefter började vi utbyta mejl regelbundet fram till hans död, dock utan att någonsin träffas igen ”in real life” (som det numera heter). I mitt minne framstår Gert därför ännu som en blond och kraftfull småbarnspappa i 35-årsåldern, fast jag inser att han till slut blev en åldrad och ganska ensam herre, som lämnat Berkeley-tidens ungdomsäventyr långt bakom sig.

De mejl jag mottog från honom under den sista tiden var alltid kortfattade, ofta en smula vresigt melankoliska men alltid fascinerande genom sin informationstäthet, sina abrupta övergångar och oförutsägbara blandning av högt och lågt. Jag imponerades varje gång av Gerts höga bildningsnivå och associationsrikedom. Så här kunde det låta:

> *Håller du på med Rökstenen fortfarande? Jag har en liten bok av Daniel Hjort, "Kaféliv", som är en antologi med bidrag från många berömda författare. Bland annat skriver Thomas Bernhard om hur han lärde känna Paul Wittgenstein, pianist med bara en arm. Ludwig hade tre andra bröder,som alla begick självmord och en syster, som blev målad av Klimt. Lite av kafélivet finns kvar i Wien, Monica, som du träffade i Berkeley,går gärna på kafé. Jag måste elda upp 56 säckar pellets innan jag installerar en värmepump. Det låter enkelt men den stannar ideligen och sedan måste man sota för att få igång den igen. Livet är bra krångligt...*

Eller så här:

Jag är insnöad. Det lönar sig inte att gå de 700 meterna för att hämta DN. Igår kom den inte förrän kl 11. Hunden tycker det är jättekul med så mycket snö och vill gärna visa att hon är en slädhund. I Ryssland sprider media "alternativa fakta" som att Astrid Lindgren var nazist och den populäre Karlsson på taket var modellerad efter Hermann Göring, en fet man i sina bästa år som dessutom var flygare. Anledningen är att Lindgren är kritisk mot Ryssland i sina Krigsdagböcker.

Det känns trist att inse att den här sortens aparta meddelanden inte längre kommer att dyka upp i min dagliga e-post.

Min Kollega

Christian Jensen

Jeg har kendt Gert Almkvist siden 1966, hvor vi mødtes ved en fællesnordisk algebrakonferencee i Lund, som han havde organiseret i samarbejde med Jan-Erik Roos. Ved mødet deltog desuden blandt andet Arnfinn Laudal (fra Oslo), Heinz Jacobinski (fra Gøteborg), Bo Stenstrøm (fra Gøteborg) og Birger Iversen (fra Aarhus). Dette møde var starten til en række algebrakonferencer i de nordiske lande, bl.a. i København, i Gøteborg og i Lund. Gerts foredrag var altid meget inspirerende: Gert var ikke blot god som forsker, men også en god formidler, der forstod at tlltrække mange dygtige elever.

Han var en ganske bredt orienteret meget original matematiker, der formåede at skifte forskningsfelt og derved kunne opnå nye sammenhænge . Han startede med emner i abstrakt kategoriteori og sluttede med yderst klassiske spørgsmål i talteori og analyse.

Gert og jeg havde en fælles "last": vi var begge passionerede bibliofile bogsamlere. Gert havde en meget fin bogsamling, både indenfor matematik og udenfor matematik. Endnu få uger før hans død havde jeg e-mail korrespondance med ham, hvor vi bl.a. diskuterede om en bibliofil bogsamler burde/kunne sprætte en uopsprættet sjælden førsteudgave op!

Jeg selv vil mindes Gert både som matematiker og som bogsamler.

Min Mentor

Gudrun Brattström

Första gången jag träffade Gert var jag ganska färsk student i Lund, för ett par evigheter sedan: det måste ha varit vårterminen 1974. Han hade gult hår på den tiden (lite grand som halm), men bortsett från det har jag inget minne av att han på något vis förändrades under de följande decennierna. Jag uppskattade hans undervisning mycket. Den hade ett konspiratoriskt drag: ”Nu ska jag lära er ett trick. . . ” Eller: ”Så här gör dom på Teknis − men så får inte ni göra!” Epsilon och delta var vad som gällde på univer- sitetssidan. Gert själv var inte främmande för att tänka lite friare, och långt senare gjorde han sig känd för de mest vildsint divergenta integraler och summor. På grundkursen delade han ut svårare extraproblem som den som hade lust kunde sätta tänderna i. Jag minns att jag ofta gjorde dem först, vilket ibland ledde till att jag aldrig kom till de egentliga hemuppgifterna. Som algebraiker var Gert en aning isolerad på en matematisk institution som på den tiden dominerades fullständigt av Lars Gårding och Lars Hörmander. Han bedrev subversiv verksamhet i form av ett institut för algebraisk medita- tion med varierande adress, och han arrangerade hemliga algebraseminarier. Jag minns inte längre vilka seminariedeltagarna var utöver Gert, Vibeke och mig själv. Jo förresten, jag minns en deltagare till: Gerts och Vibekes son Esben, ungefär tre år gammal vid tillfället. Gert brukade skryta med att Esbens första ord hade varit tensorprodukt. I vilket fall som helst var det en ära att få vara med. För mig var Gert ett slags mentor eller handledare, trots att man normalt sett inte hade någon sådan som kandidatstudent.

Han uppmuntrade mig, inkluderade mig i allt möjligt och gav mig problem att leka med – och han rådde mig att lämna Lund. ”Åk till Amerika, det gjorde jag. Det är bra där.” Så jag åkte till Amerika sommaren 1976, och flyttade inte tillbaka till Sverige förrän nio år senare, till Stockholm. Gert ringde mig ibland, ett välgörande avbrott i Stockholmsstressen. Det första som brukade höras i telefonluren var en lång suck, och sedan: ”Jo du. . . det var Gert här. . . jag tänkte på en sak. . . ” Gert är en människa som man har ljusa och roliga minnen av, och jag är honom stort tack skyldig för att han såg mig och stödde mig under hela min lundatid. Jag kommer att sakna honom.

Min Handledare

Torbjörn Tambour

Jag träffade Gert första gången hösten 1982 då han höll en kurs i representationsteori i Lund. Innan dess hade jag bara hört talas om honom som institutionens algebraiker. Kursen var väldigt rolig och jag blev sugen på att fortsätta med algebra. Gert avslutade med ett kort avsnitt om invariantteori, vilket också verkade spännande. I tentan påstod jag i en uppgift att alla grupper av ordning 18 är abelska, vilket förstås är helt tokigt, men å andra sidan lyckades jag lösa en lite svårare uppgift utanför kursen, vilket kanske gjorde att jag inte framstod som ett helt hopplöst fall. Uppgiften var att bevisa att antalet lösningar till ekvationen $xyx^{-1}y^{-1} = g$ i en ändlig grupp ges av formeln

$$N(g) = |G| \sum_{\chi \in I(G)} \frac{\chi(g)}{\chi(1)},$$

där G $I(G)$ är mängden av irreducibla karaktärer på G. Detta är en gammal sats av Frobenius och jag var mäkta stolt över att ha löst uppgiften. Den har för övrigt förföljt mig genom åren. Eftersom graderna $\chi(g)$ delar gruppens ordning $|G|$, så är N faktiskt en karaktär på G. Om man kunde hitta en representation med karaktären N, så skulle man ha ett nytt bevis för att $\chi(1)$ delar $|G|$. Jag gjorde många försök, men har inte hittat någon sådan representation. Det går i och för sig att visa att graderna delar gruppens ordning genom att generalisera formeln ovan, men det beviset är inte så elegant som det jag tänkte mig.

Våren 1983 höll Gert en kurs i kommutativ algebra som en förberedelse för sommarskolan i Stockholm samma år. Han var alltid en inspirerande lärare som ofta och gärna berättade om allehanda (mer eller mindre tillåtna) knep för att beräkna integraler, summor och så vidare. Derivering under integraltecknet var en favoritmetod. Här är en av hans bästa:

$$\int_0^1 \frac{x^{17} - 1}{\log x} dx$$

De vanliga substitutionerna och metoderna kommer man inte så långt med, men prova att derivera med avseende på 17 under integraltecknet.

Senare, troligen 1984, höll han en serie mycket inspirerande seminarier om invariantteori och jag fick i uppgift att hålla ett seminarium om den så kallade symboliska metoden i klassisk invariantteori, en metod som utvecklades av Clebsch, Aronhold, Gordan med flera för att bestämma invarianter till den ”klassiska” gruppen $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$. Det var intressant att läsa och gå igenom äldre matematiska texter. Gert accepterade att ha mig som doktorand och mitt projekt blev att använda den symboliska metoden för att bestämma icke-kommutativa invarianter. Att han föreslog det projektet berodde på att han, Warren Dicks och Edward Formanek hade skrivit en artikel om icke-kommutativa ringar av invarianter, bestämt vissa Hilbertserier, visat en icke-kommutativ variant av Moliens sats med mera. De hade genom lite experimenterade bestämt vissa explicita invarianter, men med den symboliska metoden blev det ganska enkelt att hitta flera. Icke-kommutativa ringar av invarianter är i allmänhet inte ändligt genererade, men om man tillåter platspermutationer av variabler som en ny operation, så är de det åtminstone för de klassiska grupperna. Det gick att bestämma sådana generatormängder med hjälp av den symboliska metoden, även om beräkningarna var omfattande. Gert var alltid en uppmuntrande handledare och jag kunde hemsöka honom nästan när som helst för att fråga om saker.

Gert höll flera seminarieserier för oss doktorander på institutionen, bland annat om diskreta grupper, Lieteori och kryptering. Jag tyckte mycket om dem. Så småningom disputerade jag och blev sedan forskarassistent, också i Lund. Jag fortsatte med invarianterna, men jag tror att Gert höll på att glida från dem vid det laget. Om jag inte missminner mig, så blev han mer och mer intresserad av numeriska beräkningar. Han sysslade med partitioner, bland annat bevis för Hardy-Ramanujan-Rademachers sats. Senare höll han också på med zäta-funktionen och dess värden i udda heltal, men det får andra skriva om.

Under mina år som forskarassistent, 1988-1992, gjorde Gert och jag några resor tillsammans. Den första var till Berkeley sommaren 1988 för en konferens om kommutativ algebra på MSRI. För någon som jag som knappt hade rest utomlands alls tidigare var det förstås oerhört spännande och det var en intressant konferens. Gert åkte några veckor före mig och vi skulle sammanstråla på ett studenthärbärge där vi skulle bo under konferensen. När jag kom dit sent på natten, trött och allmänt medtagen, sa receptionisten att ”Mr Almkvist has already left”, vilket gjorde mig lite orolig. Det var dock ett felaktigt besked och vi hittade så småningom varandra. Gert visade mig ”sina” boklådor och antikvariat i Berkeley och vi reste båda hem med kraftig övervikt i bagaget.

På senhösten 1990 var vi i Jena och Halle i gamla DDR och hälsade på bekanta till Gert. Han var alltid så snäll som lät mig följa med. Någonstans i mina samlingar har jag fortfarande kvar ett papper som det står ”Turmerlaubnis” på; man behövde det för att komma in på Matematiska institutionen i Jena, som låg i Zeiss-tornet mitt i staden. Den äventyrligaste resan gick till Moskva i augusti 1991. Som vanligt hälsade vi på bekanta -Gert verkade känna nästan alla matematiker i världen - och i Moskva var vi hembjudna till både Issai Kantor och Ernest Vinberg. Hos Vinberg lagade vi mat tillsammans och jag minns att jag blev en smula nervös av en större mängd för mig helt okänd svamp som skulle ingå i koket. Gert, som var mykologiskt kunnigare än jag, garanterade att det inte var någon fara och det hela gick ju bra. Den riktiga spänningen kom när det spreds ett rykte på hotellet att Gorbatjov hade satts i husarrest på Krim och en statskupp eventuellt var att vänta. Vi kontaktade svenska UD, som sa att det troligen inte var någon fara, men ändå rekommenderade oss att åka tillbaka till Sverige. Så här efteråt är det intressant att ha varit i världshistoriens mitt om än så bara en dag, men just då var det lite pirrigt.

Jag lärde känna Gerts familj, Vibeke och barnen, en del också. Vi gjorde ett antal roliga utflykter till Köpenhamn, Klampenborg och Dyrehaven tillsammans och ofta med gäster på institutionen. 1992 flyttade jag till Stockholm och vi hade inte så mycket kontakt de senaste åren. Men jag minns Gert med tacksamhet som en av de omtänksammaste och snällaste personer jag mött. Hans matematiska kunskaper var väldigt breda och han delade gärna med sig. Hans boksamlande var också brett och omfattande; mycket matematik naturligtvis, men även Doré-biblar och Baedeker, om jag minns rätt. Jag förstod aldrig hur han valde ut böckerna han köpte, men han var oerhört kunnig som samlare.

Avslutningsvis vill jag berätta en liten historia som visar hur liten och ironisk världen emellanåt är. Under mina sammanlagt 12 år som student, doktorand och forskarassistent i Lund bodde jag i Malmö, närmare bestämt på Kungsgatan 18 A. Det visade sig att Gert bott på 18 B i samma fastighet när han gick i gymnasiet på St Pauli tekniska läroverk. Det är festligt i och för sig, men fortsättningen är ännu bättre. Gert var en av medgrundarna till *The Institute for Algebraic Meditation*. Jag blev aldrig upptagen i institutet och vet inte riktigt när det grundades. De medlemmar jag kommer ihåg är Robert Fossum, Edward Formanek och Hyman Bass; möjligen var Ian Macdonald också medlem. Någon av samfundets medlemmar vet säkert mer. Nå, själva ironin är att i Gerts gamla lägenhet på 18 B öppnade runt 1990 en lokalavdelning av ett annat institut, nämligen *Institutet för transcendental meditation.*

Jan Boman jubeldoktor

Pavel Kurasov

Professor emeritus Jan Boman försvarade sin avhandling vid Matematiska institutionen, Stockholms universitet i september 1967 (efter att ha licat för både Borg vid KTH och Hörmander vid SU) och promoverades till Fil Dr våren 1968. Femtio år senare blev Jan jubeldoktor vid hans *Alma Mater* Stockholms universitet och mottog diplom och lagerkrans under en ceremoni i Stockholms stadshus den 28 september 2018. Jan tillfrågades att hålla ett tal som representant för årets jubeldoktorer, och som väntat genomförde han uppgiften med elegans.

Nedan följer talet

Ärade Rektor, kollegor och övriga gäster!

Jubeldoktorer och Jubelmagistrar har promoverats i Sverige sedan tidigt 1800-tal. Benämningen Guldjubeldoktor förekom också. Likheten med termen Guldbröllop, liksom bruket av ringen som symbol, är inte en slump, eftersom forskarens förhållande till vetenskapen ansågs ha likheter med ett äktenskap. Vid Uppsala Universitets 400-årsjubileum 1877 nämnde promotor tre promovendi som – jag citerar – "firade diamantbröllop med filosofien". Av beskrivningarna av den tidens jubileumspromotioner kan man utläsa att de äldre åtnjöt stor respekt och prestige. Respekt och vördnad för äldre har som bekant en lång historia. Sådana titlar som ålderman och byäldste bär ju vittnesbörd om detta. Och att ledamöterna i senaten i romarriket bestod av seniorer hörs också på namnet.

Nu för tiden blåser som bekant andra vindar.

I stora delar av arbetslivet upplever människor att deras bäst-före-datum är överskridet redan när de är drygt hälften så gamla som vi jubeldoktorer. Riksdagspartierna tävlar om att ha de yngsta riksdagskandidaterna. Och så vidare.

Men det finns motståndsfickor i denna kulturkamp. Vi är glada att universitetsvärlden utgör en sådan; än så länge, borde jag kanske tillägga. Här överlever fortfarande insikten att vissa kunskaper och viktiga erfarenheter tar åtskillig tid att förvärva. Och, tro mig eller ej, jag känner mig helt trygg med att redaktören för den vetenskapliga tidskriften inte refuserar mitt manuskript efter att bara ha sett mitt födelseår.

Inte så få medarbetare vid universiteten väljer att arbeta i någon utsträckning efter pensionen. Frånvaron av, eller i varje fall jämförelsevis måttlig, åldersmobbning inom universitetsvärlden kan tänkas ha bidragit till detta.

Men varför arbetar en del av oss, trots att vi inte behöver, kanske någon undrar. Den framstående fysikern Victor Weisskopf antyder ett svar i titeln på sin memoarbok, som är "The joy of insight".

Vi jubeldoktorer tackar varmt för att vi har blivit ihågkomna och till och med hedrade!

Skål!

Moderna undervisningshjälpmedel

Arne Söderqvist

Didaktiker brukar inte vara sena med att pröva nya mirakelmediciner mot sjunkande skolresultat. Så var det även på min tidigare arbetsplats KTH i Södertälje. Där förevisades en gång "mentometrar", dvs. något som liknade fjärrkontroller till TV-apparater, som skulle delas ut till studenterna inför varje föreläsning. Studenterna skulle emellanåt besvara frågor med olika svarsalternativ och ange det svar de ansåg vara det rätta genom en knapptryckning. Sedan kunde man se svarsfördelningen på en dataskärm. Läraren skulle sedan utgå från vad som visades på skärmen och kommentera detta på lämpligt sätt.

Man kunde ha gjort det hela betydligt enklare genom till exempel handuppräckning. Men den förslagna försäljaren var givetvis garderad mot alla tänkbara invändningar: mentometrarna möjliggjorde flera olika svarsalternativ, de borgade för anonymitet så att ingen skulle behöva "känna sig dum", osv. Cheferna föll för säljarens argument och ett antal mentometrar inköptes "på prov". Beträffande resultatet så kan jag sammanfattningsvis nämna att samtliga inblandade ganska snart hoppades att det hela skulle falla i glömska. Att jäv förelåg vid inköpet var dessutom ganska uppenbart. Men ett resultat kvarstod, nämligen det att lärare som inte velat deltaga i experimentet ansågs vara "förändringsobenägna", vilket också framhölls i utvecklingssamtalen.

Det råder lärarbrist. Speciellt gäller detta ämnen som "moderna språk", matematik och NO. Det torde ta omkring ett kvartssekel att häva lärarbristen. Det förutsätter förstås att åtgärder vidtas omgående, men så verkar inte ske. I landets glesortskommuner är avstånden långa. Elevunderlaget för att ordna undervisning på gymnasienivå i alla ämnen är ofta för lågt. De geografiska avstånden är för stora för att möjliggöra samarbete mellan skolor i olika kommuner. Att införa fjärrundervisning ligger därmed nära till hands. Sådana didaktiska experiment lär nu pågå i några kommuner.

Lyckad fjärrundervisning är dock inte detsamma som att ställa in en kamera i ett klassrum där en lärare undervisar och en monitor i ett annat klassrum i en annan kommun. All interaktivitet mellan läraren och eleverna försvinner. Det är inte bara möjligheten att ställa frågor till läraren som uteblir. En väsentlig sak är ju att läraren och eleverna har ömsesidig ögonkontakt. Det gör att läraren kan märka om något behöver förtydligas utan att det ens behöver sägas. Om läraren hamnar ur bild och är tyst under några sekunder, till exempel för att blöta tavelsvampen, kan det upplevas som att lektionen är slut. Vad som fattas är en närvarokänsla. Närvarande elever, med överblick av hela klassrummet, får en helt annan upplevelse.

Ett steg på vägen till förbättring vore att spela in lektioner och därefter redigera inspelningen. Därmed kan oväsentliga delar klippas bort. Men vad som kvarstår är förekommande bildoskärpa och brister i ljudinspelningen och i ljussättningen. För att resultatet ska kunna bli fullt användbart skulle det behövas såväl kameratekniker, ljustekniker, ljudtekniker som regissör. Dessutom skulle inspelningen helst ske i en studio. Vissa omtagningar kan också behöva göras.

Det finns otaliga inspelade lektioner på YouTube. I stort sett alla är behäftade med ovan nämnda brister. Men det finns förvisso fördelar med inspelad undervisning. Man kan "backa bandet" och se om hela eller delar av inspelningen. Man kan dessutom se lektionen precis när man vill. Det senare är egentligen inte bara en fördel; elever brukar vara tidsoptimistiska och ha en tendens att skjuta upp saker. "Varför ska jag skjuta upp till imorgon, det jag lika gärna kan skjuta upp till i övermorgon". Ett schema som hjälper till att strukturera studierna är antagligen nödvändigt.

Sedan jag blivit pensionär har jag tittat igenom åtskilliga matematikföreläsningar på Internet. Även om läraren ifråga kan sitt ämne gör de amatörmässiga inspelningarna att man som åskådare har svårt att upprätthålla intresset. Jag har själv varit med om att agera lärare i några inspelningar, men med ett resultat jag definitivt inte är nöjd med. Jag ska dock nämna två föreläsningsserier jag anser är mycket bra. Tekniskt sett är de dock inte helt fulländade.

Först och främst vill jag nämna Norman J. Wildberger. Wildberger är kanadensare, utbildad vid universitetet i Toronto och med en doktorsgrad i matematik från Yale. Han är sedan flera år verksam som professor vid universitetet i New South Wales i Australien.

Wildberger har gjort över tusen YouTube-inspelningar. Ungefär hälften är inspelade i föreläsningsmiljö och hälften är studioinspelade. Wildberger är en utmärkt pedagog. Han talar tydligt och har en kameratekniker till sin hjälp. Han har gjort inspelningar av föreläsningar inom många områden av matematiken. Jag vill bland många andra framhäva hans framställning av matematikens historia och av algebraisk topologi. Men jag har trots allt en invändning mot Wildberger: han nämner gång på gång att han inte accepterar begreppet irrationella tal. När han trots allt behöver ta till sådana blir det med en åtföljande brasklapp, "Härtill är jag nödd och tvungen".

Ännu en utmärkt föreläsare är österrikaren Frederic Schuller. Schuller är teoretisk fysiker med doktorsexamen från Oxford. Han må alltså vara fysiker, men är ändock mycket noga med matematiken. Hans videor är inspelningar av pågående föreläsningar. Även han har en kameratekniker till sitt förfogande. Inspelningarna är tekniskt sett hyggligt bra. Hans föreläsningar är krävande och jag måste pausa dem ofta för att verkligen kunna hänga med.

Både Wildberger och Schuller är utmärkta förebilder både för matematikintresserade och för dem som funderar på att göra inspelade lektioner. Den som vill prova på att spela in lektioner kunde med fördel söka inspiration hos dessa båda.

Göran Gustafsson Symposium in Mathematics, June 12-14, 2019

June 12: `Mathematics in Biology. (K1)`

11.00-12.00	Jean-Pierre Eckman, University of Geneva
12.00-13.00	(lunch)
13.00-14.00	Lai-Sang Young, NYU Courant
14.00-14.30	(coffee)
14.30-15.30	Ofer Feinerman, Weizmann Institute

June 13: `The ant in the labyrinth, or anomalous diffusion at criticality. (F2)`

11.00-12.00	Gérard Ben Arous, NYU Courant
12.00-13.00	(lunch)
13.00-14.00	Manuel Cabezas, PUC, Santiago de Chile
14.00-14.30	(coffee)
14.30-15.30	Alexander Fribergh, Université de Montréal

June 14: `Bridging scales. (F2)`

10.00-11.00	Martin Hairer, Imperial College
11.00-11.15	(coffee)
11.15-12.15	Cyril Labbé, Université Paris-Dauphine
12.15-13.15	(lunch)
13.15-14.15	Patricia Gonçalves, Instituto Superior Técnico, Lisbon
14.15-14.45	(coffee)
14.45-15.45	Jeremy Quastel, University of Toronto

Om matematikens trenne "linguae francae".

Jockum Aniansson

Under de år jag gav den ganska utförliga kursen i Matematikens Historia vid KTH i Stockholm kom jag gradvis till insikt om att det verkar ha varit blott *tre* olika språk som "bar"/förde matematiken framåt under mer än tvåtusen år. Det första hade en av sina tyngdpunkter i Afrika, det andra hade sin ena tyngdpunkt i Asien medan det tredje mest användes i Europa. Men hur kan man bäst döpa dessa tre perioder? Kan man finna tre enhetliga beteckningar? Jag har icke sett det än.

Del ett. Matematiken som vetenskap *föddes* i det antika Hellas, i städer kring Egeiska havet såsom Miletos och Athen. Trippeln definition, sats, bevis (med logisk bevisgång) är grekisk. Från Egypten och Mesopotamien ärvde grekerna vissa formler och procedurer men inte det vi idag ser som "matematikens väsen". (I analogi med andra ordbildningar kunde man pröva kalla det som bedrevs i Egypten och Babylonien för prematematik eller protomathematik.)

Troligen föddes matematiken i symbios med grekernas filosofi, demokrati-begrepp och skådespel. När den grekisk-språkiga världen gradvis utvidgades fick vi först matematiker i "Stor-grekland" (Magna Graecia) i dagens syd-Italien och på Sicilien och senare i Egypten.

Enligt traditionen är Pythagoras den förste som kallade sig filosof. Han fann det också för gott att flytta från ön Samos i Egeiska havet nära Miletos till staden Kroton på den "italienska fotsulan".

Den berömda kedjan av tre par lärare-elev som består av Sokrates, Platon, Aristoteles och Alexander av Makedonien, kan sägas personifiera denna utvidgning. Filosofen Sokrates lever kvar i Platons verk. Platon samlade i Akademeia sin tids största matematiker och har fått giva sitt namn till de fem "platonska kropparna", fast det nog var Theaitetos som bevisade att de endast voro fem till antalet. (Vi slapp tungvrickaren "de theaitétiska kropparna"!) Över ingången till Akademien lär det hava stått "Ageometretos medeis eisito (med nygrekiskt uttal Ageometritos midis isito), vilket uttolkas som En icke-geometer må ej träda här in, Tillträde förbjudet för icke-matematiker. Detta trots att Platon själv icke räknas som matematiker utan som en matematikens gynnare.

Aristoteles´ syllogismer (enkla logiska slutledningsregler) räknas som logikens grundstenar. Hans bidrag bestod alltså i att klargöra vilka regler som måste respekteras vid bevisföring. Han grundade också ett Lykeion i Athen, en högre skola, vars namn återfinns i latinets lyceum. Aristoteles' privatelev Alexander slutligen lät grunda staden Alexandria i Nildeltat, där de första ptoleméerna grundade både Mouseion och det berömda Biblioteket, som slutligen kom att inrymma hundratusentals papyrus- och pergamentrullar. Hellenismen brukar räknas ungefär från grundandet av Alexandria år 332 f.Kr., då många icke-greker kom under grekiskt styre i Alexanders tre dotterriken. I Alexandria författade och sammanställde Eukleides sitt odödliga verk *Stoikheia* (Elementa på latin) med rigorös matematisk bevisföring som leder fram till den vackra finalen: de fem regelbundna poly(h)edrarna, som mycket väl hade kunnat få epitetet "de fem euklidiska kropparna". Den euklidiska geometrien med sitt berömda parallellpostulat går som en röd tråd genom matematikens historia ända fram till Einstein.

Arkhimedes studerade i Alexandria men återvände till sitt Syrakusa (Syrákousai, “sumpmarkerna, kärren”) på Sicilien och är mest känd för alla sina sinnrika "forskningsrapporter", som han skrev på jonisk dialekt och sände till sina kolleger runt Medelhavet. Han var en av de första matematikerna att gjuta en våldsam död då en soldat (i konflikt med den romerske överbefälhavarens order) högg ned honom under det andra puniska kriget.

Apollonios från Perge i landskapet Pamfylien i Mindre Asien alias Anatolien (idag ligger ruinerna efter Perge på Turkiets sydkust nv om Cypern) for till Alexandria, där han skrev sin stora monografi *Konika* (fr. les Coniques, eng. the Conics, ty. die Kegelschnitte) om ellipser, parabler och hyperbler i åtta band (böcker), varav fyra har bevarats på grekiska och tre på arabiska; den åttonde och sista tros vara förlorad. Tänk om den gömmer sig på någon vind i Konstantinopel eller på den grekiska munkhalvön Athos alias det Heliga Berget i nö Grekland!

Alla dessa tre, de tre största grekisk-språkiga matematikerna verkade utanför det klassiska Hellas' gränser under den hellenistiska epoken, men termen "hellenistisk matematiker" har icke blivit knäsatt.

Bland deras efterföljare märks Diofantos med sin bok *Arithmetika*, där han löser ekvationer av grad ett och två. Han hade ett formelspråk med invecklade beteckningar, som lyckligtvis inte överlevt till eftervärlden.

Den store astronomen Klaudios Ptolemaios var nog inte släkt med de ptoleméer som styrde före Kleopatra, trots att senare arabiska översättare kallade honom "kung". Hans stora verk hette från början på grekiska *Mathematike syntaxis* (Matematisk sammanställning), senare *Megale syntaxis* (Den stora sammanställningen) och

Megiste syntaxis (Den största sammanställningen), vilket på arabiska blev *al-Megist* eller *Almagest* (Den största). Copernicus läste detta verk ordentligt innan han satte Solen i centrum i st f Jorden, som hos Ptolemaios.

Många, många fler grekisk-språkiga matematiker förtjänar här omnämnas (Thales, Hippokrates, Eudoxos, Eratosthenes, Hipparkhos, Heron, Menelaos, Pappos, Theon av Alexandria, Proklos) innan vi kommer till Theons dotter, den lärda Hypatia, som enligt traditionen dräptes av en fanatisk mobb (av kristna?) år 415 e.Kr. Vid den här tiden låg nästan hela den hellenistiska världen under Rom, men romarna verkar ha låtit matematikerna fortsätta på sitt inkörda grekiska språk. Inga nämnvärda texter om matematik lär ha författats av romarna. I Konstantinopel levde den antika grekiska matematiken vidare, ibland på sparlåga, ända fram till stadens fall år 1453, se del tre nedan.

Vi kan nog inte med säkerhet slå fast att alla som skrev matematik på gammalgrekiska före år tusen hade grekiska som modersmål, men vi kallar dem oftast för "grekiska matematiker". Detta skall ses i bjärt kontrast till både del två och del tre nedan.

Gammalgrekiska/Klassisk grekiska/Koine var matematikens första *lingua franca.* Vi har otaliga grekiska ord i vår matematiska vokabulär. Cirkelns mittpunkt heter kentron på grekiska, vilket betyder bl a tagg, törne. Det torde syfta på passarens spets, när man ritar en cirkelrund kyklos på grekiska.

Uti ordet kyklos räknas de två mittersta bokstäverna -kl- som ordstam, och den är släkt med svenskans hjul, engelskans wheel. De två första ky- utgör en upprepning av k-ljudet i ordstammen; det kallas reduplikation och är ymnigt förekommande i gammalgrekiska. De sista två bokstäverna -os upplevs som en harmlös ändelse.

Hypotenousa betyder sträckt under, eng. subtended. Här betyder hypo- under och tenousa är samma ord som (ut)tänjd.

Hexagon betyder ordagrant (med) sex knän/vinklar, där gone (vinkel) är samma ord som vårt svenska knä.

Kägelsnittens klassiska grekiska namn tarvar en hel uppsats i egen rätt.

Långt efter grekerna har man nybildat matematiska termer på grekiska.

Ordet tri-gono-metri (tre-vinkel-mätning) återfinns i skriften *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* (Trigonometri, eller en kort och åskådlig avhandling om triangellösning) av den tyske matematikern Bartholomäus Pitiscus från år 1595. År 1612 införde han decimalkommat.

Det gammalgrekiska verbet manthano (nygrekiska mathaino, mathäno) betyder "jag lär mig, jag lär". Ordstammen math- betyder lära, lära sig, och ta mathematiká (det står i pluralis; därav engelskans mathematics och franskans les mathématiques) betyder ungefär det man lärt sig, det man studerat. Det är pluralis av adjektivet mathematikós, som på latin blivit mathematicus, vilket idag betyder "en matematiker". Man kan ana ett icke utsagt vanligt substantiv efter orden "ta mathematika ..." Ordet matematik är i själva verket ett substantiverat adjektiv, härlett från ett verb.

Jag brukar kalla Mathematik för Läroämnet par excellence.

Den sammanlagda tiden då grekiska "var" matematikens språk kan uppskattas till drygt tusen år. Många har undrat varför denna fantastiska utveckling gradvis under flera århundraden bromsade in för att till slut helt avstanna. Man brukar anföra grekernas avsaknad av en-bokstavsbeteckningar för avstånd, areor och volymer. De ville nog inte gärna tänka i fyra dimensioner. Aritmetiken var huvudsakligen rhetorisk — före Diofantos utsades allt i ord utan behändiga, komprimerade formler. Våra tecken för bl a plus, minus och likhet skulle låta vänta på sig i ytterligare tusen år!

Arkhimedes föregrep integralkalkylen med sina fiffiga beräkningar av bl a area och volym. Hans beräkning av arean av en sfärisk kalott är utomordentligt vacker, en ren fröjd att läsa. Men det var inte många andra grekiska matematiker, som kunde fortsätta med liknande utstuderade och grymt fiffiga beräkningar.

Apollonios uttömde förmodligen den del av läran om "konika" som var nåbar med hans hjälpmedel. Han föregrep både projektiv geometri, analytisk geometri och algebraisk geometri. De vackra latinska orden abscissa (linea) [ordagrant avskuren linje] och ordinata (som idag tyvärr ersatts av de betydligt tråkigare orden x-koordinat och y-koordinat) är översättningar från de grekiska termer som användes av bl a Apollonios. Hyperbelns ekvation kallades hyperbelns symptom på grekiska. De räta linjer, som *inte* uppfyller hyperbelns symptom (men nästan, långt borta), kallade Apollonios dess asymptoter (a-symptoter).

Del två. Det var de första kaliferna i Baghdad och de österländska lärde som tog över stafettpinnen från hellenerna.

Kalifen al-Mansur lät grunda Baghdad år 766; kalifen Harun al-Rashid lär ha grundat ett bibliotek där, och kalifen al-Mamun lär ha grundat Bayt al-Hikma (Vetenskapens Hus).

Från Indien kom de nio entalssiffrorna och nollan tillsammans med ett indiskt manuskript om astronomi till Baghdad.

Kalifen bad många arabiska lärde att köpa upp grekiska manuskript som skulle föras till Baghdad för att översättas till arabiska. En av dessa översättare fick t o m tillnamnet al-Uqlidisi ("Euklidiern").

En gång bad kalifen speciellt kejsaren i Öst-Rom (Konstantinopel) att låta översända en kopia av Almagest.

Matematikens fana fördes högt på arabiska under mer än sjuhundra år. En av de första var Muhammed ibn-Musa al-Khwarizmi på åttahundratalet, som "givit" oss de två orden algoritm och algebra. Hans "algebra" handlade bl a om ekvationer av grad ett och två, som han behandlade rhetoriskt i ord. Detta var ett steg bakåt jämfört den mer symboliska algebran hos både Diofantos och indierna. "Algoritmerna" i boken bestod av de enkla formella reglerna för att gradvis lösa dessa ekvationer.

Hipparkhos hade infört kordan, som finns tabellerad hos Ptolemaios. Men det var indierna som halverade den till den halvkorda som via arabiska på latin blev vårt sinus. På arabiska infördes gradvis (med arabiska namn) även cosinus, tangens och cotangens, secans och cosecans.

Thabit ibn-Qurra översatte *Konika* till arabiska.

Ibn al-Haytham (Alhazen) brottades framgångsrikt med bl a optik.

Dessa två sysslade också med kvadratur och kubatur (area- och volymsberäkningar.)

Poeten och matematikern Omar Khayyam (al-Khayyami) brottades med tredjegradsekvationen. Han uttryckte lösningen med hjälp av skärningspunkter mellan två olika kägelsnitt.

Pascals triangel kallas Khayyams triangel i Iran — kärt barn har många namn; i Italien kallas den Tartaglias triangel.

Abu al-Wafa, al-Biruni och Nasir al-Din al-Tusi arbetade med sfäriska trianglar.

Både al-Haytham, al-Khayyami och al-Tusi studerade parallellpostulatet.

En av de sista stora var astronomen al-Kashi (död 1429 e.Kr. i Samarkand), som fullständigt behärskade decimalsystemet och beräknade enhetscirkelns omkrets 6,28... med en *fruktansvärd* noggrannhet (16 korrekta decimaler). Han lär ha velat beräkna universums omkrets med ett fel mindre än bredden hos ett hårstrå givet hans uppskattning av universums diameter.

Cosinus-satsen kallas le théorème d'al-Kashi i Frankrike.

Efter ett populär-historiskt föredrag under en "pi-dag" kom en iransk/persisk matematiklärare fram och undrade varför jag "envisades" med att säga "arabisk matematik" eller "arabiska matematiker" då en stor del av dem i själva verket var persisk-språkiga. Jag fick mig en tankeställare. När man nagelfar de tjugo mest framträdande matematikerna som skrev på arabiska ser man att knappt hälften av dem var persisk-språkiga matematiker och astronomer. De skrev samtliga på arabiska, islams eget språk. Därför sammanförs de i en stor lärobok under rubriken "the mathematics of islam". Men eftersom det delvis var en sträng tolkning av islam som gradvis satte käppar i hjulet för matematiken på arabiska har jag svårt för en sådan rubrik.

Andra böcker talar om arabisk matematik. Jag vill helst tala om matematik på arabiska.

Tyvärr använder vi inte många matematiska ord från arabiskan idag. Astronomin har desto fler såsom t ex zenith och nadir.

Här kommer några titlar utöver al-Khwarizmis berömda böcker:

Ibn al-Haytham, *al-Kitab al-Manazir* (Boken om optik), 7 volymer;

al-Kashi, *Miftah al-hisab* (Nyckel till aritmetik),

al-Kashi, *Risala al-muhitiyya* (Avhandling om omkretsen),

samt hans förlorade text *Risala al-watar wa'l-jaib* (Avhandling om kordan och sinus; här står *jaib* för den indiska halvkordan, som blev européernas sinus).

Arabiska framtonar som matematikhistoriens andra *lingua franca*. Från al-Andalus via Egypten till Persien kunde matematikerna kommunicera på arabiska. Otaliga är de grekiska manuskript som gått förlorade på grekiska men överlevt på arabiska. Detta är en kulturgärning som är svår att överskatta!

Del tre. På iberiska halvön översattes matematiska manuskript till hebreiska och spanska. Men det var först när de vidareöversatts till latin, som de kunde läsas av de lärde i hela den kristna världen.

Man kan säga att matematiken "ympades" in på det kristna Europa med tidiga översättningar till latin. Här kommer en del boktitlar på latin, som man ibland kan dechiffrera med hjälp av kunskaper i bl a engelska och franska.

Adelard av Bath var kanske den förste som översatte hela *Stoikheia* till latinets Elementa.

Robert av Chester "översatte" år 1145 al-Khwarizmis boktitel *Kitab ... al-jabr wa'l-muqabala* till Liber algebrae et almucabola. Han införde också ordet sinus.

Gerard av Cremona tillhörde den s k översättarskolan i Toledo på elvahundratalet; han översatte många verk till latin, däribland både Euklides *Stoikheia*, Ptolemaios *Almagest* och al-Khwarizmis ovannämnda algebra-bok.

Leonardo Pisano, *Liber abaci*, Boken om räkning. Manuskripten från den första upplagan år 1202 verkar hava gått förlorade, men en senare upplaga 1228 finns bevarad.

Nicole Oresme, *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, (eng. Treatise on the configurations of qualities and motion), circa 1350, aldrig tryckt. Han var den förste med ett diagram (en graf) som visar hastigheten (eller farten) som en funktion av tiden, långt före Galileo.

Efter Konstantinopels fall år 1453 kom många grekiska lärde till Italien medförande antika manuskript. En ny omgång översättare kunde nu översätta mycket från grekiska original i stället för att gå via arabiskan.

Nicolas Chuquet skrev redan år 1484 på franska!

Gutenbergs nya tryckpressar fick en oerhörd betydelse för att riktigt väcka matematiken ur dess månghundraåriga törnrosasömn.

Luca Pacioli gav år 1494 ut en av de allra första tryckta matematikböckerna — fast *inte* på latin utan på den toskanska dialekt som ligger till grund för dagens italienska språk!

Federico Commandini i bl a Urbino översatte på ett föredömligt sätt många klassiska grekiska verk till latin på femtonhundratalet.

Nicolaus Copernicus, *De revolutionibus orbium coelestium*, Om himlakropparnas kretslopp, 1543.

Gerolamo Cardano, *Artis magnae, sive de regulis algebraicis* (oftast sätter man de två första orden i nominativ och kallar verket *Ars magna*), Den stora konsten, eller (om) de algebraiska reglerna, 1545.

Cardano, *Liber de ludo aleae*, En bok om tärningsspel, eller En bok om slumpspel, circa 1564.

Inspirerad av Cardanos *Ars magna* skrev Rafael Bombelli ett verk på italienska.

Tycho Brahe, *De nova et nullius ævi memoria prius visa Stella*, Om en ny och aldrig förut skådad stjärna, 1573;

Astronomiae Instauratae Mechanica, Den nyare astronomiska instrumentläran, 1598, med den stolta färglagda bilden *QVANDRANS MVRALIS SIVE TICHONICVS* av den stora "Muralkvadranten eller den tychoniska".

Den tyske (och danske) matematikern Thomas Finck införde termerna tangens och secans i sin bok *Geometriae rotundi libri XIV*, Basel 1583.

Ingenjören Simon Stevin skrev år 1585 om decimaltal på nederländska.

Så sent som år 1591 lever ordet *isagoge* kvar (egentligen eisagoge, introduktion, av grekiska eis- in och ago jag för, leder, jämför ped-agog, egentligen paidagogos, en som för/leder barn). Det används i titeln *In artem analyticem isagoge*, Introduktion till den analytiska konsten, av den store franske matematikern François Viéte, som (äntligen!) införde enkel bokstavsräkning.

John Napier, *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio*, 1614. Ordet mirifici har översatts som undergörande, förvånande, underbar; *Mirifici Logarithmorum Canonis constructio*, 1619.

Johannes Kepler har många roliga titlar på latin:

Mysterium Cosmographicum, 1596;

Astronomia Nova, 1609;

Nova stereometria doliorum vinariorum, Ny rymdgeometri för vintunnor, 1615;

Epitome Astronomiae Copernicanae, 1618. Epitome betyder sammandrag, sammanfattning, egentligen nedskuren, av grekiska tomein skära, snitta.

Harmonices mundi, Världarnas harmoni, 1619.

Galileo Galilei skriver sina verk på italienska.

Ingenjören Albert Girard skrev på franska.

Filiosofen och matematikern René Descartes skrev på franska.

Pierre de Fermat, *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, essä 1637; *Ad locos planos et solidos isagoge*, Introduktion till plana och solida kurvor, manuskript 1637. Med solida kurvor avsågs länge kurvor, vilka definierats som ett plant snitt av en kropp såsom t ex kägelsnitten.

Jan de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1646.

John Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1655.

Blaise Pascal skrev på franska.

Christiaan Huygens, *De ratiociniis in aleae ludo*, Om räkning vid tärningsspel, 1657; *Horologium oscillatorium sive de motu pendularium*, 1673.

Nicolaus Mercator, *Logarithmotechnica*, 1668.

James Gregory, *Geometriae pars universalis* (The universal part of geometry), 1668.

Isaac Barrow, *Lectiones geometricae*, 1670.

Isaac Newton skrev både på engelska och på latin.
De analysi per aequationes numero terminorum infinitas, manus 1669, publ. 1711.
Tractatus de methodis serierum et fluxionum, 1671.
De motu corporum in gyrum, Om kroppars rörelse i en bana, 1684.
Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica, oftast kallad *Principia*, 1687.
Arithmetica Universalis (egentligen algebra), 1707.

Gottfried Wilhelm Leibniz
Nova methodus pro maximis et minimis, 1684. Den allra första publicerade texten om den nya kalkylen.
Historia et origo calculi differentialis, 1714.

L'Hospital skrev på franska.
Jakob Bernoulli, *Ars conjectandi* (The art of conjecturing), publ. postumt 1713.
Daniel Bernoulli, *Hydrodynamica*, 1738.

Leonard Euler skrev hela tiden oförtröttligt, mest på latin, men även på franska och tyska.
Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti, 1744.
Introductio in analysin infinitorum, två band, 1748.
Institutiones calculi differentialis, två band, 1755.
Institutiones calculi integralis, tre band, 1768–1770.

Jean-Baptiste le Rond D'alembert skrev på franska.
Giuseppe Luigi Lagrangia alias Joseph-Louis Lagrange skrev mest på franska.
Pierre-Simon de Laplace skrev på franska.
Adrien-Marie Legendre skrev på franska.

Carl Friedrich Gauss skrev en del på tyska, men mest på latin!
Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, (om algebrans fundamentalsats), 1799.
Disquisitiones Arithmeticae, Aritmetiska undersökningar, 1801.
Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Teori för himmelskropparnas rörelser, som går runt solen längs kägelsnitt, 1809.
Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae (Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Kombination der Beobachtungen), 1823.
Theoria residuorum biquadratorum, 1825–1832.
Disquisitiones generales circa superficies curvas, Allmänna undersökningar över krökta ytor, 1827.
Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, 1832.

Matematikens tredje *lingua franca* var otvivelaktigt latin. Vissa klassiska termer är översättningslån från grekiska såsom triangel, rektangel, cirkel.

En del termer är helt enkelt tagna från klassiskt latin men har givits en ny utökad betydelse, såsom limes.

Många lyckade termer är bildade på latin men långt efter romarnas tid. GWL bildade av ordet ordinata (jfr ovan) ordet co-ordinata, som blev vår koordinat. Lagranges franska ord la dérivée blev på latin derivata. Exakt detta ord används dock inte på så hemskt många olika europeiska språk, som vi gärna vill föreställa oss!

De matematiska termerna som översatts från arabiska verkar vara obegripligt få.

Vissa mindre lyckade termer låter fina på latin men har egentligen en helt annan betydelse. Ett iögonfallande exempel är termen integral, som egentligen betyder orörd (icke tangerad) såsom i det engelska ordet integer (ett "orört" tal, ett icke tangerat tal, dvs icke anfrätt av division, ett heltal). Jfr latinets Noli me tangere! (Rör mig icke!) Leibniz' integral är ju (från början) "ihopsatt" av ett oräkneligt antal små ("infinitesimala") differentialer, ihopbakad av delbara, små ingredienser, som först i "bakugnen" blev "ett helt", som en väl gräddad tegelsten. Ordet integral har en bismak av monolit, vilket är fullständigt emot dess väsen!

René Descartes kunde inte läsas i original på franska av många samtida matematiker. Först i Frans van Schootens latinska översättning kunde hans verk (postumt!) nå några av de mest inflytelserika läsarna.

Leonhard Euler skrev matematik med ytterst vacker handstil på både franska och latin.

Gauss kan kanske räknas som den "siste klassicisten". Så sent som år 1832 publicerade han arbeten på latin. För eftervärlden framstår det som smått otroligt.

Men latin var inte ohotat som lingua franca under särskilt lång tid, dess tid som "hegemoniskt" språk kanske var ett halvt årtusende. Vi har sett hur en del redan före Descartes "fronderade" mot latinets upphöjda position. Isaac Newton skrev sin "Opticks" på engelska.

Långt före Gauss' död hade "fördämningarna" helt brustit och matematiken vällde fram på de stora europeiska kulturspråken.

Då Gösta Mittag-Leffler grundade sin framgångsrika tidskrift "Acta Mathematica" år 1882 efter det tysk-franska kriget var dess officiella språk (titeln till trots) tyska OCH franska. Först efter år 1945 blev engelskan gradvis det mest spridda språket för ny matematik. Tyvärr nybildas matematiska termer numera ofta av människor som är helt obevandrade i latin och grekiska; de blir därför ofta mindre lyckade.

* * *

Alla dessa europeiska matematiker ovan, som skrev på latin — ingen skulle någonsin komma på tanken att kalla dem "latinska matematiker". Epoken kan väl inte få någon annan rubrik än "Matematik på latin" eller "(Europeisk) matematik (på latin)".

Kan vi på liknande sätt säga "(islamisk) matematik (på arabiska)", "(orientalisk) matematik (på arabiska)" eller “hellenistisk matematik (på grekiska)”?

Ett konsekvent sätt att benämna dessa tre epoker verkar vara svårt att finna —

den hellenistiska eran/epoken ,

den arabiska eran/epoken ,

den latinska eran/epoken ?

Coda. Som avslutning vill jag framhålla en av de sista stora matematikerna som behärskade många av matematikens grenar men även respekterade de klassiska språken. Mot slutet av 1940-talet sökte han en ny term för att beskriva matematiska strukturer som hade mycket gemensamt med komplexa tal. Han översatte då

com-plex-us från latin till grekiska och ersatte latinets com med grekiskans sym och comlex-med komplekt- : Hermann Weyl gav oss den underfundiga termen

symplektisk, kalkerad på komplex. Tänk om alla framtida namngivare vore lika bildade!

Lokala nyheter

Göteborg

Nyanställda:

Damiano Ognissanti tekniklektor
Thomas Bäckdahl lektor
Caihua Luo, postdoc

Nya doktorander:

Svenja Braam, Filip Wikman

Befordran:

Philip Gerlee docent

Disputationer:

Matematisk statistik

Sebastian Jobjörnsson

On the Optimisation and Regulation of Clinical Trials

Ivar Simonsson

Exact inference in Bayesian networks and applications in forensic statistics

Linköping

Nya doktorander/forskarstuderande: Nya doktorander:

Stefane Saize
Axel Tiger Norkvist

Doktorsavhandlingar:

Budor Shuaib *matematik*
"Ghostpeakons"

Nyanställningar:

Andrew Winters biträdande lektor (vid avdelningen beräkningsmatematik från 1 maj)

Lund

Nyanställningar:

Mikael Nilsson universitetslektor.

Mälardalens högskola

Nyanställningar:

Rita Pimentel lektor.

Stockholm

Hedersdoktor:

Sergio Albeverio (Bonn) (18.09.28)

Jubileumsdoktor:

Jan Boman (18.09.28)

Nya lektorer: (19.01.01)

Sven Raum
Sofia Tirabassi

Nya biträdande lektorer: (19.01.01)

Josefin Ahlkrona

Nya Postdok:

Guillaume Brunerie, Johan Konter, Corentin Lena, Dale Frymark

Nya PhD:

Daniel Ahlsén, Menno de Boer, Erik Lindell

Doktorsavhandlingar:

Gleb Nenashev (18.05.25)
Rune Suhr(18.05.31)
Stefano Marseglia (18.06.08)
Iara Goncalves (18.06.14)
Gabriele Balletti (18.10.22)
Jacopo Emmenegger (19.01.18)
Mitja Nedic (19.01.25)

Licavhandlingar:

Bashar Saleh (18.11.02)

Nyanställningar

Mikael Svanberg bibliotikarie (18.12.01)

Umeå

Doktorsavhandlingar:

Jonas Wickman

Evolution of ecological communities in spatially heterogeneous environments.

Konferenser: Probabilistic Midwinter meeting, 16-17 januari

Remember Maryam Mirzakhani

Matematikcentrum i Lund kommer att delta i May 12-initiativet, (se May12) med utställningen **Remember Maryam Mirzakhani exhibition**, vilken tidigare har visats vid $(WM)^2$, världsmötet för kvinnor i matematiken, och som även hölls öppen under ICM 2018. Utställningen kommer att pågå mellan 13 och 17 maj, och det blir föreläsningar och andra evenemang under tiden utställningen har öppet. All information om detta finns eller kommer att finnas på hemsidan Women

KALENDARIUM

(Till denna sida uppmanas alla, speciellt lokalombuden, att inlämna information)

Göran Gustafson Symposiet, KTH 12-14 juni

Författare i detta nummer

Michael Benedicks Dynamiker. Professor e.m. vid KTH och Uppsala

Gudrun Brattström Talteoretiker och statistiker vid Stockholms universitet.

Christian Jensen Dansk algebraiker. Har arbetat med invers Galoisteoriprof. emvid Köpenhamns universitet.

Pavel Kurasov Professor vid Stockholms universitet. Kvantmatematiker.

Lars Lönnroth Professor e.m. i litteraturhistoria vid Göteborgs universitet. Specialist på isländska sagor. Kollega med Gert Almkvist vid Berkeley.

Peter Sjögren Professor em vid Göteborgs universitet.Specialist i harmonisk analys.

Wulf Staubach Tysk analytiker vid Uppsala universitet.

Torbjörn Tambour Algebraiker och lektor vid Stockhoms universitet.Student till Gert Almkvist.

Innehållsförteckning

Notiser