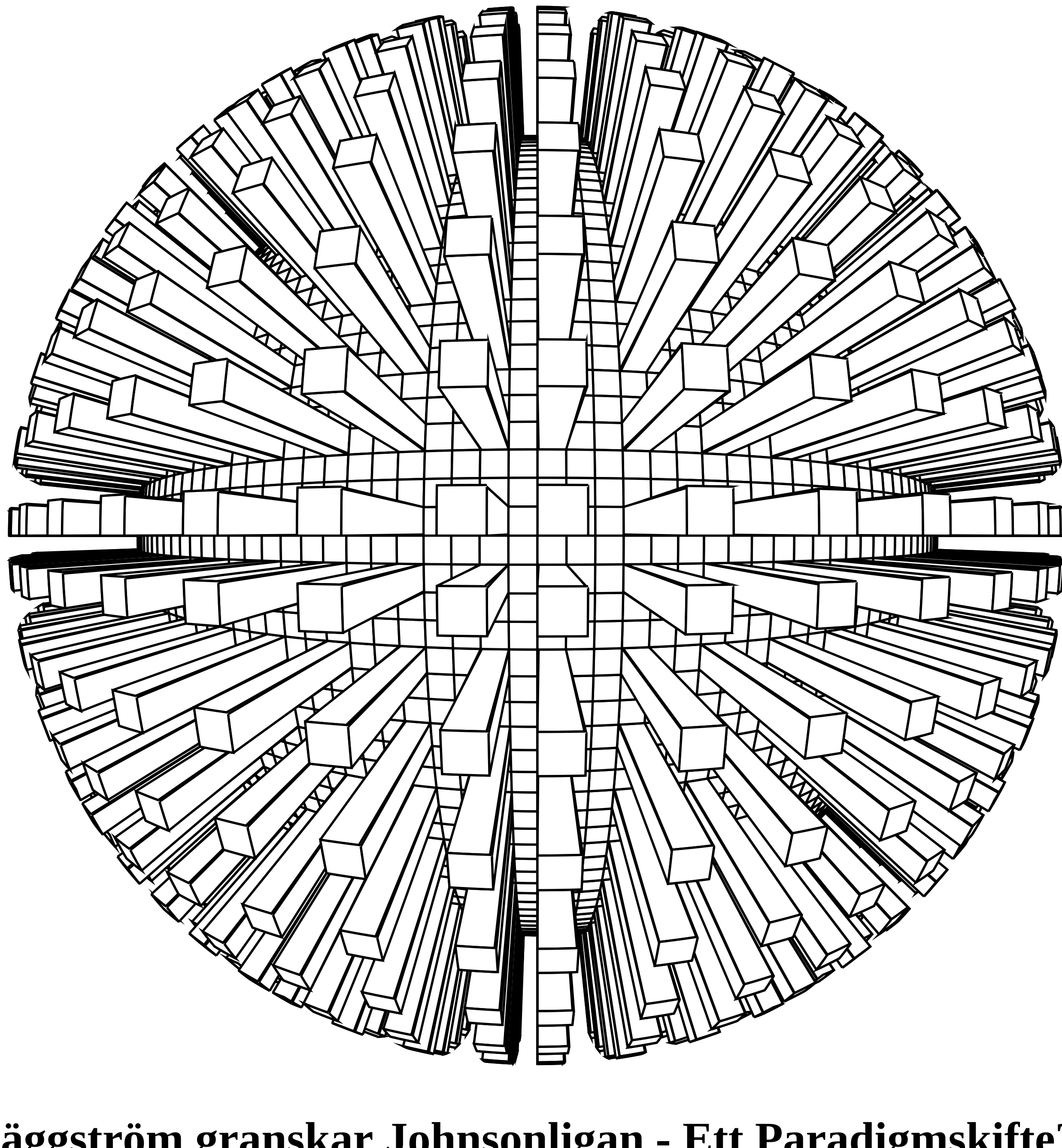
Svenska Matematikersamfundet

MEDLEMSUTSKICKET

15 maj 2004

Redaktör: Ulf Persson
Ansvarig utgivare: Sten Kaijser



Häggström granskar Johnsonligan - Ett Paradigmskifte?

Femton Punkter för Köpenhamn: *Barbro Grevholm*

Atiyah-Singer: *Torsten Ekedahl*

Sovjetiska matematikskolor: *Boris Shapiro*

Borcea och Shimorin - Nya Wallenbergare: *Ralf Fröberg och Håkan Hedenmalm*

Hög tid att satsa på matematik: *Said Irandoust*

Sigma, Dover och Boole: *Torgny Lindvall*

Språk och matematik: *Håkan Lennerstad*

Hilbert och Karlqvist: *Persson och Svensson*

Program för årsmötet

Innehållsförteckning

Notiser

Detta Nummer

Årets Abelpris har tilldelats Sir Michael Atiyah samt Isidore Singer, tillsammanlänkade av Atiyah-Singers indexteorem. Det delade priset kommer att delas ut av den norske kungen Harold den 25 maj i Olso universitetets aula. Atiyah bör vara välkänd för de flesta matematiker, synlig som han varit i många sammanhang under en drygt halvsekellång karriär. Singers profil däremot är något lägre. Torsten Ekedahl har gjort ett försök till en populärmatematisk framställning av just Atiyah-Singers indexteorem.

Vidare skall vi inte i sammanhanget glömma samfundets eget Wallenbergspris, som denna gång delas mellan Julius Borcea och Serguei Shimorin. Båda presenteras kortfattat. De kommer att mottaga sina pris ur vår ordförande Kaijsers hand den 4 juni i Lund. Det fullständiga programmet för årsmötet presenteras längre fram i utskicket.

Matematikdelegationen skall avge sitt betänkande i dagarna. I förra numret presenterade samfundets egen delegationskommitté sina förslag till matematikdelegationen. Samfundets ordförande kände sig också manad att skriva till Said Irandoust et al, och detta brev, liksom matematikdelegationens formella svar på de bägge, presenteras nu av respektive ordförande.

I sommar skall en stor kongress – 4ECM, gå av stapeln i Stockholm, vilket inte bör ha undgått utskickets läsare. Tyvärr måste det konstateras att intresset utanför Storstockholmsregionen för denna tilldragelse har varit mycket svalt. T.ex. har i skrivandes stund endast tre medlemmar[1] från sveriges största matematiska institution registrerat sig. Detta är beklagligt. Skärpning? Ett program för kongressen bifogas i utskicket. Veckan efter den stora kongressen äger den stora matematikdidaktiska kongressen rum i København. Barbro Grevholm anger femton skäl att fara dit.

Olle Häggström granskar det nya matematikparadigmet, som det presenteras av Claes Johnson och hans gäng. Reaktioner på detta emotses med nyfikenhet.

Slutligen vill jag tacka min korridorsgranne Mats Andersson. Han har erbjudit sig att vara utskickets korrekturläsare och har med bravur i och med detta nummer genomfört sitt uppdrag. Det må betonas att han har väsentligen begränsat sitt uppdrag till att gälla formalia. D.v.s. stavfel, 'typos', syftningar, och endast i undantagsfall ingripit språkligtstilistiskt. Det må vara onödigt att påpeka att han avskriver sig allt ansvar för innehållet, detta ansvar är helt och hållet, åtminstone i juridisk mening, den ansvarige utgivarens.

Göteborg den 11 maj, 2004

Ulf Persson
Redaktör

[1] Detta inkluderar undertecknad, i sin egenskap av medlem av organisationskommittén

Årets Abelpris delas mellan Michael Atiyah och Isadore Singer. Motiveringen för detta pris bör vara uppenbar för många matematiker, oberoende av specialitet, nämligen Atiyah-Singers indexsats.

Michael F.Atiyah

Atiyah föddes 1929 i London. Sin barndom tillbringade han i för en matematiker exotiska Khartoum. Hans akademiska studier fram till sin doktorsexamen 1955 ägde rum vid Trinity College, Cambridge. Under större delen av sin karriär har han förknippats med Oxford, där han blev reader 1961 och professor 1963. För cirka femton år sedan flyttade han till Cambridge, och är numera hedersprofessor vid the University of Edinburgh. Han har även verkat som professor vid Institute for Advanced Study 69-72.

Atiyah är medlem av ett antal prestigefyllda sällskap. Han invaldes såsom Fellow of the Royal Society redan 1962 och tjänstgjorde som dess ordförande under tiden 1990-95. Dessförinnan tjänstgjorde han under två år (74-76) som ordförande för London Mathematical Society. Vidare har han varit en drivande kraft bakom Newton Institutet och verkade som dess förste föreståndare. Han har även engagerat sig för bildandet av the European Mathematical Society. Dessutom har han också varit ordförande för Pugwash Conferences on Science and World Affairs.

Han har emottagit ett antal pris, varav Fieldsmedaljen i Moskva 1966 bör anses som det främsta, och erhållit hedersdoktorat vid ett antal europeiska universitet. Han adlades 1983.

Atiyahs huvudsakliga intresse har varit inom algebraisk geometri och topologi (hans första papper, publicerat 1952, hade titeln 'A note on the tangents of a twisted cubic'), och är känd förutom för sina arbeten inom indexteorin för utvecklandet av K-teorin. På senare år har han engagerat sig i matematisk fysik, speciellt gaugeteori. För min generation innebar boken 'Atiyah-MacDonald' det första mötet med pristagaren.

Isadore M.Singer

Singer föddes 1924 i Detroit. Studerade vid University of Michigan, där han avlade sin grundläggande examen 1944. Han doktorerade vid Chicago Univeristy 1950, och fick därefter anställning vid Massachusetts Institute of Technology, som han har varit trogen, med kortare avbrott, genom hela sin karriär. Han innehar nu en 'Institute Professorship' vid denna institution.

Han är medlem av ett antal lärda sällskap, varav kan nämnas 'the American Academy of Arts and Sciences' och 'National Academy of Sciences'. Han har haft styrelseuppdrag för 'the National Research Council' och 'the White House Science council'. Vidare innehade han positionen som vice ordförande för AMS 1970-72.

Han har vidare emottagit ett antal priser och utmärkelser, av vilka många utdelats av AMS (bland annat 'the Steele Prize' och 'the Bochner Prize'). 1983 erhöll han även the National Medal of Science.

Hans matematiska forskningsintresse har varit inom analys, och han har under årens lopp haft en avsevärd mängd av doktorandstudenter

Atiyah-Singers indexsats - matematisk bakgrund

- *Torsten Ekedahl* -

Detta är en lite mer ingående beskrivning av Atiyah-Singers indexsats avsedd att utgöra ett komplement till en mer översiktlig behandling

Index och variationer av parametrar:

Vi börjar med att titta på problemet med att lösa differentialekvationen $y' = 0$ på intervallet $[0,1]$ och med periodiska randvillkor dvs $y(0) = y(1)$. Det är klart att de enda lösningarna är de konstanta funktionerna så att lösningsrummet är 1-dimensionellt. Om vi å andra sidan betraktar den inhomogena ekvationen $y' = f$ (fortfarande med periodiska randvillkor) så har vi

$$0 = y(1) - y(0) = \int_0^1 f(t)\,dt$$

så att vi har ett linjärt villkor på f för att ekvationen ska ha en lösning. Om detta villkor är uppfyllt så får vi en lösning genom

$$y(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Vi har alltså ett lösningsrum till den homogena ekvationen av dimension 1 och rummet av linjära villkor på f är också 1. Index, som är skillnaden mellan dessa dimensioner, är alltså $1 - 1 = 0$. Vi kan göra en enkel modifikation av ekvationen så att den istället blir $y' - \lambda y = 0$ (med samma randvillkor) där λ är ett reellt tal skilt från 0. Lösningarna, utan randvillkor, till denna ekvation är alla på formen $ke^{\lambda x}$, där k är en konstant, och för att randvillkoret ska vara uppfyllt måste vi ha $k = 0$, d.v.s dimensionen av lösningsrummet är 0. Om vi istället försöker lösa den inhomogena ekvationen $y' - \lambda y = f$ så ser vi att alla lösningar (utan randvillkor) är på formen

$$y(x) = e^{\lambda x}\left(\int_0^x e^{-\lambda t} f(t)\,dt + k\right)$$

och villkoret $y(0) = y(1)$ ger att

$$k = e^{\lambda}/(1 - e^{\lambda})\int_0^1 e^{-\lambda t} f(t)\,dt$$

vilket visar att man alltid kan finna en lösning. Även denna gång blir alltså index lika med $0 - 0 = 0$ fast termerna i subtraktionen inte är desamma som tidigare. Detta är ett exempel på hur index är oberoende av detaljer, här är det mer precist fråga om att index är en kontinuerlig funktion av parametern λ, men då index alltid är ett heltal så är den konstant på ett intervall. Termerna i subtraktionen är å andra sidan inte kontinuerliga; de hoppar från 0 till 1 när λ går mot 0.

Riemann-Rochs formel:

Den ursprungliga Riemann-Rochformeln handlar om holomorfa funktioner på en kompakt Riemannyta. På grund av kompaktheten och maximumprincipen för holomorfa funktioner är de enda holomorfa funktionerna på ytan de konstanta funktionerna (vi antar att ytan är sammanhängande). Nu är de holomorfa funktionerna lösningarna till Cauchy-Riemanns ekvationer så 1 är den vänstra termen i index. Den högra är maximala antalet linjärt oberoende villkor för att den inhomogena Cauchy-Riemannekvationen ska ha en lösning. Det är viktigt att här vara medveten om att $\overline{\partial} f$ för f en funktion inte ska betraktas som en funktion eftersom en sådan framställning beror på valet av koordinater. Istället är den en $(0,1)$-form, ett uttryck som lokalt har formen $f(z)d\overline{z}$. I Riemanns och Rochs version framträdde dock inte denna andra term i index som just antalet oberoende lösningar till den inhomogena ekvationen utan som antalet oberoende holomorfa 1-former, uttryck som lokalt är på formen $f(z)dz$ där f är en holomorf funktion. Sambandet med den inhomogena ekvationen är följande: Om ω är en holomorf 1-form och $\overline{\partial} u = \eta$ är en lösning till den inhomogena Cauchy-Riemannekvationen så kan vi multiplicera med ω och integrera samt använda Stokes sats och formen är holomorf vilket ger, om X är Riemannytan,

$$0 = \int_X \overline{\partial}(u\omega) = \int_X \overline{\partial} u \wedge \omega \int_X \eta \wedge \omega$$

och således ger varje 1-form ett linjär villkor på η för att den ska kunna vara högerledet i den inhomogena Cauchy-Riemannekvationen. Det är lätt att se att endast ett ω som är identiskt noll ger det triviala linjära villkoret och något svårare att se att alla linjära former fås på denna form. Tillsammans ger detta att maximala antalet linjärt oberoende villkor är lika med dimensionen av rummet av holomorfa 1-former och det var så Riemann-Rochs sats ursprungligen formulerades. Den fullständiga Riemann-Rochformeln (fortfarande för Riemannytor) är mer allmän. Den ersätter holomorfa funktioner med holomorfa funktioner av ett holomorft linjeknippe. Dessa kan också beskrivas som meromorfa funktioner med högst ett antal specificerade poler och ett antal ålagda nollställen. Holomorfa 1-former ersätts med holomorfa 1-former med värden i det duala linjeknippet (alternativt meromorfa 1-former med tillåtna poler och ålagda nollställen). Nästa generalisering av Riemann-Rochs sats var att se Riemannytor som 1-dimensionella komplexa mångfalder och gå vidare till 2-dimensionella sådana, komplexa *ytor*. I detta fall går $\overline{\partial}$-operatorn fortfarande från funktioner till $(0,1)$-former men det finns en skillnad. Det finns ett mycket kraftigt villkor på $(0,1)$-former för att de ska ha en chans att vara på formen $\overline{\partial} f$. Vi har nämligen en $\overline{\partial}$-operator som går från $(0,1)$-former till $(0,2)$-former och vi har relationen

$$\overline{\partial}\,\overline{\partial} f = 0.$$

Detta betyder vi bara ska försöka lösa ekvationen $\overline{\partial} f = \eta$ om villkoret $\overline{\partial}\eta = 0$ redan är uppfyllt. Detta leder oss till att införa delrummet av 1-former, dvs de som uppfyller $\overline{\partial}\eta = 0$ och sedan se hur många oberoende ytterligare villkor det behövs för att denna inhomogena ekvation ska ha en lösning dvs att formen inte bara är sluten utan också *exakt*. Vi måste sedan dessutom ta hänsyn till att det finns ytterligare en inhomogen ekvation, nämligen den där högerledet är en $(0,2)$-form och argumentet en $(0,1)$-form.

Det visar sig att den rätta definitionen av index i detta fall är: Dimensionen av de slutna (dvs holomorfa) funktionerna *minus* dimensionen av de slutna $(0, 1)$-formerna modulo de exakta *plus* dimensionen av alla $(0, 2)$-former modulo de som är exakta. Precis som i fallet med Riemannytor så kan vi modifiera detta uttryck genom att introducera ett holomorft linjeknippe. Riemann-Rochs sats säger då att det finns en speciell reell 4-form på den komplexa ytan vars integral över (den kompakta) ytan är lika med index. Formen själv beror på ytterligare val som en metrik på ytan men två sådana former associerade till olika sådana val skiljer sig på en form av typen $d\omega$, återigen kallad för en exakt form (denna gång en $exakt3 - form$) för en 3-form ω och enligt Stokes sats är därmed deras integraler lika. Denna sats är användbar därför att integralen är (relativt) lätt att beräkna. Oftast kan man istället för att direkt manipulera med integralen arbeta med formen modulo exakta 3-former, en klass som uppvisar de "rätta" egenskaperna att endast bero på relativt "grova" egenskaper hos problemet.

Fredholms integralekvationer:

Fredholms teori för integralekvationer och framför allt Hilberts abstrahering får anses vara början på området funktionalanalys. Fredholms argument sammanfattades i det begrepp som idag kallas för Fredholmoperatorer. Den viktiga egenskapen hos index för dessa är att index är en kontinuerlig funktion av operatorn. Detta ger till exempel ganska omedelbart att index för $y' - \lambda y$ är en kontinuerlig funktion av λ.

Hirzebruch och Grothendieck:

Med utgångspunkt från de kända fallen lade Todd fram en förmodan som uttryckte index för Cauchy-Riemannekvationen (för den "vanliga" ekvationen utan extradata som ett holomorft linjeknippe) som en integral av en specifik differentialform. (För att vara mer precis formulerades denna förmodan för s.k. karakteristiska klasser; dessa kan – men behöver inte – beskrivas i termer av differentialformer). Det var Hirzebruch som bevisade denna formel tillsammans med en allmän Riemann-Roch formel. Beviset är mycket innovativt samtidigt som det är något indirekt. Hirzebruch visar först en formel liknande Todds men som involverar en annan karakteristisk klass och det s.k. indexet för den komplexa mångfalden som en reell mångfald ("index" i detta sammanhang har historiskt inget att göra med användningen av "index" för differentialoperatorer, det kan dock uttryckas som index för en lämplig differentialoperator). Den viktiga egenskapen hos detta index var att det beror på väldigt grova egenskaper hos mångfalden; det är en så kallad kobordisminvariant. Han kunde sedan använda sig av resultat av Thom och Milnor om kobordism för att visa sin formel för index. Med hjälp av sk Hodgeteori kunde han sedan i fallet en komplex mångfald tolka denna formel som att den bevisade hans Riemann-Rochformel i ett speciellt fall. Genom att detta specialfall var sant för alla komplexa mångfalder kunde han med en elegant induktion över dimensionen bevisa sin formel (för s.k. projektiva mångfalder). Grothendiecks metod var ganska annorlunda. Den första skillnaden, som inte är väsentlig, är att hans resultat var rent algebraiskt. Mer betydelsefullt är att han började med att generalisera Riemann-Rochformeln till en relativ Riemann-Rochformel. Detta betyder att han studerade en avbildning $X \to Y$ mellan mångfalder istället för en individuell mångfald. För en sådan avbildning och ett linjeknippe (eller mer allmänna s.k.

koherenta kärvar) på X definierar han en sorts index för linjeknippet och avbildningen som är ett lämpligt objekt relaterat till Y. Om Y är en enda punkt är detta objekt ett heltal och är det tidigare indexet. För detta objekt formulerar han en Riemann-Rochformel som blir Hirzebruchs formel när Y är en punkt. Denna konstruktion har egenskapen att om den generaliserade Riemann-Rochformeln är sann för en avbildning $X \to Y$ och också sann för en avbildning $Y \to Z$ så är den också sann för deras sammansättning. För att visa Riemann-Rochs formel så faktoriserar han han avbildning från X till en punkt som sammansättningen av en inbäddning av X i ett projektivt rum (som existerar då X antas vara projektiv) och avbildningen från det projektiva rummet till en punkt. Sedan bevisar han formeln för dessa två avbildningar. För en inbäddning använder han sig av metoden att göra en s.k. uppblåsning av X till att reducera till fallet när X är en hyperyta i vilket fall man kan verifiera formeln mer eller mindre för hand. För avbildningen från ett projektivt rum till en punkt reducerar han även där till en uträkning som kan göras explicit. Bortsett från att Grothendieck gav ett bevis för Hirzebruchs Riemann-Rochformel som var helt annorlunda (och fungerade i en rent algebraisk situation) så är även den relativa Riemann-Rochformeln mycket betydelsefull med många olika användningar.

Atiyah-Singers indexsats:

Atiyah-Singers indexsats ger en formel av samma typ som Riemann-Rochformeln för en mycket generell typ av differentialoperator. När vi bara rör oss med funktioner är en differentialoperator en $\mathbf{R}$-linjär avbildning från glatta funktioner på mångfalden till glatta funktioner sådan att den på funktioner med stöd i en koordinatomgivning till en punkt har formen

$$\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha(x_1,\ldots,x_n)(\partial^\alpha f)/(\partial x^\alpha)$$

där vi använder multi-indexnotation $\alpha=(k_1,...,k_n)$ med $|\alpha|=k_1+...+k_n$. Symbolen till en sådan operator är funktionen

$$\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha(x_1,\ldots,x_n)\xi^\alpha$$

där $\xi_1,...,\xi_n$ är en ny uppsättning variabler. Operatorn säges vara elliptisk om symbolen är skild från 0 för alla x och alla $\xi\neq 0$. Ett exempel på en elliptisk operator är Laplace-operatorn

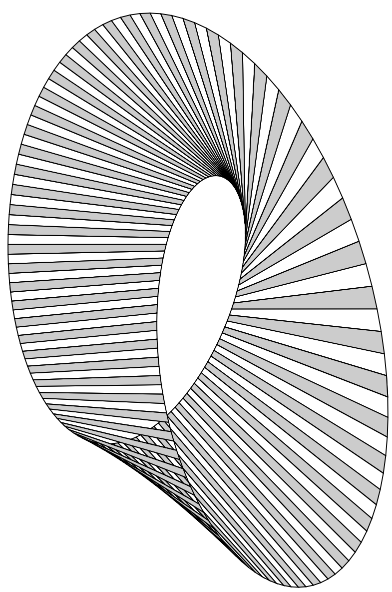
$$(\partial^2)/(\partial x_1^2)+\cdots+(\partial^2)/(\partial x_n^2)$$

vars symbol är

$$\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2$$

som uppenbarligen är $\neq 0$ för alla $\xi\neq 0$. För tillämpningar behöver man generalisera detta lite. För det först vill vi tillåta operatorer som verkar på k-tupler av funktioner och a_α:na såväl som symbolen blir då $k\times k$-matriser. Villkoret för ellipticitet är då att symbolen är inverterbar för alla $\xi \neq 0$, alternativt att dess determinant är skild från 0 för alla $\xi \neq 0$. För det andra vill vi tillåta situationer som bara lokalt kan beskrivas med hjälp av k-tupler av funktioner. Detta leder till begreppet vektorknippe, där k-tupler av funktioner ersätts av sektioner av vektorknippet. För varje punkt kommer det att finnas en omgivning sådan att sektioner med stöd i omgivningen svarar mot k-tupler av funktioner. På överlappande sådana omgivningar kommer inte nödvändigtvis dessa identifikationer med k-tupler att vara de samma för de två omgivningarna utan de två identifikationerna k-tupler kommer att ges av en kontinuerlig funktion från snittet mellan de två omgivningarna till inverterbara $k \times k$-matriser. Ett exempel på en sådan är Diracoperatorn för vilken $k = 2$ i dess ursprungliga definition. Ett exempel är $k = 1$ och mångfalden en cirkel. På cirkeln minus en punkt identifierar vi sektioner med funktioner och i en omgivning till denna punkt gör vi också en sådan identifikation. På snittet mellan dessa öppna delmängder, som är en punkterad omgivning till punkten så identifierar vi en sektion med stöd i denna på två sätt med funktioner på mängden. Vi kräver att dessa två identifikationer skiljer sig genom multiplikation med -1.

Ett annat sätt att se på detta är att betrakta $[0,1] \times \mathbf{R}$ och samtidigt som vi konstruerar cirkeln från $[0,1]$ genom att identifiera 0 och 1 så identifierar vi $(0,x)$ med $(1,-x)$. Detta ger oss ett topologiskt rum V och en avbildning $\pi : V \to S^1$ given av att den tar (r,x) till r. Sektioner till denna identifieras då med kontinuerliga avbildningar $S^1 \to V$ vars sammansättning med π är identitetsavbildningen på S^1. Om vi inskränker oss till att betrakta bilden av $[0,1] \times [-1,1] \subset [0,1] \times \mathbf{R}$ så får vi ett Möbiusband:



Mer generella exempel på vektorknippen är tangentknippet som består av tangentvektorer till mångfalden och vektorknippet av k-former. Mer sofistikerade exempel är de s.k. spinnknippena som dyker upp vid definitionen av Diracoperatorn. Den allmänna definitionen av ett vektorknippe över en mångfald X är (med några detaljer överhoppade) en annan mångfald Y tillsammans med en avbildning $Y \to X$ sådan att varje fiber (dvs inversa bilden av en punkt) ett ändligtdimensionellt vektorrum (reellt eller komplext) och sådant att det för varje punkt finns k kontinuerliga sektioner som bildar en bas i alla inversa bilder av punkter i en omgivning till punkten. Mängden av sektioner blir då ett (komplext eller reellt) vektorrum genom punktvis addition och multiplikation med skalärer. Existensen av sektioner som bildar en bas i alla punkter i en omgivning till en punkt gör att definitionen av differentialoperator är klar; när den appliceras på en sådan bas så har den formen ovan där a_α:na är en matris som uttrycker värdet på ett baselement som en linjärkombination av baselementen. Som vi har formulerat det hitintills så beror symbolen av en differentialoperator på valet av koordinater eftersom ξ:na transformeras vid ett koordinatbyte. Den koordinatfria beskrivningen är att ξ:na ska ses som funktioner på kotangentknippet och symbolen av en differentialoperator från funktioner till funktioner blir då en funktion på kotangentknippet. För en mer generell differentialoperator blir symbolen en linjär avbildning mellan vektorknippen över kotangentknippet. En linjär avbildning mellan vektorknippen $E \to X$ och $F \to X$ över en mångfald X är en kontinuerlig funktion $f : E \to F$ som avbildar fibern till E över en punkt på X till fibern till F över samma punkt och som är en linjär avbildning mellan dessa fibrer. Att differentialoperatorn är elliptisk kan då formuleras som att dess symbol är en linjär isomorfi utanför nollsektionen av kotangentknippet. (Nollsektionen består här av alla par (x, v) där x är en punkt på X och v är nollkotangentvektorn i x.)

Analytiska och topologiska index:

Symbolen kan alltså ses som bestående av två vektorknippen över kotangentrummet och en isomorfi mellan dessa utanför nollsektionen. Detta är ett rent topologiskt begrepp och man definierar den s.k. K-gruppen som väsentligen består av formella skillnader mellan sådan objekt. Atiyah och Singer definierade det s.k. topologiska indexet till ett sådant element vilket liksom index för en operator är ett heltal. Sedan visade de att varje element i denna K-grupp uppkommer som symbolen av en operator. (En liten men inte obetydlig teknisk detalj är att differentialoperatorer inte räcker för att detta ska vara sant; man måste lägga till även s.k. pseudodifferentialoperatorer.) Index av denna operator visas sedan bara bero på symbolen. Detta visas genom att man visar att två operatorer med samma symbol kan kontinuerligt deformeras till varandra och index av en operator är som vi har sett konstant under sådan deformationer. Vi har därför ett väldefinierat analytiskt index av ett element i K-gruppen. Med dessa begrepp kan Atiyah-Singers indexsats formuleras som att det topologiska index är lika med det analytiska. Styrkan i resultatet ligger i att symbolen för det första normalt är enkel att beräkna och att det topologiska index också normalt är lätt att beräkna.

Julius Borcea

- *Ralf Fröberg* -

Julius Borcea föddes i Bacau, Rumänien 1968. Efter studentexamen i Köpenhamn 1987 gjorde han sin grundutbildning i Paris och Lund. Han startade sin forskarutbildning i Lund 1994 med Arne Meurman som handledare och tog sin doktorsexamen där 1998. Efter ett halvår på Mittag-Lefflerinstitutet var han i Strasbourg som post-doc i två år. Sedan hösten 2001 är han forskarassistent vid Stockholms universitet.

Julius Borcea har gjort ett antal imponerande bidrag på flera områden inom matematiken. Inom vertexoperatorteori har han avsevärt generaliserat resultat av Meurman och Primc om standardmoduler för affina Liealgebror. Hans klassificering av annihilerande fält är en väsentlig ingrediens i kombinatoriska konstruktioner kopplade till tvistade Kac-Moodyalgebror. Han har också ett allmänt resultat om likheten av "karaktärer" för två viktiga affina Liealgebror, vilket kan leda till förståelse av en djupare underliggande struktur. Hans exempel på generaliserade vertexoperatoralgebror tyder på existensen av en allmän tvistad representationsteori för sådana strukturer och han arbetar för närvarande med axiomatiseringar av denna teori. Dessa arbeten visar att Borcea verkligen behärskar detta komplexa område.

Ett helt annorlunda område som Borcea arbetat inom är geometrin av nollställen till komplexa polynom. Sendovs förmodan (också kallad Ilieff-Sendovs förmodan) säger att om ett komplext polynom har alla sina nollställen inom enhetscirkeln, så finns på avstånd högst ett från varje nollställe minst en kritisk punkt. Borcea har gjort några av de viktigaste arbetena inom detta område. Han har t.ex. visat att förmodandet är sant för polynom av grad sex och sju. (Förmodandet var visat för polynom av grad högst fem 1969.) Hans metoder har sedan använts för att visa Sendovs förmodande för polynom av grad åtta. Han har också genom sina metoder lyckats placera problemet i ett större sammanhang, och arbetar nu med generaliseringar i olika riktningar. Han använder generaliserade Rieszpotentialer för att definiera l^k-minimala polynom för en allmän klass av extremala problem. Han har också tolkat Sendovs förmodande i fysikaliska termer som en utsaga om geometrin av ett antal laddade partiklar i planet som han studerar med hjälp av operatorteoretiska metoder.

Slutligen arbetar Borcea för närvarande med utvecklingen av en analytisk teori för spektralordningen i $\mathbf{R}^n$ och dess kopplingar till differentialoperatorer, hyperboliska polynom och hela reella funktioner.

Serguei Shimorin

- *Håkan Hedenmalm* -

Serguei Shimorin föddes i Leningrad (nuvarande St.Petersburg), Sovjetunionen 1965. Han studerade på Mat-Mech i Leningrad och fick diplom 1987. Därefter vidtog, efter två-tre år ute i arbetslivet, doktorandstudier vid universitetet. Han påverkades starkt av mina föredrag på Steklov-institutet hösten 1990 (jag var i Leningrad på utbyte mellan vetenskapsakademierna hösten 1990), och bestämde sig för att utveckla sig i den riktningen. Avhandlingen *Multiplicative properties of certain Hilbert spaces of analytic functions* skrevs under professor S. A. Vinogradov, och den involverade ett studium av faktoriseringsproblem i viktade Bergmanrum. Metoden var originell, i det att Shimorin uppfann en "ny" sorts Green-Stokes-formler för att generalisera den tidigare metoden till en viktad situation.

Shimorin blev kvar i St-Petersburg fram till 1996, då han fick ett ettårigt post-doc från Bordeaux, Frankrike. Därefter återkom han till St-Petersburg. Hösten 1998 kom han till Lund som forskarassistent, på ett anslag jag sökt för hans räkning från NFR. Vi fick till stånd ett lyckat samarbete, där huvudresultatet var en biharmonisk maximumprincip, publicerad gemensamt med min doktorand Stefan Jakobsson (Crelle 2002). Vid sidan om detta skrev vi även ett arbete om Hele-Shaw flöde på hyperboliska ytor. Shimorin har naturligtvis även gjort stora framsteg på egen hand. Han har funnit en generalisering av den klassiska Kolmogorov-Wold dekompositionen för isometriska operatorer på Hilbertrum, där en avsevärd avvikelse från isometri tillåts. I samband med detta fann han ett kort abstrakt operator-teoretiskt bevis av Aleman-Richter-Sundbergs sats (Acta Math., 1995), vilken utgör Bergman-rum-analogen av Beurlings klassiska sats om isometriska skiftoperatorn på ℓ^2. Shimorin har på senare tid intresserat sig för konforma avbildningar. Hans infallsvinkel är att betrakta dessa som resultat av Löwner-flöde, samt att studera detta flöde med operatorteoretiska metoder.

Sammantaget är det skäligt att säga att Shimorin är en originell matematiker med stor intellektuell skärpa.

Under 2001 blev Shimorin docent vid Lunds Universitet. Till hösten 2002 fick han så en fast anställning som universitetslektor vid KTH i Stockholm. Han förefaller ha funnit sig väl tillrätta i Sverige, och jag finner det för troligt att han kommer att fortsätta att vara verksam hos oss.

Till Delegationen

- *Sten Kaijser* -

Svenska matematikersamfundet är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

Samfundet har länge varit medvetet om att många av de studenter som idag börjar sina högskolestudier har stora brister i sina matematikkunskaper. Vi har därför med tillfredsställelse sett att regeringen tillsatt en delegation med uppgift att se över matematikutbildningen på alla nivåer, från förskola och upp till och med forskarutbildningen i matematik. Ur samfundets synpunkt hade det varit önskvärt med en något större representation av matematiker med kunskaper om situationen på universitet och högskolor, men vi inser att detta är ett avvägningsproblem och vi är medvetna om att de största problemen finns i skolan.

Vid årsmötet år 2003 utsåg samfundet en kommitté med uppgift att representera samfundet i kontakterna med matematikdelegationen. Vi var naturligtvis medvetna om att det bland samfundets medlemmar finns många olika uppfattningar om hur skolans problem skall lösas och att en kommitté om fyra personer inte kan representera alla åsikter som finns inom samfundet. Samtliga medlemmar av samfundet har också, som alla andra, kunnat framföra egna åsikter direkt till delegationen.

Det bör kanske påpekas att även om det finns många medlemmar av samfundet som inte är verksamma vid universitet och högskolor, så är det ändå en majoritet av medlemmarna som är det. I vårt arbete har vi två viktiga kontakter med skolans matematik. Den ena är att vi varje år tar emot nya studenter med de förkunskaper som de fått i dagens skola och den andra är att vi medverkar i utbildningen av de lärare som kommer att utbilda morgondagens studenter. För oss är det av största betydelse att de studenter som studerar vid våra institutioner har goda förkunskaper och detta förutsätter att de undervisats av lärare med goda kunskaper i matematik.

Den vid årsmötet utsedda kontaktkommitten har i sina kontakter med delegationen huvudsakligen ägnat sin uppmärksamhet åt de två frågor som berör oss mest, nämligen lärarutbildningen och de program på gymnasiet som de flesta av våra studenter kommer ifrån, och samfundet står helt bakom de synpunkter som kontaktkommitten framför, rörande behovet av att alla lärare i matematik har tillräckliga kunskaper i matematik, kunskaper som kan kompletteras men inte ersättas av aldrig så goda kunskaper i matematikdidaktik. Vi står också helt bakom uppfattningen att den matematik som undervisas på gymnasiets naturvetenskapliga program redan från första året på gymnasiet bör ha ett helt annat djup än den som undervisas på exempelvis yrkesförberedande program.

Från svenska matematikersamfundets sida vill vi dock nämna att vi enligt vår uppfattning som professionella matematiker har ett ansvar som inte bara gäller lärarnas kunskaper i matematik och den utbildning som ”våra studenter” får under sina sista år i skolan. Vi är medvetna om att vi inte i någon större utsträckning kan bidra med kunskaper om *hur* lärare i grundskolan ska undervisa i matematik, men däremot tror vi oss ha god sakkunskap om *vilken matematik* de bör undervisa om. Vi anser också att aktiva matematiker bör vara med och granska de läromedel som används på alla nivåer i skolan.

Erfarenheter från andra länder visar att kursplaner och läromedel vanligen blir av högre kvalitet om aktiva matematiker medverkar i utformningen av dem. Detta är också uppgifter där matematiker och matematikdidaktiker bör samarbeta, men där ingendera kan ersätta den andra.

Avslutningsvis vill vi betona att vi är medvetna om att vi som främst arbetar vid universitet och högskolor har otillräckliga kunskaper om matematikundervisningen i svenska skolor, och att denna verksamhet behöver studeras. Till slut vill vi dock än en gång betona att erfarenheter från många länder visar att sådan forskning bör ske i samarbete mellan matematiker och matematikdidaktiker och att det är av stor vikt att den *bedrivs vid matematiska institutioner*.

Vänliga hälsningar
Sten Kaijser, ordf. svenska matematikersamfundet

- ◊ -

Antal registrerade vid olika universitet för 4ECM i Stockholm fram till den 26/4

KTH	60
SU	48
Uppsala	20
Linköping	15
Göteborg	4
Lund	3
Luleå	1
Umeå	1

Vi har med intresse tagit del av kontaktkommitténs inlägg kring Matematikdelegationens arbete i förra numret av Medlemsutskicket liksom brevet 21 april 2004 från Svenska matematikersamfundets ordförande Sten Kaijser till delegationen. Vi tackar för alla förslag och underlag som nått oss. Vi skall på bästa sätt försöka beakta synpunkter och frågeställningar i det fortsatta arbetet. Nu återstår för vår del att sammansmälta allt till en handlingsplan i ett betänkande. Efter remissförfarande och politiskt tagna beslut kommer det spännande arbetet med att reformera svensk matematikutbildning, där samfundet är en mycket viktig medverkande inspiratör. För att ge en bild av problem och möjligheter i vårt arbete sänder vi följande artikel som hela delegationen står bakom.

Matematikdelegationens ordförande,

Said Irandoust

Hög tid att satsa på matematik

Vår matematikundervisning är i fokus. I massmedia diskuteras studerandes bristande intresse och kunskaper och hur en nedåtgående trend ska kunna brytas. En av de viktigaste uppgifterna för regeringens matematikdelegation är att öka medvetenheten om ämnets betydelse på alla nivåer i vårt samhälle.

Parallellt med larmrapporter finns dokumenterat hur skolor och enskilda lärare brutit den negativa trenden och vänt utvecklingen i positiv riktning. Efter att ha tagit del av forskning, utredningar och beprövad erfarenhet i Sverige och internationellt är delegationen övertygad om att det finns en stor potential för förbättringar i det svenska utbildningssystemet. Många goda krafter kan tas till vara på ett bättre sätt och alla kan med stödjande, intresseväckande och utmanande aktiviteter lära sig mer matematik. Vi har identifierat utvecklingsområden från förskola till högskola, där det är särskilt angeläget med satsningar. Bland dessa finns stöd och stimulans till att sprida resultat av lokala utvecklingsprojekt och forskning, en samordnad kursplaneöversyn av innehåll och övergångar mellan olika skolformer, en nationell satsning kring lärarutbildningens innehåll och former samt resurser till kontinuerlig kompetensutveckling av lärare på fältet.

Varför satsa på matematik?

Det finns många skäl till att matematikämnet fått allt större betydelse i vårt utbildningssystem. Ett skäl är att matematiska modeller och det matematiska språket genomsyrar allt fler verksamheter. Matematiken är en självklar medborgarkunskap. För att verka i ett demokratiskt samhälle och aktivt delta i beslutsfattande om hur framtiden ska gestalta sig krävs grundläggande kunskaper både i och om matematik. Sådana kunskaper är också oundgängliga för alla former av högre eftergymnasiala studier. Förr användes matematikens modeller och språk framförallt allt inom naturvetenskap, teknik och ekonomi, men idag återfinns i allt högre grad matematikens språk i utbildningar på vetenskaplig nivå, även inom samhällsvetenskap och humaniora. Gång på gång uppmärksammar också olika avnämare betydelsen av att ungdomar i yrkeslivet har grundläggande matematikkunnande. Att kunna förstå och uttrycka sig matematiskt är en nödvändig kommunikativ kompetens och en del av ett modernt bildningsbegrepp.

Ett annat skäl att betona vikten av matematikkunnande för alla ser vi i social, etnisk och könsmässig segregering. Omfattande undersökningar visar att bristen på intresse och kunnande i matematik spelar stor roll för uppkomsten av olika skikt i samhället, där individer sorteras i de som kan och de som inte kan det matematiska språket med allt vad det innebär för möjligheter till yrkesutbildning och politiskt-ekonomiskt inflytande.Ξet moderna matematikämne som delegationen vill lyfta fram är en del av människans samlade kulturhistoria, med anknytningar till naturvetenskap, teknik och humaniora. Det är ett internationellt språk med egna symboler och grammatik som används av allt fler som ett nödvändigt verktyg för att hantera medborgarskap, yrke, vetande och vardag. Ett modernt matematikkunnande handlar inte bara om att kunna räkna, det handlar om att kunna tillämpa mångsidigt utvecklade kompetenser i t ex argumentation, kommunikation, problemlösning, rimlighets- och riskbedömningar. Att våra ungdomar har med sig ett sådant kunnande för högskolestudier eller för yrkeslivet har ett stort värde både för dem själva och för samhället.

Problem i Sverige och internationellt

Delegationen har till uppgift att utarbeta en handlingsplan med förslag till åtgärder för att förändra attityder till och öka intresset för matematik samt att utveckla undervisningen från förskola och skola till vuxenutbildning, högskola och folkbildning. Planen ska bl.a. syfta till att fler ägnar sig åt studier inom områden som matematik, naturvetenskap och teknik. I uppdraget ingår att bedöma behovet av förändrade kursplaner. Ett av flera motiv i delegationens direktiv är rapporter från tekniska högskolor om ökande spridning i studerandes förkunskaper och att resultaten i inledande matematikkurser försämrats.

De svårigheter som uppmärksammats i Sverige finns också i andra västländer. Nu i februari kom en brittisk larmrapport med förslag till omfattande insatser för en reformerad matematikundervisning “The crisis in maths teaching could hardly be worse”. Utredningen tillsattes efter en studie av anledningar till bristande rekrytering och vikande intresse för naturvetenskaplig och teknisk utbildning. Den fann, som i Sverige, att den mest kritiska punkten var just matematiken:

> *it has been widely recognised that mathematics occupies a rather special position. It is a major intellectual discipline in its own right, as well as providing the underpinning language for the rest of science and engineering and, increasingly, for other disciplines in the social and medical sciences. It underpins major sectors of modern business and industry, in particular, financial services and ICT. It also provides the individual citizen with empowering skills for the conduct of private and social life and with key skills required at virtually all levels of employment.*

Bristande intresse för studier i matematik, naturvetenskap och teknik har f.ö. särskilt uppmärksammats inom hela EU-området. Att förändra situationen är ett strategiskt utbildningsmål.

Betydelsen av bra lärare

Vikten av goda kunskaper i matematik är obestridlig slås fast i regeringens direktiv till delegationen. Det är väsentligt att få alla i samhället att inse betydelsen av goda kunskaper i och om matematik. Dessvärre kan vi spåra ett utbrett synsätt att matematik är lätt att undervisa i. Enskilt arbete i läroböcker dominerar. Matematiken måste, i likhet med andra ämnen, innehålla motiveringar, analys, problemlösning, diskussion och värdering. Här har kommunerna ett viktigt ansvar och mycket tyder på att politiker och beslutsfattare underskattat svårigheterna i utvecklingen av vår matematikundervisning och inte tagit tillräckligt allvarligt på sitt ansvar när det gäller lärarförsörjning och stöd till kompetensutveckling av lärare i matematik. Barn, elever och studenter efterlyser fler utmaningar och bättre förståelse för och i matematik. Det visar t ex Skolverkets rapport Lusten att lära med fokus på matematik. Lärares intresse, engagemang och kunnande är den viktigaste faktorn för utveckling av vår matematikutbildning. Här krävs breda insatser för att ge tid och stöd för att förbättra undervisningen. För tredje gången under 2000-talet samlade Matematikbiennalen i januari över 3000 deltagare i Malmö, trots kommuners och skolors dåliga ekonomi. Uppenbarligen är lärares intresse och behov att utveckla svensk matematikundervisning mycket stort. Biennalens seminarier och idéutställningar visade också att lusten och viljan till insatser ger engagerade, nöjda elever och studerande med bättre arbetslust och kunskaper.

Vilka kunskaper är viktigast?

Det är positivt att ämnesföreträdare och forskare vid högskolor och universitet nu engagerar sig i förnyat innehåll i grundskolans, i den reformerade gymnasieskolans och i högskolans matematikkurser. Det har påpekats att mycket stoff i gymnasiets kurser ska läras in på kort tid. Det leder till ytinlärning med bristande förståelse för viktiga begrepp och osäkerhet i grundläggande färdigheter. Det kan vara värt att diskutera om en kursplan ska ha fokus på ett visst teoriinnehåll eller på utvecklandet av matematiska kompetenser som bättre än idag kan anpassas till olika studieinriktningar och studieintressen. Av stor betydelse blir då också innehåll i de nationella kursproven.

Att ge kursplanemål med hjälp av önskvärda matematiska kompetenser är vanligt i västländer och kan vara en framgångsväg även för Sverige. Olika studieinriktningar med anpassade kurser kan med bättre studiemotivation leda till samma lärandemål i matematikämnet.

Seminarier med matematikdelegationens arbetsgrupper tyder på att styrdokument och kursplaner i matematik ska ses över i ett sammanhang, det gäller förskola, grundskola, gymnasieskola och vuxenutbildning. Förväntningar på elevernas kunskaper behöver bli tydligare för att nuvarande osäkerheter vid stadie- och skolformsövergångar ska kunna minskas.

Nya utmaningar

Utbyggnaden av högskolan med breddad rekrytering ger fler studenter bättre möjligheter till utbildning. Ökad valfrihet med konkurrens om elevernas studieintressen leder också till större heterogenitet bland nybörjarstudenter. Högskolan har en mycket viktig uppgift att svara upp mot denna utveckling. Inför nya utmaningar får vi inte fastna i förenklade förklaringsmodeller och lösningsförslag med ensidiga klagomål och beställningar på närliggande skolformer. Förnyelse av innehåll och arbetsformer som ökar studerandes vilja att arbeta uthålligt med matematik och som stärker deras tilltro till egen förmåga är en viktig byggsten för att nå framgång. God utbildning rekryterar fler studerande till matematikintensiva gymnasie- och högskoleutbildningar. Dialoger och utvecklat samarbete lokalt och centralt mellan lärare och studerande i grund-, gymnasie-, och högskolor ger nödvändiga förutsättningar för förbättringar. Från flera högskolor, t ex Umeå och Stockholm, kommer rapporter om hur man lyckats förbättra studieresultat och intresse för matematik.

Ingenjörer och naturvetare är inte på något självklart sätt samhällets hjältar för dagens ungdom. Många med toppbetyg från gymnasieskolan väljer andra karriärer. Matematiken anses fortfarande viktig, men många tycks inte inse varför. Högskolor och universitet har en avgörande, kvalificerad uppgift att lyfta fram matematik som ett fascinerande ämne i ständig utveckling, dess betydelsefulla roll i tillämpningar och som eget kunskapsområde. Självklart måste också undervisningens innehåll utvecklas i takt med ämnets och samhällets utveckling.

Samarbete och engagemang

I delegationens uppdrag ingår att öppet diskutera problem och möjligheter under utredningens gång. Därför genomför vi ett stort antal hearingar, samråd, konferenser och seminarier. Vi har hittills mött mer än 2000 personer som utifrån sina perspektiv och erfarenheter gett underlag och förslag för vårt arbete. Gemensamt för alla är ett stort och professionellt engagemang, brett ansvar och imponerande vilja till initiativ och insatser. Många har stora förväntningar på förslag och genomförande. Vi har nu ett betydelsefullt arbete med betänkandet som enligt planerna ska lämnas till regeringen den 28 maj. Vår ambition är att – utifrån allt det underlag vi fått in – fokusera på viktiga utvecklingsområden som kan ge god effekt vid en bred nationell och långsiktig satsning. Vi har stor respekt för olika företrädares insikter, åsikter och avsikter. Vi förstår att en utveckling av vår matematikutbildning är en hjärtesak för många i vårt samhälle, inte minst för elever och studenter, och ska göra vårt bästa att visa på samverkande insatser, där mångas engagemang kan tas i anspråk och ge framgång.

Matematikdelegationens ledamöter och sekretariat genom

Professor Said Irandoust, ordf

Några ord om sovjetiska matematikskolor och matematiktävlingar

- *Boris Shapiro* -

Jag blev väldigt glad när professor Ulf Persson bad mig att skriva några sidor om de ryska matematikskolorna, både om deras historia såväl som om deras nuvarande situation, samt även om deras lärarkårer, utbildningsformer och perspektiv. Min förhoppning är att denna information är av intresse för svenska läsare.

Uppkomsten av de sovjetiska matematikskolorna och deras levnadsöden är ganska komplicerade och direkt relaterade till det allmänna och skiftande samhällsklimatet i Sovjet. Boken *Golden years of Soviet mathematics*, AMS 1993, utgör en fantastisk informationskälla därvidlag. Av olika anledningar känner jag mig inte manad att reflektera över hela fenomenet "sovjetiska matematikskolor" men deras påverkan på det intellektuella klimatet och skolutbildningen i såväl Sovjet som i nuvarande Ryssland har onekligen varit stort.

I de stora universitetsstäderna som Moskva, Petrograd, Kazan, Kharkov, Odessa etc existerade matematiska cirklar vid respektive universitet redan från den tsar-ryska tiden i början av 1900-talet. Många berömda matematikers karriärer tog däri sin början. Under det berömda Chrustjovska "tövädret" på 60-talet organiserades de första matematiska internatskolorna i Moskva och Novosibirsk[1] . Bakom dessa initiativ stod kända skollärare och universitetslärare bl.a. I.Swarzburg, A. Konstantinov och flera andra [2]. Dessa entusiaster ville, efter många år av totalitärt förtryck, utnyttja denna nyuppkomna och relativt liberala situation till att förmedla kunskaper och fritänkande. Den världsberömde matematikern A.A. Kolmogorov tillhörde en av dessa som stödde initiativet varmt och organiserade det första (och tydligen det enda) matematiska internatet för begåvade elever från provinserna. Denna organisation fick namnet 'Kolmogorovs internat'.

Nomenklaturans attityd till dessa skolor var mycket blandad. De ansågs av många vara väldigt tvivelaktiga. Alltför många judar, alltför bra betyg, alltför stark kunskapsvilja, alltid för mycket frihetstänkandet och dessutom ovanliga relationer mellan elever och lärare, relationer som baserades på respekt och studieglädje. På vissa universitet och tekniska högskolor förekom det till och med restriktioner för eleverna från matematikskolorna. Oftast fick de svårare frågor på inträdesproven och var på flera sätt negativt särbehandlade. Samtidigt existerade det i landet, under det pågående kalla kriget, ett stort behov av duktiga fysiker och matematiker. Denna tid karaktäriserades följaktligen av en relativt stor respekt för vetenskap och framgångar inom denna. Speciellt Cybernetik, rymdforskning, fysik lockade unga talanger. Individer som L.D. Landau, Abrikosov, Kolmogorov

[1] Som följd av ett direktiv av Ministerrådet den 23/8 1963. Se även sajterna `http://www.pms.ru` och `http://www.internat18.ru`.

[2] I. Swarzburg - en väldigt duktig pedagog och författare av många kända textböcker och böcker om populär matematik. Grundaren av matematikskola N 444 i Moskva. Invalidiserad sedan barndomen, dog i Moskva på 80-talet. A. Konstantinov - universitetslärare, med en avhandling i matematisk logik i sitt bagage, är den främsta personligheten verkande bland Moskvas matematiska skolor. Är fortfarande aktiv trots sin höga ålder och verksam i skola N 57 och centrum för kontinuerlig matematisk utbildning.

och Arnold utgjorde heta namn som var kända även för den breda allmänheten i likhet med skådespelare och musiker. Eftersom många medlemmar i den Sovjetiska vetenskapsakademien hade sina barn i dessa skolor förmådde man avvärja upprepade angreppsförsök från statsmakten.

1970-talet utgjorde matematikskolornas glansperiod. Deras totala antal runt om i landet uppgick då till ca 50 stycken. Matematiktävlingarna öppna för alla elever från årskurs 6 till 10 var välbesökta. Finalisterna från hela landet fick åka till internatet i Moskva eller fick direkt inträde till den matematiska institutionen vid Moskvas Universitet efteråt. Efter de turbulenta åren i början på 90-talet försvann flera av dessa skolor . Men samtidigt under samma period grundades en unik organisation – *Moskvas centrum för kontinuerlig matematikutbildning*, (se www.mccme.ru). Detta centrum har som sitt främsta mål att förbättra matematikundervisningen på alla nivåer samt att kontrollera och stödja matematiktävlingar och matematikskolor. Numera arbetar detta centrum aktivt med över 20 skolor i Moskvaregionen och stödjer många fler ute i provinserna. Den mest berömda är skola 57 i Moskva som bland annat utvecklar metodiskt material på beställning av utbildningsdepartementet i delstaten Texas, USA. En annan välkänd skola är skola 2 vars historia finns dokumenterat i en trevlig, tyvärr endast på ryska tillgänglig, bok[3]. På sajten MCCME och Moskvas oberoende universitet kan man hitta mängder av intressant information om pågående aktiviteter. Mycket är på ryska men det finns även en del engelska sidor att tillgå.

Lärarkåren på sådana skolor har alltid utgjort en blandning av skollärare som vill arbeta i en mer kreativ miljö och aktiva universitetslärare/forskare. Obligatoriska inslag var matematikcirklar på olika nivåer minst en gång per vecka och olika roliga tävlingsformer. På 70-talet, då antalet matematikskolor var som störst, förelåg det stora variationer i deras ambitioner och skolprogram. Vissa nöjde sig med att i stort sett följa den gängse läroplanen medan andra utvecklade egna skräddarsydda läromedel. Det mest kända systemet utvecklades av innovatorn och entusiasten A. Konstantinov (se fotnot ovan). Under många år producerades och insamlades speciella så kallade uppgiftsblad. Dessa bestod i regel av 2-3 sidor av sammanhängande matematiska problem i ett visst delämne. Detta gjorde att eleverna återupptäckte kursens innehåll på ett kreativt sätt. Analys i en variabel började man redan i årskurs 7-8 i skolan. Målet var givetsvis att lära eleverna att tänka självständigt istället för att lära sig färdiga räknerecept utantill. I snitt gick nästan hälften av eleverna vidare till matematik- och fysikutbildningar. Under ledning av I.M. Gelfand organiserades även en matematikskola per korrespondens som publicerade över 30 broschyrer av matematiskt populärvetenskapligt slag. Dessa finns numera översatta till engelska och är riktiga klassiker[4] Många av skolornas forna elever tjänstgjorde senare som frivilliga assistenter hos sina lärare. I varje matematikklass (som vanligen bestod av 25-30 elever) fanns en lärare och 2-3 högskolestudenter som tjänstgjorde som frivilliga medhjälpare. Respekt för individen rådde, att säga 'ni' till varandra var normen i ett annars ganska korrumperat och laglöst samhälle, såväl både under och efter sovjettiden,

[3] Dock finns tillgängligt på engelska `http://www.school2.ru/articles/TheRussians.htm`

[4] Det finns ett litet bibliotek av dessa böcker under titlarna 'Bibliotek av tidskriften 'Kvantum'', och 'Bibliotek av skolan per korrepondens'. Författaren bistår gärna de läsare som skulle vilja köpa några av dessa broschyrer

men speciellt under. Inte konstigt att många intelligenta föräldrar önskade att deras barn skulle studera i dessa skolor även i de fall barnen saknade speciell matematisk begåvning. Ty man måste påpeka att det var bättre ställt med undervisningen även i andra ämnen än matematik i matematikskolorna. Men allt var dock inte frid och fröjd. Man utsattes för ständiga påhopp från utbildningsdepartamentet[5]. Vidlyftiga ambitioner och hård arbetsbelastning ledde ibland till ökad förekomst av stress och depressioner hos eleverna. Men dessa skolor som helhet utgjorde (och fortfarande utgör) en fantastisk förebild för det ryska skolsystemet. I tillägg till den rent matematiska aspekten av matematikskolorna skall även nämnas att skolutflykter ut i naturen var nästan obligatoriska. Även längre resor kors och tvärs genom det stora landet lockade väldigt många elever. Det skapades en speciell matematikskolornas atmosfär som påverkade eleverna decennier efter skolavslutningen. De som nu stödjer matematikskolorna, när det knappast finns något statligt stöd, är just dessa forna elever som senare blev förmögna under kapitalismens framgång i Ryssland.

Som en uppmuntrande inslag vill jag nämna att det berömda flygplansföretaget Boeing 1993 investerade runt 10 miljoner dollar i de ryska matematikskolorna för att bevara systemet som tydligen producerar mycket billigare och dessutom mycket mera högkvalificerad arbetskraft inom naturvetenskap än vad som görs i USA. I USA och Frankrike återfinner man flera tusen doktorander inom matematik, fysik och datorvetenskap som urspungligen kommer från dessa matematikskolor. Enbart i USA verkar flera hundra professorer i matematik med bakgrund just i detta system. Än många fler finns kvar i Ryssland och är numera ledande inom utvecklingen av marknadsekonomin.

Slutligen några ord om matematiktävlingarna. De finns på 5 nivåer från årskurs 5 och högre. Nämligen skolnivån, kommunnivån, stadsnivån, regionsnivån, och landsnivån. Slutligen de bästa från den sista nivån åker vidare till den internationella tävlingen – matematikolympiaden. Systemet är väldigt omfattande och speciellt ger det barnen från provinserna en möjlighet att få tillfälle att studera i större städer, något som annars är ganska svårt för närvarande.

Lite lästips på engelska.

Fomin, Dmitry; Kirichenko, Alexey **Leningrad Mathematical Olympiads 1987–1991.** Translated from the Russian by Fomin and Kirichenko. With a foreword by Mark Saul and a preface by Stanley Rabinowitz. **Contests in Mathematics, 1.** *MathPro Press, Westford, MA, 1994.* xxii+199 pp.

Fomin, Dmitri; Genkin, Sergey; Itenberg, Ilia **Mathematical circles (Russian experience)**. Translated from the Russian and with a foreword by Mark Saul. **Mathematical World, 7.***American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.* xii+272 pp.

Boris Shapiro är student till V.I. Arnold, och kom till Stockholms universitet som forskarassisten 1991 och är professor vid dess matematiska institution sedan 2000

[5] Skola N2 var flera gånger stängd, lärarkåren och speciellt adminstrationen ersattes av folk från partibyråkratin. Under 70-talet uppstod t.o.m ett veritabelt uppror på Kolomogorovinternatet

OM SIGMA, DOVER, OCH BOOLE

- *Torgny Lindvall* -

Många av medlemsbladets seniora läsare har goda minnen av Sigma, det matematiska översiktsverket som publicerades på svenska i sex prydliga band 1959. Gensvaret blev så gott att det snart också kom en häftad upplaga.

Den engelskspråkiga förlagan hette "The World of Mathematics", från 1956. Jag hörde av mig till förlaget i New York, Simon & Schuster, för att antal år sedan med ett smickrande brev, med hälsningen att en uppdaterad version skulle vara en stor välgärning. Jag fick inget svar. Förklaringen fick jag långt senare: Simon & Schuster har gått samma öde till mötes som många andra seriösa förlag i USA och annorstädes: det är uppköpt av ett konglomerat där det är vinst per kvartal som räknas, inte tunga kulturella insatser.

Nå, det är nog för mycket begärt idag att ett enstaka förlag skall ta hand om något motsvarande Sigma; det blir väl snarast ett tungt matematiskt sällskap som får ta initiativ och ansvar i så fall. Hur ett sådant verk skall se ut idag är ju inte självklart, men att en satsning vore välkommen tycker nog många.

*

Inte förvånande finns "The World of Mathematics" tillgänglig i fyra häftade band hos Dover Publications. Att denna institution klarar sig är att glädja sig åt: Dovers bredd på utgåvor av klassiker inom många områden är verkligen imponerande, och de låga priserna för deras prydliga häftade band är remarkabla.

I den händelse läsaren inte granskat på ett tag vad Dover har att komma med, se gärna på deras hemsida. Dover har moderniserat sig vad det praktiska beträffar, och deras böcker finns numera lätt tillgängliga, via deras egen hemsida eller vilken nätbokhandlare som helst.

*

Det är nu 150 år sedan Boole gav ut "The Laws of Thought", och den boken finns tillgänglig från Dover, i ett mycket läsbart omtryck av originalet. Det vore mycket konstigt om inte var och en som är intresserad av matematik eller filosofi i allmänhet, eller t.ex. logik eller sannolikhetsteori i synnerhet, finner något intressant i denna bok. Boole var från unga år främst skolad i klassiska språk, medan hans matematiska bakgrund var ganska skral. Det sista kanske rentav var en fördel för denna imponerande personlighet, som med orubblig tro på algebrans kraft når fram till raka och klara ståndpunkter i det vida fältet, formulerade på ett högtidligt men dock fullt levande språk.

Kapitel XIII i boken, vars fullständiga titel förresten är "*An Investigation of THE LAWS OF THOUGHT on which are founded The Mathematical Theories of Logic and Probabilities*", rör gudsbevis av Samuel Clarke och Spinoza. Hur mycket Boole har till övers för dessa framgår från ingressen till hans analys av dem:

"While the reasoning of Dr. Samuel Clarke is in part verbal, that of Spinoza is so in a much greater degree; and perhaps this is the reason why, to some minds, it has appeared to possess a formal cogency, to which in reality it possesses no just claim."

Kapitlen om sannolikheter och statistik omfattar ungefär en tredjedel av boken. Det första av dem inleds på ett sätt som får oss att känna av historiens vingslag i dubbel bemärkelse:

> *"Before the expiration of another year just two centuries will have rolled away since Pascal solved the first known question in the theory of Probabilities, and laid, in its solution, the foundation of a science possessing no common share of the attraction which belongs to the more abstract of mathematical speculations."*

Vilken person med intresse för sannolikhetsteorins historia kan motstå denna inbjudan att ta del av Booles algebraisering av händelser, "Probability of Judgements", m.m.? Att det sedan gick så att mått- och integrationsteorin visade erbjuda en slutgiltig bas för sannolikhetsteorins formalia (men naturligtvis inte de begrepp, frågor och resultat som ger sannolikhetsteorin dess egenart) är en annan sak. Det tog många decennier av klargörande arbete i matematiken i allmänhet innan tiden var mogen för att lägga denna grund, och utmaningen (kanske omöjlig att leva upp till...) för en läsare av Boole är förstås att sätta sig i en tidsmaskin, och klara resan till 1854.

*

Och vad skall Dover ha för sin utgåva av "The Laws of Thought" (422 sid.)? En dryg hundralapp. Klicka för givande sommarläsning!

- ♢ -

Århundradets Matematik

- *Ulf Persson* -

En bok på svenska om Hilberts Problem! En angenäm överraskning. Vem skriver och till vilka vänder sig författaren? Författaren är Anders Karlqvist, känd såsom chef för Polarforskningsinstitutet och med, förmodar man, en gammal orostad kärlek till matematiken[1]. Syftet är att för en bredare allmänhet, utan speciella förkunskaper, ge en introduktion till tjugonde århundradets matematik, med Hilberts problem såsom utsiktspunkter. Problemet att ge en icke-matematisk skolad läsekrets en vetenskaplig förståelse för ämnet är, som författaren riktigt påpekar i introduktionen, så gott som omöjligt. Man kan då undra vari ambitionen egentligen består? Att bekantgöra läsaren med Hilbert och några andra stora matematiker för att sprida dessa namn inom en större krets? Att visa att matematik är ett aktivt och spännande område, och inte bara har sitt berättigande i sina tillämpningar utan även som en kulturell företeelse? Att väcka nyfikenhet, framför allt hos unga människor, om matematiken såsom en vetenskap och en möjlig karriärväg?

Att popularisera matematiken är både enklare och svårare än att popularisera andra vetenskaper. Det är enklare i den meningen att även på elementär nivå kan något av matematikens fascinerande väsen förmedlas, förutsatt att läsaren har det rätta sinnelaget

[1] I själva verket en disputerad matematiker, som under årens lopp har varit redaktör för ett antal verk om matematisk modellering

och är beredd att anstränga sig. Men det är samtidigt svårare eftersom matematiken inte låter sig enbart beskrivas i orienterande ordalag, och dess begrepp, i motsats till andra vetenskaper, är inte uppenbara och kända. En astronom, en fysiker, en kemist och en biolog kan alla peka på avancerade fenomen som folk har konfronterats med och vars definitioner och existenser knappast behöver presenteras eller förklaras.

Men hur skall matematiken populariseras? Om man ger helt avkall på ambitionen att förmedla förståelse så har det gjorts framgångsrikt, eller åtminstonde med bred uppskattning. Ett exempel därvidlag utgör Singhs bok om Fermats gåta, som utan att ge någon upplysning om lösningen till densamma dock kunnat förmedla illusionen om en sådan. Dessutom har den, vilket inte är att förakta, för en bred allmänhet lyckats levandegöra varför matematik är spännande och varför matematiker ägnar sig åt den med en sådan passion. Men tyvärr består populärvetenskap, speciellt i matematik av urvattning. Allt som är svårt tas bort, eller beskrivs i grova förenklade termer med missvisande analogier, och resultatet blir en rappakalja lika obegriplig för fackmannen som för den oinvigde. Inte undra på att författandet av populärvetenskaplig litteratur har setts ner på av aktiva vetenskapsmän. Dock så har vetenskapsmän i allmänhet och matematiker i synnerhet en plikt att ta värvet på allvar, istället för att helt överlåta fältet åt klåpare. Populärvetenskap kan bedrivas på många nivåer allt efter förutsättningar. På grund av den tilltagande specialiseringen så finner ju många av oss varande amatörer i andra matematiska specialiteter och det har därmed uppstått en tradition av icke-specialiserade översikter såväl skriftliga som muntligt framförda. Många av dessa är förträffliga och många framstående matematiker, man tänker kanske främst på Atiyah, har visat sig vara mycket skickliga i att ge spännande om än något glättade föreläsningar som gett åhörarna illusionen om förståelse och överblick och därmed den tillfredställelse och uppeppning en sådan skapar. Om det går att ge populära framställningar på ganska hög nivå, vore det då inte möjligt att ge dem på något lägre nivå?

Nackdelen med att ta enskilda av Hilberts problem som utgångspunkter för en lekmannaöversikt är, som författaren inledningsvis mycket riktigt påpekar, dess ojämnhet. Vissa tillhör matematikens kärna, andra har visat sig vara blindspår. Det är mycket möjligt, fast om detta kan vi bara spekulera, att Hilbert inte lade någon större möda på att välja ut dem. Men å andra sidan ligger det i sakens natur att själva ambitionen att presentera problem att styra den framtida utvecklingen utgör en förmätenhet gränsande till det absurda och idag skulle ingen matematiker påtaga sig en sådan grandiös uppgift. Så hade han tagit alltför allvarligt på sin uppgift hade det knappast blivit bättre, snarare sämre. Hans ambition var väl helt enkelt att ställa några provocerande frågor av varierande svårighetsgrad utan illusioner om att dessa skulle ha något bestående inflytande. Men som författaren betonar, inflytande har de haft, ett inflytande som ingen vid tillfället hade kunnat ana. Kanske kan man tillskriva detta Hilberts fruktbara intuition, eller bara tillfälligheter.

Viss matematik är lättare att presentera för lekmannen än annan. Man tänker då osökt på elementär talteori eller kombinatorik i dess förströelsematematiska tappning. Men kanske trots allt den för lekmannen enklaste matematiken att presentera är matematikens grundvalar och hur dessa kan införlivas med matematiken och bli föremål för dess kalkyl. Jag tänker därmed på oändligheterna, Cantors mängdlära, de inneboende paradoxerna, Gödels ofullständighetsbevis, Turingmaskiner, rekursiva mängder etc. Idéerna är enkla och kraftfulla och tillgängliga för den reflekterande lekmannen med det filosofiska sinnelaget. Och mycket riktigt, när Karlqvist håller sig inom dessa domäner, med vilken han troligen har en personlig förtrogenhet, är hans framställning någorlunda medryckande. Problemet är, vilket han även inser, att en ensidig betoning på detta ger en synnerligen skev bild av matematiken. Matematiken är mycket mera än logik, ja logiken är ju bara en matematisk gren bland andra sedan den har tappat sin metafysiska mystik, och de logiska landvinningarna har haft mycket liten praktisk betydelse på matematiken, förutom kanske att betona att matematiken är ett organiskt växande väsen och dess frågeställningar inte kan genereras slumpmässigt och att de allra flesta problem som kan formuleras är meningslösa. (Ett belysande exempel är ju allmänna diofantiska ekvationer).

Ingen matematiker kan numera behärska matematikens samtliga domäner, och än mindre gäller detta den ivrige amatören. Tyvärr kan man inte helt frigöra sig från den elaka misstanken att Karlqvist för många av Hilberts problem helt enkelt har läst in sig på sekundära och populära framställningar och sedan i urvattnad form rabblat upp den läxa han lärt sig. (Hans karaktärisering av Hilberts sextonde problem *Utveckla en topologi för algebraiska kurvor och ytor* är för mig helt obegriplig, och referensen till Taniyama-Shimuras förmodan, gör det hela än mera förvirrande. Dock berör han gränscykler och modulära former i texten.). Framställningen är behäftad med ett antal sakfel och grodor. Bland de mest oskyldiga är att han insisterar på att använda termen valaxiomet för den etablerade svenska termen urvalsaxiomet (han orkar inte vara konsistent därvidlag). Att påpeka att i de Gaussiska heltalen entydig primtalsfaktorisering inte gäller via exemplet $5 \times 2 = 10 = (3+i)(3-i)$ är en groda (ty vi vet ju alla att $5 = (2+i)(2-i)$ och $2 = (1+i)(1-i)$). Vidare gör han en härledning av Cardanos formler, men genom att hoppa över en massa led, blir härledningen helt förbryllande. Listan kan givetsvis göras längre och man beklagar att förlaget inte lät boken granskas av en matematiker av facket.

En allvarligare invändning är att trots allt så förutsätter författaren en hel del baskunskaper hos läsaren, som matriser, komplexa tal, oändliga serier. I många fall, utav utmattning antar man, så hänvisar han till mera avancerade begrepp såsom differentierbara mångfalder. Med sådana förutsättningar hade författaren kunnat gå mycket längre, vara mycket mera precis. Samtidigt som han då även tävlar om läsarens gunst med mera avancerade framställningar. Ekvationer lär vara anatema inom populärvetenskap. Hawkins förläggare varnade honom för att varje ekvation skulle halvera läsekretsen. Karlqvist däremot är inte rädd för att presentera ekvationer, många antar man helt enkelt avskrivna. Nåja det är inget fel med detta, även om de knappast förklaras. Mycket av matematikens formler upplevs av allmänheten som magi (vilket illustreras av de patetiska försök som tecknare ofta gör genom att kludda ner en svarttavla med allehanda rot uttryck) och om ambitionen inte huvudsakligen är att förklara utan att förföra och förtjusa, undrar man inte varför det inte skulle ha varit lämpligt att ta stegen fullt ut och presentera mera komplicerade formler. Sådant kan fascinera och vara betydligt mera upplysande än att ideligen hänvisa till den komplicerade matematiska verkligheten.

Hur skall då matematik populärt presenteras? Som sagt vad, detta är inte lätt, och man välkomnar varje seriöst försök, om inte annat för den provokativa utmaning det kan innebära för andra att försöka överträffa. Vad skall man undvika? Matematiken är inte ett främmande språk som bara behöver översättas. Matematiska begrepp har, som jag inledningsvis betonade, oftast ingen vardaglig motsvarighet, och försöken att finna vardagliga 'översättningar' blir bara missledande och förvirrande. Populärvetenskap kan inte fungera genom förenkling och urvattning, att via en teknisk matematisk text skala av teknikaliteterna. Den måste börja underifrån, genom att författaren återigen ser matematiken med oskuldsfulla ögon. Detta förutsätter att författaren är väl förtrogen med sitt ämne, och författandet av den populärvetenskapliga texten blir helt enkelt ett nytt och skapande sätt att återigen se den verklighet med vilken han är förtrogen. En sådan text behöver inte vara lättfattlig, den kan innehålla subtila resonemeng, och komma in på områden som går läsaren överhuvud. Detta är dock inte en katastrof, det är oundvikligt, och en text skall spänna över ett brett spektrum. Men genom att befria sig från en yrkesmässig slentrian kan författaren genom sin entusiasm smitta läsaren med densamma.

Detta är egentligen inget nytt. Många av 1800-talets stora banbrytande vetenskapsmän skrev för den bildade och intelligente lekmannen. Man tänker därvidlag på Darwins arbeten eller än mera på hans vapendragare T.H. Huxley. De var därvid del av en förnämlig tradition som verkade långt in på 1900-talet. Men någonstans på vägen torkade den ut. Kan det ha varit den bildade, intelligente lekmannen som helt enkelt försvann? Utan en specifik målgrupp så havererar varje försök till popularisering. Mitt råd är att matematikern skall skriva till 'barnet inom sig'.

Förlaget är dock att gratulera till det kommersiellt otacksamma initiativet att utge matematisk litteratur för allmänheten. Det tar mig emot att inte kunna anmäla denna specifika frukt med större entusiasm, man jag kan bara hoppas på att initiativet skall inspirera till andra försök, även från Karlqvist själv, som säkert kan mycket bättre. Jag må faktiskt tillstå att jag själv lärt mig ett och annat från texten. Slutligen eftersom det är lätt för en yrkesmatematiker att racka ner på tekniska defekter och döma ut, så har jag bett en gymnasielärare läsa boken och ge sitt oberoende omdöme istället. Recensionen följer nedan och är skriven ovetandes om innehållet och utformningen av min egen. Min kommentar till denna är att det finns ett uppdämt behov av populära matematiska framställningar.

(Några tankar runt Anders Karlquist bok om Hilbert och hans problem.)

\- *Bengt Svensson* -

Boken "Århundradets matematik" har sin upprinnelse i föredragsanteckningar och artiklar. Dessa har Anders Karlquist bearbetat och utvidgat till en mer sammanhängande text.

I boken belyser han matematikens utveckling fram till och med vår tid. Som genomgående tema har han valt de problem, som den tyske matematikern David Hilbert hade formulerat inför matematikerkongressen i Paris år 1900.

Framställningen ger en bred bild av matematikens utveckling. Ett flertal matematiker presenteras med små korta bibliografier, som förhöjer läsvärdet. Att få bekanta sig med matematikern, som genom sina misstag utvecklade matematiken, känns ganska trösterikt.

Genomgående är att matematikbegåvningen visar sig i tidig ålder. Flera berömda matematiker har publicerat sina epokgörande teorier under tonåren. Detta är något för den svenska skolan att fundera över. Hämmar det svenska skolsystemet våra matematikbegåvningar?

Att skriva populärt om modern matematisk forskning är svårt. Att göra det för en bredare publik med vetenskapliga kriterier på förståelse är en omöjlighet. skriver författaren.

Påståendet besannas i boken. Trots detta ger boken små guldkorn här och där, säkert olika för olika personer beroende på matematisk bakgrund.

Enligt författaren är inte texten anpassad efter speciella förkunskaper hos läsaren och kan läsas utan besvär med "matematiska operationer". Eftersom det är helt omöjligt att definiera och förklara varje matematiskt uttryck i en bok, som skall ge en överblick av det matematiska landskapet, så får läsaren inte fundera för länge på vad obekanta uttryck betyder. Läs vidare! Redan uttrycket "matematiska operationer" kan förvilla.

Matematikerkongressen i Paris 1900 beskrivs ingående och ger en bra bakgrund till bokens utformning. Direkta citat från Hilberts föreläsningar finns med, som ger en god bild av stämningen mellan matematikerna på den tiden, vilken inte skiljer sig från stämningen mellan dagens matematiker.

Boken innehåller små väl avvägda kapitel om bland annat "Matematikens grunder","Den axiomatiska metoden","Gödels bevis", "Oändligheten", "Fysikens axiomatisering", "Differentialekvationer och Liegrupper" och "Tätpackningsproblemet". Några avsnitt är svåra eller helt omöjliga att förstå, men det bör inte avskräcka läsaren från att gå vidare till nästa kapitel. Där kanske läsaren hittar något intressant istället. Som tidigare påpekats är det beroende av vilka förkunskaper och vilket intresse läsaren har.

Det som fascinerade undertecknad mest var diskussionen om datorernas betydelse för den matematiska utvecklingen. Kan en sats påstås vara formellt bevisad, om en dator har räknat igenom alla upptänkliga fall ?

Boken avslutas med tankar om framtidens matematik och vilka problem, som kommer att lösas under 2000-talet. Författaren slår fast att morgondagens matematiker inte kommer att kunna behärska alla områden inom matematiken, som deras föregångar kunde göra vid 1900-talets början.

Detta är en läsvärd bok kanske speciellt för blivande matematiklärare. Den kan vidga vyerna för alla, som tror att matematik är "räkning och geometri". Så stod det i betygsboken för Folkskolan och det är mer rättvisande för aktiviterna i dagens skola än "matematik".

Läs och begrunda den här boken!

manar Bengt Svensson som är

matematikstuderande pensionerad matematiklärare vid Göteborgs universitet.
(Är det här påståendet sant eller falskt? Ett Gödelproblem?)

Ett paradigmskifte i matematiken?

- Olle Häggström -

Är en revolution på gång inom matematiken? Jag har inte genomfört någon enkät, men tror att de flesta matematiker inför en direkt fråga skulle ställa sig försiktigt avvisande till att så är fallet. Om frågeställaren därpå insisterar på att det faktiskt *är* en revolution på gång, och av matematikern *kräver* att få veta vari denna består, så föreställer jag mig att det blir en tämligen stor spridning i vilka förslag olika matematiker klämmer ur sig. Några sådana kandidater till matematiska revolutioner skulle kunna bli följande:[1]

(1) Av angränsande ämnen har det traditionellt varit fysiken som haft det största inflytandet som inspirationskälla och pådrivare för matematiken, men idag håller biologin på att allt mer ta över denna roll.

(2) Inom snart sagt alla inriktningar av tillämpad matematik, har stokastiken slagit igenom som en standardingrediens i den matematiska modelleringen.

(3) Den diskreta matematiken har vuxit från en uppsättning mer eller mindre isolerade resultat till att besitta en sammanhängande teori, och står därmed på ett annat sätt än tidigare på jämställd fot med analysen.

(4) Med cellulära automater kan i princip vilka fysikaliska fenomen som helst återskapas, och det är därför bara en tidsfråga innan de cellulära automaterna konkurrerar ut differentialekvationerna som ledande modelleringsverktyg.

(5) Den kraftigt ökade tillgången på datorresurser gör att numeriken allt klarare framstår som den mest relevanta delen av matematiken, vilket också gör att de klassiska analytiska metoderna i motsvarande mån är på väg att marginaliseras.

Detta är de förslag som först dyker upp i mina tankar när jag försöker föreställa mig att en matematisk revolution skulle vara på gång, men läsaren kan förmodligen utan större ansträngning själv komma på ett par-tre minst lika rimliga motförslag. För egen del är jag, med mitt stora intresse för sannolikhetsteori, särskilt tilltalad av trenden **(2)**, men det vore mig fjärran att för den sakens skull hävda att all ”deterministisk” matematik skulle vara obsolet. På samma sätt tror jag som sagt att flertalet matematiker är så pass vidsynta att de inte räknar med någon nära förestående utveckling där någon av trenderna **(1)**–**(5)** (eller någon annan) konkurrerar ut övrig matematik.

Men det finns undantag. Det mest extrema exemplet står förmodligen *Mathematica*-skaparen Stephen Wolfram för. I sin mycket uppmärksammade tegelsten *A New Kind of Science* (Wolfram Media, 2002) argumenterar han, med en megalomani som knappt tycks känna några gränser, för uppfattningen **(4)**, och för att de cellulära automaterna inom kort kommer att revolutionera inte bara matematiken, utan all vetenskap!

Ett annat undantag är Claes Johnson, professor i matematik på Chalmers, som

[1] Observera att den följande listan **(1)**–**(5)** inte är någon redogörelse för *min egen* bedömning av läget, utan för uppfattningar som jag tycker mig ha stött på hos en eller flera matematikerkollegor.

på senare tid allt högljuddare, och med en retorik som ibland påminner om Wolframs, förespråkat uppfattningen **(5)**. Matematiken står enligt Johnson på randen till ett paradigmskifte, där den matematik som inte fokuserar på numeriska datorberäkningar inom kort kommer att förpassas till soptippen (eller i mer lyckosamma fall till museimontrar).

Detta, menar Johnson vidare i åtskilliga brev och debattinlägg, måste få återverkningar i matematikundervisningen på alla nivåer, och han har följdriktigt tagit tillfället i akt att försöka få med sig Matematikdelegationen på samma linje. Frustrerad över att inte ha fått den respons därifrån som han hoppats på, har han tillsammans med sina båda yngre medarbetare Johan Hoffman och Anders Logg författat en bok – möjligen vore stridsskrift eller pamflett en bättre beskrivning – som enligt uppgift från författarna kommer att utges på Springer den 28 maj i år, dvs samma dag som Matematikdelegationen förväntas offentliggöra sin handlingsplan.

- Johan Hoffman, Claes Johnson och Anders Logg: **Dreams of Calculus: Perspectives on Mathematics Education**.

Författarna har valt att dedicera boken till utbildningsminister Thomas Östros, förmodligen med de dubbla syftena att sätta press på Östros att läsa boken, och att även i övrigt dra ytterligare uppmärksamhet till den.

Uppenbarligen rör det sig om en bok med stora ambitioner att påverka utbildningspolitiken, och den kan därför vara värd att titta närmare på. Det följande är tänkt som en rättvis och balanserad rapport om boken, baserad på min läsning av det preliminära manuskript som författarna i slutet av mars lät cirkulera på Chalmers matematikinstitution.

♢ ♠ ♢

I introduktionen slår Johnson et al.[2] fast sitt huvudbudskap: dagens matematikutbildning befinner sig i kris, men också i ett paradigmskifte orsakat av datorn. Redogörelsen för författarnas förhållanden till Matematikdelegationen drar något åt det rättshaveristiska hållet (*"we have been denied the possibility to participate in the work of the Delegation, despite the fact that we are world leading experts and the Delegation lacks expertise..."*), men låt oss överse med detta och gå vidare i boken för att se vilka argument författarna har för sina ståndpunkter.

Dagens kris uppges bero på (a) den ökade tillgången på datorkraft, och (b) att vissa av fysikens viktigaste differentialekvationer inte medger analytisk lösning. Här kan man notera att (a) handlar om en utveckling som pågått i ett halvsekel, och att (b) har varit känt åtminstone sedan Poincarés arbeten om trekropparsproblemet i slutet av 1800-talet. Så varför, undrar naturligtvis en kritisk läsare, leder detta till ett paradigmskifte *just nu*, i det nya millenniets första årtionde? På detta ger Johnson et al. inte något svar.[3]

Nästa sak läsaren vill veta är hur författarna menar att den nya matematikundervisningen bör se ut, och på vilket sätt den skiljer sig från den gamla. Det slås tidigt i boken

[2] Jag skriver Johnson et al. istället för det formellt mer korrekta Hoffman et al., eftersom det så uppenbart är Johnson som är gruppens chefsideolog.

[3] Jag kan naturligtvis inte utesluta att svaret finns underförstått i deras framställning, men detta har i så fall gått mig förbi.

fast att undervisningen behöver reformeras *på alla nivåer*, men författarna lägger sedan det mesta krutet på att diskutera undervisning på högskolenivå, så låt oss fokusera på denna.[4] Deras huvudidé är här att kurserna skall handla både om klassisk analys och om numeriska datorberäkningar, och att dessa båda moment skall integreras och gripa in i varandra. Detta är utmärkta synpunkter, som är svåra att inte hålla med om.[5] Men den avgörande frågan är naturligtvis på vilket sätt den förespråkade reformen skiljer sig från så kallad "traditionell undervisning".[6] Kanske är det tänkt att denna skillnad skall framgå av de långa citat ur läromedlet *Body&Soul*[7] som läsaren bjuds på. Men utan en parallell diskussion av de två undervisningskoncepten, med tydliga anvisningar om vilka skillnader som är väsentliga och vilka som är av mer tillfällig art, blir det alltför svårt för läsaren (åtminstone för mig) att förstå var den avgörande skiljelinje går som motiverar användandet av ord som *paradigmskifte*.

En misstanke växer sig allt starkare ju längre jag läser i boken. Kanske vet inte Claes Johnson hur "traditionell undervisning" idag ser ut? Kanske angriper han något som fanns för, låt oss säga, 20 år sedan, men som inte längre finns idag? Kan det till och med vara på det viset att om Johnson bemödade sig om att ta reda på hur dagens "traditionella undervisning" är utformad, så skulle den bittra konflikt som i nästan ett decennium plågat matematikinstitutionen på Chalmers, med ens gå upp i rök? Nog kunde det i alla fall vara värt ett försök?

♢ ♠ ♢

Innehållsförteckningen i *Dreams of Calculus* bjuder på en rad eggande kapitelrubriker, som t.ex. "A Brief History of Mathematics Education", "What is Mathematics?", "Scientific Revolutions", "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences?"[8], och "Do Mathematicians Quarrel?". Det mesta av själva innehållet blir tyvärr

---

[4] Vad gäller undervisning på lägre nivåer, så inskränker sig författarnas synpunkter, förutom ett allmänt påpekande om att differentiering av undervisning är bra, till att multiplikationstabellen och lång division gott kan avskaffas.

[5] Däremot är de inte vare sig nya eller särskilt originella. Dåvarande Högskolan i Luleå tillämpade redan från start (början av 70-talet) idén med integration mellan analys och numerik. Hos oss på Chalmers har utvecklingen kommit något senare och mer successivt, men idag präglar den önskade helhetssynen så gott som alla våra matematikkurser (alltså även dem som inte ges av Johnson och hans grupp).

[6] Begreppet "traditionell undervisning" ges inte någon stringent definition i *Dreams of Calculus*; för att vara konkret väljer jag i det följande att använda begreppet i betydelsen "den matematikundervisning som ges på Chalmers av lärare som inte tillhör Johnsons grupp".

[7] Eriksson, K., Estep, D. och Johnson, C. (2004) *Applied Mathematics: Body and Soul*, vol 1–3, Springer. Hela sex kapitel (om totalt 78 sidor) i *Dreams of Calculus* är ordagrant citerade ur *Body&Soul*. Detta må naturligtvis författarna vara i sin fulla rätt att göra, men det kan lätt orsaka läsaren en stunds förvirring inför uttryck som "denna bok", innan han påminner sig att han befinner sig i ett 16 sidor långt citat ur en annan bok än den han håller i handen.

[8] Författarna påstår sig ha ett svar på Eugene Wigners metafysiska frågeställning om matematikens orimliga effektivitet, genom att peka på svårigheten att lösa en del av fysikens differentialekvationer. Men här tycks de ha missförstått Wigner. Det faktum att naturens lagar med stor noggrannhet låter sig

alltför kalejdoskopiskt för att svara upp mot de upptrissade förväntningarna. Vi får ta del av en strid ström av infall och uppslag, där det är snart sagt omöjligt att skönja den röda tråden (om det överhuvudtaget är författarens avsikt att det skall finnas en sådan). Vi får veta hur fräsigt författarna tycker det kommer att bli att använda framtidens *virtual reality*-teknik till att få lära känna en virtuell Marilyn Monroe, och några sidor senare får vi en redogörelse för asymmetrin mellan problemen att visa att det i Irak *finns* respektive *inte finns* massförstörelsevapen. Författarna är påtagligt förtjusta i metaforer: klassisk analys jämförs med klassisk musik, beräkningsmatematik med jazz, och vetenskap med bergsbestigning. Analogierna haltar dock som regel kraftigt, och överges innan de hunnit användas till att kasta något förklarande ljus över författarnas teser.

Jag har tidigare vid flera tillfällen känt beundran inför Claes Johnsons formulerings- och argumentationskonst vid seminarier och muntliga föredragningar. Men kanske är det med Johnson som med en del av de framgångsrika ståuppkomiker som misslyckats med att slå igenom även som författare: deras material fungerar utmärkt som muntliga slagfärdigheter, men räcker helt enkelt inte riktigt till för skriftlig framställning.

♢ ♠ ♢

Författarnas märkliga val att skriva sitt inlägg i den svenska utbildningsdebatten på engelska, har så vitt jag kan bedöma inte haft några särskilt allvarliga negativa konsekvenser vad den språkliga kvaliteten anbelangar; jag har funnit förhållandevis få skandinavismer i texten. Mer störande är en del andra stildrag de valt att lägga sig till med: det generösa bruket av stor bokstav, som i *"Does the Computer create a new form of Calculus to be presented in Education, a Reform Calculus?"* och *"The Educated Man of the 17th century did not necessarily master the Multiplication Table"*, blir snabbt ganska irriterande, och när författarna efter att ha gjort en särskilt insiktsfullt observation skriver *"And both Pure Mathematics and Didactics Experts seem to us to be lacking this insight"* undrar man vad det är för plötsligt anfall av blygsamhet som får dem att skriva "insight" istället för "Insight".

Boken hade också vunnit på om författarna avhållit sig från en del ganska tarvliga retoriska grepp, som t.ex. hur de visar sin ringaktning för Matematikdelegationens ordförande Said Irandoust genom att, trots att han upprepade gånger omtalas, aldrig nämna honom vid namn.

Det preliminära manuskript jag haft tillgång till innehåller en hel del småfel, som man dock kan hoppas rensas bort innan den slutliga versionen går i tryck, och som man i annat fall kan överse med. Värre är det med följande påstående en bit in i bokens Avsnitt 2.5: *"In the Report of the Delegation Body&Soul is described in (very) positive terms."* Detta kan omöjligt förstås som något annat än en ren och skär förfalskning. Ty hur kan, i annat fall, författarna veta redan i mars vad som kommer att stå i Matematikdelegationens rapport den 28 maj?

---

beskrivas av differentialekvationer, blir väl varken mer eller mindre gåtfullt av att ekvationerna inte alltid medger analytiska lösningar?

Om Atlas och om Mercator och Ptolemaios

- *Jaak Peetre* -

Atlas var i grekisk mytologi en av de äldre gudarna, en s. k. titan, bror till Prometheus, som skapade människorna ur lera och stal ljuset från himlen, som straff av Zeus fjättrades vid en klippa i Kaukasus. Atlas själv speciella uppgift var att bära upp himlavalvet. Detta sitt värv utförde han på berget uppkallat efter honom, beläget i Mauretanien (nuvarande. Marocko) överblickande Herkules stoder (nuvarande Gibraltar sund).

På latinet lyder genitivformen av Atlas *Atlantis.* Härav är bildat ett adjektiv *Atlanticus* (maskulinum). I femininum heter det *Atlantica* och i neutrum *Atlanticum.* [1] Följaktligen hette vattnet nedanför *mare Atlanticum.* De germanska språken har i allmänhet slängt de latinska ändelserna. Sålunda heter det "the Atlantic ocean" på engelska och "der Atlantik" på tyska. Vi svenskar har förstås gått längst och säger bara "Atlanten" (varför?). På danska heter det dock Atlanterhavet, likaså på norska.

Mercator [2] gav ut flera berömda kartböcker. En av dessa hade på titelbladet en illustration med jätten Atlas kånkande på jorden. Följaktligen kallas alla kartböcker framgent för atlas. Pluralis av Atlas är på latin *Atlantes.* (Det avser Atlas manliga avkomma.) Alltså bör man på svenska säga en atlas, flera atlanter.

I matematiken har namnet tagits upp i differentialgeometrin och differentialtopologin. En differentierbar mångfald kan täckas av kartor, vilka tillsammans utgör en atlas, men det finns flera ekvivalenta atlanter på en och samma mångfald.

Exempel. Mercator upptäckte också den efter honom uppkallade kartprojektionen. Jordytan avbildas därvid på en cylinderyta, som innehåller ekvatorn, med axel parallell med jordaxeln. Den har följande märkliga egenskaper.

a) Meridianerna avbildas på räta linier.

b) Likaså latituderna.

c) Den är konform (vinkeltrogen). Det betyder, att avbildningen är euklidisk i infinitesimala omgivningar.[3]

Övning. Tag reda på etymologin till meridian, latitud och longitud.

Mercatorprojektion är använbar inom navigationen. Om man i stället projicerar t. ex. från en av polerna på ekvatorplanet, leds man till s. k. sterografisk projektion, som användes i kartografin redan av Ptolemaios. [4] Dessa avbildningar är sammanlänkade medelst sambandet $w = e^z$, där z och w är de naturliga komplexa koordinater i Ptolemaios resp Mercators fall (w får tagas mod $2\pi i$).

---

[1] Latinet har som bekant tre grammatiska genus.

[2] Gerhard Kremer, lat. Gerardus Mercator (1512-1594), nederländsk matematiker och astronom.

[3] Skalan i varje punkt är oberoende av riktning, men varierar givetvis från punkt till punkt. *Redaktörens anm.*

[4] Klaudius Ptolemaios (eller lat. *Claudius Ptolemaius*, född kring 85, död kring 165), alexandrinsk vetenskapsman, samtida med kejsarna Trajanus och Hadrianus. Hans främsta verk är "Mathematike syntaxis", mest känd under sin arabiska översättning "Almagest", men han gav också ut en världskarta.

Följande är inte klart för mig. *Hur bar sig Mercator åt? Han kände ju sannolikt inte till logaritmerna, ej heller exponentialfunktionen.* Kanske var hans projektion bara approximativt konform eller kanske inte konform alls? Månne har någon av läsarna en hypotes!

- ♢ -

Ny RådsForskarNämnd

- *Torsten Lindström* -

Rådsforskarnämnden (RFN), fick nya delegater föregående sommar. Samtliga delegater har eller har varit innehavare av forskningsmedel från tidigare NFR och nu VR under senare år. RFN är en instans som funnits i ca 20 år och där NaTurvetenskapliga utskottet (NT) inom VR kan hämta forskares synpunkter på forskningspolitiska frågor. Rådet består för närvarande av 10 personer och denna gång utsågs två matematiker, professor Lars-Erik Persson (LTU) och docent Torsten Lindström (HiK). Ordförande i RFN är professor Anita Sellstedt, Institutionen för fysiologisk botanik, UPSC, Umeå Universitet.

RFN har alltså till uppgift att vara ett rådgivande organ för Vetenskapliga forskningsråden (denna nämnd fattar alltså inga beslut) och sammanträder ca 2ggr/år. Exempel på frågor som diskuterats vid tidigare möten är:

- Hur mäter man vetenskaplig produktion?
- Hur ser tjänstestrukturen på våra forskartjänster ut, är inslaget av tillfälliga anställningar optimalt och finns det speciella kategorier av forskare som klart gynnas/missgynnas av den rådande strukturen?
- Hur har befordringsgången till professor fungerat på de olika högskolorna?
- Uppföljning av hur de generella ramarna för forskningsverksamhet har utvecklats. Urholkas anslagen med tiden och vad är orsakerna till detta?

RFN kan naturligtvis endast fungera på ett meningsfullt sätt om kontakten med forskarna sköts på ett tillfredställande sätt. Nämndens medlemmar är därmed särskilt angelägna om att få in synpunkter som representerar andra infallsvinklar än deras egna. Var alltså inte rädda att höra av er till nedanstående personer om ni har synpunkter på RFN:s arbete och förslag på frågor som bör diskuteras.

Prof.Lars-Erik Persson, Institutionen för Matematik, Luleå Tekniska Universitet, S-97187 LULEÅ, tel 0920-491117, mailto:`larserik@sm.luth.se`

Doc.Torsten Lindström, Institutionen för Kemi och Biomedicinsk Vetenskap, Högskolan i Kalmar, S-39182 KALMAR, tel 0480-446410, mailto: `Torsten.Lindstrom@hik.se`

Innebörden hos “=“ – en sista debattkommentar om innehåll och språk

Håkan Lennerstad, BTH

Jag vill avsluta min medverkan i denna debatt om innehåll och språk med ett exempel, samt fyra fall där språkfrågan pekar mot andra viktiga matematikfrågor.

Exemplet “=“

Symbolen “=“ uppfanns 1557 av Robert Recorde som en ren översättning av uttrycket “is equalle to“. Det är förmodligen den enda symbol som förekommer i alla matematiska forskningsgrenar (även parenteser?). Och det är den första symbol som elever lär sig i grundskolan, näst siffrorna själva och kanske plustecknet.

Ändå missbrukas likhetstecknet långt upp i gymnasiet. Vid beräkning av bensinkostnaden för en bilresa 20 mil med bensinförbrukning 0.8 l/mil och bensinpris 9.5 kr/l kan man se en kalkyl som

$$20 = 20 \cdot 0.8 = 16 = 16 \cdot 9.5 = 152$$

Så bensinkostnaden är 152 kronor. Här används “=“ ibland i meningen “ger“ eller “leder till“, och inte i meningen “är lika med“ eller “har samma värde som“. Man kan verkligen fråga sig: Hur är det möjligt att en så grundläggande symbol missförstås i så stor utsträckning, trots lärarnas långa utbildning och alla goda intentioner?

Från äpplematik till matematik

Kanske på grund av att man faktiskt sällan diskuterar vad “=“ betyder. Man är ständigt upptagen med innehållet och glömmer därmed symbolerna som sådana (matematiskans frånvaro). Jag tror inte jag själv insåg likhetstecknets betydelse på ett medvetet sätt förrän jag undervisade i matematik som doktorand.

Man borde kunna exemplifiera fram betydelsen “är lika många som“ för symbolen “=“. Låt oss titta på räkning av äpplen (Q).

Ett påstående som

QQ och QQQ är lika många som QQQQQ

kan barn kontrollera handgripligen på olika sätt om man har äpplen på olika platser på bordet, eller i olika händer (små äpplen). Det gäller ocksåatt

QQQQQ är lika många som QQ och QQQ,

och

QQQQQ är lika många som QQQ och QQ.

Barn kan själva kontrollera allt detta, eventuellt i dialog med lärare. Om de ofta gör sådana jämförelser och skriver ner vad de gör, så upplever de snart behov av kortare skrivsätt. Man kan ge dem möjlighet att skriva ovanstående likheter som

QQQ och QQ = QQQQQ, QQQQQ = QQQ och QQ,
QQQQQ = QQ och QQQ,

och eventuellt med “+“ i stället för “och“. Eller med siffror (3Q + 2Q = 5Q eller 3 + 2 = 5) om de vill. Vid en översättning har alltid användaren själv friheten att välja symbol eller ord. Det är viktigt att barn får känna frihet hur de vill skriva. Det är deras tänkande och deras formuleringar. Bara om barn själva äger sina tankar kan matematiklärande ha karaktären av upptäckande.

Matematikens dolda friheter

Beteckningsfriheten är en frihet som är en del av matematiken (vi får välja beteckningar), men som sällan framgår i matematikkurserna. Friheten förmedlas inte så ofta, på grund av matematiskans frånvaro. Matematik framstår som ett bibliotek av nödvändigheter, vilket är just vad innehållet är. Omskrivningsfriheten som nämns nedan är en annan ganska osynlig matematisk frihet.

Barnen kan också testa vad som inte är lika många med nya äppelekvationer. Man kan vidare fråga barn hur många sätt de kan skriva QQQQQ. Det blir några stycken att skriva upp (partitioner av heltal), dvs man har verkligen nytta av den kortare symbolen i skrivandet. Hur många sätt där alla grupper är olika stora? Hur många sätt med bara udda antal? Lika många? Det var märkligt! Kan det vara så om man har sex äpplen? Aningar om samband är matematiskt innehåll som ger undersökningsenergi och indirekt leder till träning av symbolhanteringen.

Om man uteslutande har en innehållssynvinkel så är man ständigt intresserad av sambandet mellan symbolerna. Vad som hänger ihop, hur och varför. Då tittar man aldrig närmare på varje tecken “för sig“. Det kan tillåta att fundamentala missförstånd kvarstår. Man lär inte matematiskan, denna formuleras inte. Symbolmedvetenhet utvecklas genom att leka med symbolerna, genom att pröva dem. Enklast är att byta dem mot vardagligare synonymer:

$$“=“,\ “\equiv“\ \textit{och}\ “\Leftrightarrow“$$

Som vi alla vet används “=“ också angående likhet mellan andra matematiska storheter, som exempelvis matriser. För funktioner användes “≡“ för att undvika missförstånd med en ekvation gällande ingående funktioners värde (för något variabelvärde, eller för alla). Om vi har logiska variabler används ”⇔”, här dock snarare av historiska skäl. Dessutom, en ekvation som saknar lösning kallas “paradox“ om det är en ekvation med logiska variabler.

Barns förmatematiska räknande finner matematisk formulering

Notera att det ovanstående exemplet innebär att barns eget räknande översätts till en matematisk formalism. Skillnaden är endast skrivsättet. Det gör det lättare att erövra formalismen och ändå kunna se en konkret mening. Översättningar bygger broar mellan vardagskunskap och formell matematisk kunskap, de båda kommer närmare varandra.

Broar är just vad vi behöver om barn och ungdomar ska nå matematikens abstrakta begrepp.

Översättningar ger en möjlighet till en kontinuerlig övergång från barns sätt att uttrycka kvantiteter till matematiskt formelspråk. Kontinuerliga övergångar mellan svenska och matematiska kan för många leda till att elementär matematisk intuition, som vuxit fram i vardagserfarenheter och vardagliga dialoger, kan överföras till den matematiska formalismen. Formalismen blir känsloladdad och användbar i fler sammanhang. Formalismen kan då representera (och väcka) intuitionen, i stället för att de två är separata (skolmatte och livsmatte är helt olika saker).

Matematikens karaktär är generalitet

Kanske är det mest karaktäristiska för matematikens dess generalitet. Matematikens abstrakta begrepp är mycket svåråtkomligare än motsvarande vardagliga fenomen. Kanske kan generaliteten erövras i två steg:

1. En ren översättning av räknandet med fysiska äpplen till den matematiska formuleringen. Matematiken har då endast äppleinnebörd.

2. Räknande av päron, bananer, vindruvor, mynt, mopeder o.s.v. , kan göras med samma kalkyl. Detta ger samma formalism stödpelare i allt fler tillämpningar, och en generell innebörd kan växa fram.

I steg 1 kan de matematiska symbolerna få mening från de kända äppelkalkylerna. Här kan symbolernas sätt att fungera tränas in, med tillgång till en konkret mening. I steg 2 avkläds formalismen dess exklusiva äppelmening.

"Formelstudier" leder mot matematikens metoder och mål

Av ovanstående arbete med likhetstecknet kan det framgå för barnen att matematiska kalkyler handlar mycket om omskrivningar. Insikt om detta kan ge en elev en känsla av frihet att själv kunna göra på många sätt. Denna plötsliga ocean av frihet leder till följdfrågan: Vilket mål har kalkylerna? Vad är det egentligen vi vill göra? Hur vill vi helst skriva? Tja, när vi vill räkna ut något vill vi nog gå från det krångligare $(2 + 3)$ till det enklare (5). Det beror på vad man vill.

Detta är viktiga frågor om vad matematiken handlar om. De synliggörs när den andra aspekten (språket) synliggörs.

Som Ulf säger: "förmågan att veta vad man vill åstadkomma med en manipulation och vilken manipulation man ska välja är ett uttryck för matematisk mognad". Jag kan bara instämma. Ulf, var vänlig och säg något intressant om hur man befrämjar matematisk mognad!

När friheten och målen framgår är matematik mindre mekaniskt, mera idémässigt. Matematiken börjar leva, eleverna blir mer matematiker, innehållet blir mera synligt. Som alltid: Ökande språkförståelse sätter fokus på innehållet.

Ulf håller med om att dialoger om matematik vore värdefullt i utbildningarna. Detta har varit ett uttalat mål i läroplanerna åtminstone sen 50-talet, men i stort sett ingenting har skett. Sådana dialoger kan dock knappast komma till stånd så länge studenter är rädda att de matematiska formler de skriver är rent nonsens. Studenter måste lära sig viss säkerhet i formelspråket innan man överhuvud taget vågar diskutera matematik.

Omvänt, om man lyckas få till stånd en matematisk diskussion så blir den ofta till avsevärd del en diskussion om hur formler skrivs. Om man inte väljer att vid tillfället ignorera dessa frågor. Detta påminner i sin tur om svenskaämnets uppdelning i en språklig och en litterär del. Båda är viktiga, på ganska olika sätt.

Dolda hinder

Jag menar att det finns ett stort glapp mellan matematiklärarkollektivets förväntningar å ena sidan, och elevkollektivets resulterande matematikkunskaper å den andra (NB: Sverige ligger bra till internationellt). Det tycks mig som detta glapp är så stort att det tyder på att här finns ett dolt hinder – ett hinder som vi inte ser och inte har formulerat. Kanske är det dolda problemet att lärarna når fram till eleverna i mycket mindre grad än vad lärarna tror. Det oformulerade matematikspråkproblemet är en stark kandidat till detta. Det isolerar de två kategorierna från varandra effektivt och omärkligt. Ulfs argumentation bekräftar sannerligen problemets osynlighet.

Men matematikspråket är inget självändamål. Jag tror det som saknas i klassrummen är diskussioner av matematik, både för elever/studenternas och för lärarnas skull. Detta i sin tur kräver bättre matematikkunskaper hos lärarna och en väsentligt mera diskuterande tradition i matematikklassrummen, båda vilka förutsätter varandra. En mer diskuterande matematiktradition förutsätter mycket mod som lärare och respekt för elever och människor i allmänhet, antagligen särskilt mycket i matematikämnet. Matematik är känsloladdat, mentalt och personlighetsnära ("Är jag en dum människa eller inte?" kan vara den viktigaste frågan på matematiktimmarna). Att ta hand om svårigheterna angående matematikens formelspråk tycks mig vara det enklaste och mest konkreta sättet att avdramatisera, göra innehållet tydligare och mer sammanhängande med vad man redan kan, att komma vidare och få ovan nämnda andra svårigheter att lossna. Men det kräver dialoger, som exempelvis Ulfs och min.

Bara framtiden kan visa om det finns dolda hinder, och om hindren har denna karaktär.

Några av Ulfs argument

Javisst är det en truism att man behöver förstå språket för att förstå innehållet. Min poäng är att språket ligger för nära oss för att vi ska se det, men många elever/studenter behöver få det formulerat på ett eller annat sätt. Något annat som är för nära oss för att vi ska se det är stämbandens, tungans och lungornas rörelser medan vi talar – vi kan tala obehindrat ändå. Det är biologiskt och inte kulturellt, vi alla har detta gratis, och det finns ingen anledning att formulera det. Endast de språkbegåvade har matematikspråket gratis. Vissa matematikbegåvade tillhör gruppen språkbegåvade.

Att formulera alla implicita regler skulle leda till en sådan förvirring att “ingen skulle se skogen för alla löv och barr“, skriver Ulf. Varför, Ulf, finns det endast två alternativ för dig: formulering av ingenting eller formulering av allting? Är det för att ett urval inte skulle bestämmas av något strikt matematiskt, utan av vad dagens lärande människor behöver? För mig finns det mängder av andra och bättre alternativ än dina två extremer.

Just som Ulf säger, behöver elever intuitivt förstå intentionerna. Intentioner finns i det räknande man som människa tillägnar sig under de första levnadsåren. Vår matematikframställning bör i lämplig mån anknyta till dessa. Det tycks mig som jag föreslår sätt att nå den intuition du talar om, medan du avvisar alla sätt.

Ulf har i viss mån rätt i att de matematiska kalkylerna saknar direkt motsvarighet i naturliga språk. Kalkyler är argumentationer om matematiskt innehåll, som utförs på matematiska. Som Ulf påpekar är skillnaden mot argumentationer på naturligt språk att man i matematik kan i långa stycken räkna uteslutande formellt. Kalkylernas avsikter handlar inte så mycket om det matematiska innehållet som ett “formelmanipulationsinnehåll“ av diskret och idémässig karaktär, som har sällan formulerade egenskaper och strategier (försök har gjorts i Automated Theorem Proving). Dessa strategier är starkt lokala (beroende på matematiskt område), man kan väl säga att Polyas bok formulerar det mesta av vad som är generellt. Räknandet bestäms av vad som tillåts av innehållet (sant–falskt), men även av vilken språklig dräkt vi gett de matematiska begreppen. Med en annan formulering får vi andra sätt att räkna.

Denna skillnad mot naturliga språk beror nog på en kombination av tre faktorer. På matematiskans entydighet, på att det matematiska innehållet är mindre komplext än andra vetenskapers (matematiken har endast växt i de riktningar där vi klarar av att formulera problem på matematiska och att besvara frågorna – detta har också utvecklat matematiskan vidare), och på den tolkande matematikkulturens enhetlighet.

En matematisk utvikning mot Platon

Om man studerar filter inom linjära system så kan dessa beskrivas på tre alternativa sätt: med talföljder, z-transform eller matriser. Exempelvis svarar faltning av talföljder mot multiplikation av potensserier/polynom, respektive multiplikation av matriser. Ett resultat kan transkriberas från den ena till den andra. Ändå föredrar man ofta någon framför de andra. Formalismerna är som olika typer av teleskop (eller mikroskop) som man kan studera samma matematiska innehåll med, vilka har något olika egenskaper. Formalismerna är viktiga för vilket innehåll vi upptäcker.

Man kan givetvis även tänka sig många andra ouppfunna formalismer för samma sak, av vitt skilda slag. Det verkar naturligt att inte identifiera innehållet med någon av dessa enskilda formalismer. Det förefaller mig som vi kan associera ett slags mental “bild“ som är gemensam för alla olika formuleringar, vilken har en egen existens. Detta är något som inte är representerbart för dagens helt formalistiska datorsystem. Dessa “bilder“ skulle vi kunna kalla innehållet bakom formalismen. Denna mänskliga förmåga skulle i så fall ge “matematiskt innehåll“ en mening. Vi har kanske beskrivit en tolkning av Platons idévärld.

Även icke-standardanalys och standardanalys är alternativa formalismer. I sammanhanget kan nämnas att med genererande funktioner kan icke-triviala resultat i kombinatorik åstadkommas genom att importera ganska triviala analysresultat. Detta är matematisk strategi på en annan nivå än den förut nämnda "formelmanipulationsnivån". Det är någon form av metanivå där man sällan behöver matematiskt formelspråk. Jag föreslår benämningen "kvalitativ matematik" för diskussion av matematiska sammanhang som inte behöver formelspråket.

Några fler av Ulfs argument

Ulf säger att mitt "fundamentala missförstånd är att sammanblanda matematisk formalism med matematiskt språk". Det går inte att ta ställning till detta ty han definierar inte sin distinktion mellan "matematisk formalism" och "matematiskt språk". Han har också en argumentation om matematisk terminologi, som undertecknad finner oproblematisk.

Visst använder alla matematiklärare metaforer, förklaringar. Jag vill utveckla detta, det har mycket att göra med en mera diskuterad matematik. Här kan elever och studenter hjälpa oss väldigt mycket. Jag vill också knyta förklaringarna bättre till formlernas funktionssätt, så att formlernas detaljer och funktionssätt framgår bättre. Typisk är Ulfs beskrivning av lärarens uträkningar: "Det viktiga är... ... att man litar på att de utförs korrekt." Det håller jag inte med om. Studenter måste även kontrollera att de utförs korrekt. Man måste förstå uträkningarnas detaljer, om än inte alla omedelbart (en poäng med matematiken är att man här och nu kan kontrollera och avgöra vad som är sant, utan att först gå ut i naturen och insamla information).

Av samma skäl bör förklaringar om möjligt knytas till specifika formler (det går inte med alla). Sådana förklaringar liknar översättningar ty de förmedlar även detaljer om hur formelspråket fungerar. Studenter behöver det. Detta visar att matematiskan är närmare svenskan än vad de flesta studenter tror. I dagens matematikundervisningskultur finns (som Ulf säger) många förklaringar, men de kan hamna nästan varsomhelst. Att de har att göra med specifika formler anges inte ofta, i alla fall inte på ett systematiskt sätt. Det är mycket viktigt att beskriva vad som uttrycker vad. Återigen – okänslighet för hur matematikidéer skrivs med formelspråket. Återigen – matematiskans frånvaro.

Det tycks mig som Ulf har gjort sig till tolk för principen "allt är bra som det är". Han föreslår inga vägar framåt för matematiken. "Bättre ämneskunskaper" är samma truism som politikerns "Jag vill skapa ett bättre samhälle".

Ulf bemöter någon annans åsikter

I Ulfs senaste inlägg bemöter han någon annans åsikter, inte mina. Han argumenterar mot att översättningar är det enda viktiga, som om det är min åsikt. Det anser jag verkligen inte. Han argumenterar mot att alla kan lära sig matematik bara man förstår matematiskan. Det anser jag verkligen inte. Jag anser att det är en mycket naiv dröm, som om skolan skulle vara verkligheten, som om matematik skulle vara det viktigaste för alla. Människor (elever), har alldeles för olika bakgrund, inriktningar, livssituationer, framtidsdrömmar, synsätt och intressen för något sådant.

Jag anser bara att bättre kunskaper i matematiska gör det matematiska innehållet mera tillgängligt. Att matematikverksamheten kan bli lättare och mer stimulerande, inte minst för lärarna. Vi kan nå starkare matematikkompetens.

Utbytet har varit givande. Tack för din debattlusta och engagemang för vårt otroligt fascinerande, mångbottnade och för vår civilisation så centrala ämne.

- $\diamondsuit$ -

Titelsidan

Betrakta sfärer med växande radier, alla tangerande i en fix punkt i ett fixt plan. I den euklidiska geometrin kommer dessa sfärer att konvergera mot det gemensamma tangentplanet. Så dock icke i den hyperboliska geometrin. Istället är gränsvärdet en så kallad horosfär, vars inducerade metrik (från det ambienta hyperboliska rummet) är den euklidiska. (Så i det hyperboliska 3-rummet har vi modeller för det euklidiska planet, i tillägg till de sfäriska geometrierna. Däremot har vi inte på motsvarande sätt en isometriskt inbäddad bild av det hyperboliska planet i det euklidiska 3-rummet).

Bilden visar ett oändligt 'Manhattan' inbäddat i det hyperboliska rummet. Horosfären har en horisont vars distans asymptotiskt lika med ett. I detta fall har gatuplanet en horisontdistans av $3/2\sqrt{5}$ medan taken på skyskraporna har en mostvarande distans $\sqrt{3}/2$

Bilden är konstruerad genom att i Poincaré-modellen (övre halvrummet, med koordinater z, t med $z \in \mathbf{C}$ och $t \in \mathbf{R}^+$) teckna ner ett 'Manhattan' på 'planet' $t = 2,5$. Taken på skyskraporna befinner sig på 'planet' $t = 2$. Avbildningen

$$\sigma(z,t) = (0,0,1) + 2((z,t) - (0,1))\|(z,t) - (0,1)\|^{-2}$$

avbildar konformt övre halvrummet till det inre av enhetsbollen med punkten $(0, 1)$ till origo. I den hyperboliska bollmodellen kommer de räta linjerna genom origo att sammanfalla med de euklidiska räta linjerna. Bilden av Manhattan projiceras därmed till ett synplan (nämligen titelsidan).

En isometri av Poincarémodellen inducerar en Möbiustransformation på dess rand, och omvänt, varje Möbius transformation på randen bestämmer entydigt en isometri. Varelser i det hyperboliska 3-rummet skulle omges av en oändligt avlägsen stjärnhimmel, och uppleva slående parallaxer. Ja dessa varelser skulle från barnsben vara väl införstådda med Möbiustransformationer som skulle vara oundvikliga i all form av navigation.

Givet en Möbius-transformation given av matrisen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ med normaliseringen $ad - bc = 1$ definerar en isometri via

$$w \to (aw + b)(cw + d)^{-1}$$

där $w = z + tj$ är betraktad som kvaternion, och de korresponderande algebraiska operationerna utförda bland kvaternionerna.

Genom att utnyttja dessa isometrier kan man i princip programmera fram en film som beskriver hur det upplevs att röra sig i det hyperboliska rummet.

Femton goda skäl för att resa till ICME-10 sommaren 2004

- *Barbro Grevholm*[1] -

Vart fjärde år arrangeras International Congress of Mathematics Education. Förra gången skedde det sommaren 2000 i Japan. I sommar är det Norden som står i tur, och arenan är Köpenhamn, eller rättare sagt Kongens Lyngby strax utanför Köpenhamn. Där samlas over 3000 lärare och forskare från hela världen till spännande diskussioner, föreläsningar, verkstäder, utställningar, cirkus, utflykter och social samvaro.

Alla som ska vara med som medverkande eller deltagare ska vara registrerade som kongressdeltagare. Det går inte an att bara 'komma inom' medan man är på semester. Välj istället att planera en del av semestern i form av deltagande i kongressen. Erbjudandena är så många och varierade att man själv måste sätta samman sitt eget program. Du finner alla upplysningarna på nätstället `http://www.icme-10.dk` som kommer att uppdateras kontinuerligt ända fram till kongressen den 4:e till 11:e juli. Vi ska här använda lite plats till att förklara vad ICME är och vad slags programförslag du kan välja mellan.

1 *Plenarföreläsningar och intervjuer:*

Det finns 8 programpunkter som vänder sig till alla deltagarna på en gång, nämligen 6 föreläsningar och 2 panelintervjuer. De som ska föreläsa och intervjuas hör som danskarna säger, hemma bland '*de store giraffer i matematikdidaktikens zoologiske have*'.

2 *Föredrag:*

I 15 paralleller på 5 platser i programmet kommer inbjudna föredragshållare från hela världen att presentera ett brett spektrum av aktuella teman.

3 *Survey-teams:*

Det finns fem kartläggningsgrupper som ända fram till kongressen ska undersöka och beskriva den senaste utvecklingen inom så olika områden som

- Förhållandet mellan forskning och praxis i matematikundervisningen
- Resonemang, bevis och bevisföring i matematikundervisningen
- Matematikklärarutbildningen
- Hur test och prov påverkar matematikundervisningen
- IKT i matematikundervisningen

Resultaten från dessa undersökningar kommer att bli presenterade delvis i plenum, delvis i parallellföredrag.

4 *Ämnesgrupper:*

[1] efter idé och underlag av Ingvill M. Holden

Det finns 29 ämnesgrupper med olika teman. Det vanskligaste med dessa är att välja vilken man vill vara med i, för här ska man vara med i samma grupp under hela kongressen. Här kommer det att vara presentationer och utbyte av nya ider och trender i forskningen inom de aktuella ämnena.

5 *Diskussionsgrupper:*

Det finns 24 olika teman för diskussionsgruppena. Här ska det inte förekomma presentationer av artiklar. Deltagarna ska delta aktivt i diskussioner och bidra med egna erfarenheter och reflexioner. Gruppledarna kommer att lägga ut aktuella frågor och bakgrundslitteratur på web-sidorna i god tid före kongressen.

6 *Tematiska eftermiddagar:*

Under eftermiddagen torsdagen den 8:e juli kommer programmet att läggas upp i fem paralleller, var och en i form av minikonferenser med parallella underteman. Det kommer att vara fokus på forsknings- och utvecklingsarbete, och man kan skifta mellan olika undertemata.

7 *Verkstäder:*

Dessa kommer att vara baserade på att deltagarna ska få erfara nya idéer genom aktivt deltagande. De olika verkstäderna ("workshopparna") kommer att vara beräknade för olika målgrupper som lärare, studenter och forskare. Det ska röra sig om små grupper på cirka 30 till 40 deltagare, och de som anmäler sig först får vara med. Uppläggen på de olika 'workshoparna 'kan vara:

- Alternativa upplägg för undervisning och lärande
- ett icke-traditionellt tema för matematikundervisningen
- speciella forskningsmetoder
- innovativt bruk av IKT i matematikkundervisningen
- ett sätt eller en metod för analys av videoinspelning, elevarbeten, klassrumssituationer eller liknande
- olika sätt att läsa, skriva eller evaluera 'papers' i matematikdidaktik

8 *Posterpresentationer:*

Det kommer att göras plats för flera hundra posters, där deltagare kan presentera egna posters med undervisningsupplägg eller forskningsresultat.

9 *Nordisk presentation:*

Eftermiddagen den 6:e juli ska lärare från hela Norden presentera och ge en bild av matematikundervisningen i alla de nordiska länderna. Här kommer SMDF, SMaL och matematikföreningarna i de andra nordiska länderna också att ge presentationer. Dessutom kommer den första stora nordiska finalen i KappAbel att arrangeras under kongressen på kvällarna den 6:e och 7:e juli.

10 *Det matematiska cirkusen:*

För att bryta lite med det mera stela och formella, har vi ett helt nytt erbjudande i ICME-sammanhang. Lärare från hela Norden ska bidra till en matematisk cirkus, där de ska leda aktiviteter för barn och unga. Aktiviteterna kommer att försiggå i tält utanför föreläsningslokalerna, där aktiviteterna i varje tält kommer att vara baserade på ett bestämt tema. Temana är:

- spel och pyssel
- etnomatematik
- teknomatematik
- matematiktävlingar
- matematik och konst
- matemagi
- matematik i vardagen

Cirkusdirektörerna är Vagn Lundsgaard Hansen `v.l.hansen@mat.dtu.dk` och Ingvill M. Holden `ingvill.holden@matematikksenteret.no`

11 *Erfarenhetsutbyte i grupper:*

Detta ska vara små grupper på 10-20 medlemmar som kommer tillsammans för att dela sina erfarenheter från ett på förhand bestämt tema. Här kan enskilda personer eller grupper sända in förslag om att etablera en grupp.

12 *Sveriges deltagande:*

I planeringen av kongressen har vi tänkt oss 500 deltagare från Sverige. För att nå dit behöver vi din hjälp. Sprid detta budskap till alla matematiklärare du kan nå. Försök att personligen värva minst två deltagare. För du har väl anmält dig själv redan?

13 *En gång i livet?:*

ICME-kongressen äger rum i Norden för första gången någonsin i år. Av allt att döma är detta en 'once in a lifetime opportunity'. Det kommer att dröja mycket länge innan kongressen, som är en helt unik upplevelse, sker i ett nordiskt land igen. Missa inte denna chans till att vara med om en stor matematikdidaktisk händelse.

14 *Du själv:*

Alla som är inblandade i det nordiska arbetet med att arrangera ICME-10 önskar att visa världen vad vi menar med god matematikundervisning. Därför har vi behov av DIG som deltagare i alla de olika arrangemangen under kongressen, vare sig du bidrar under den nordiska presentationen, på matematisk cirkus, eller är en aktiv och intresserad deltagare i de olika programpunkterna.

15 *Ta familjen med:*

Det blir olika erbjudanden för familjemedlemmar som inte deltar på kongressen, och en hel dag är avsatt till utflykter för alla deltagarna med familjer. Det finns många alternativa övernattningsmöjligheter.

Vi ses i Köpenhamn den 4:e till 11:e juli!

- ◇ -

Läsarreaktioner

```
From: linusson@mai.liu.se
Date: Tue, Mar 23, 2004 11:39
To: ulfp@math.chalmers.se
```

Bäste Ulf,

Ditt omdöme verkar ha tagit fikapaus när du skrev lustifikationer som
kommentar till minnesraderna av Gunnar Blom. Att göra sig lustig på döda
människors bekostnad tycker jag är högst olämpligt och uppmuntrar knappast
till fler inlägg från läsarna.
Nekrologer är inte den rätta platsen för vare sig satir eller politisk
polemik. Jag skulle uppskatta om du i fortsättningen sparade den till
debattsidorna.

En annan mer praktiskt inriktad förbättring av utskicket vore en stående
ruta på på [sic] t.ex. sista sidan med all kontaktinformation till SMS, hemsida,
vilka som sitter i styrelsen, deras ansvarsmoråden, deras email, din email
och dylik praktisk information samlad.

mvh

Svante

Svante Linusson
Professor in applied Mathematics
Linköping University

Uppdatering av palindromiska årtal

Listan av palindromiska primtal börjar

$$2, 3, 7, 11, 101, 131, 151, 181, 191, 313, 353, 373, 383, 727, 757, 787, 797, 919 \ldots$$

sedan blir det ett stort hopp. Jaak Peetre undrar om det finns oändligt många palindromiska primtal. När man tar produkter av palindromiska primtal som också är palindroma, finner man ett antal exemplevis $1331 = 11^3$, och mer allmänt ger multiplikation med elva t.ex. $1111, 1441, 1661, 1991$. En liten lek visar att det verkar högst otroligt att någon nu levande människa kommer att få uppleva ett nytt Blomskt årtal. I själva verket har Mikael Johansson vid SU gjort en systematisk sökning av palindromiska produkter av två palindroma primtal. Det minsta sådana (> 1991) är 3443. Jag misstänker att detta inte kommer att ändras om man tillåter tre eller flera faktorer(modulo uppenbara $2222, 3333$).

Svenska Matematikersamfundets Årsmöte

Lund 4 - 5 juni 2004

Program:

Fredag den 4 juni:

13.00	*Niels Dencker*	Pseudospektra för differentialoperatorer
14.00	*Judy Grabiner*	It's All for the Best
		(om varför matematiker trodde att naturen optimerade)
15.00		fika
15.30	*Steen Markvoorsen*	Om digitaliseringen av all matematik
16.30		Årets mottagare av Wallenbergpriset
	Arne Meurman	Julius Borcea
	Alexandru Aleman	Serguei Shimorin
18.30		gemensam middag

Lördag den 5 juni:

9.00	*Sandy Grabiner*	"Analys" (`title to be announced`)
10.00		fika
10.30		Årsmöte
11.30	*Torsten Ekedahl*	Årets Abelpristagare

Matematik och Matematiker

är titeln på den bok om svensk matematik som Lars Gårding skrev. Det är också så att tillgång på matematiker är en nödvändig men kanske inte fullt tillräcklig förutsättning för att matematiken ska utvecklas.

Svenska matematikersamfundet är enligt stadgarna en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Som jag skrivit tidigare så anser jag att för samfundet är vännerna minst lika viktiga som utövarna, och jag anser att det är en viktig uppgift för samfundet och för alla verksamma matematiker att arbeta för att matematiken får fler vänner.

Just nu känns det dock som om det är ännu viktigare att vi behåller de vänner vi har. Det är tyvärr inte alltid så lätt det heller. Matematiken är till sin natur kritisk - ny matematik accepteras inte utan att den åtföljs av ett hållbart bevis, och det ligger i den matematiska skolningen att lära sig att följa ett bevis så att man själv övertygar sig om att det är korrekt. Denna fostran är viktig för oss i vår roll som matematiker, men den kan ibland skjuta över målet när vi applicerar den utanför matematiken.

Vi har ofta svårt att uppskatta god vetenskap som inte är matematisk. Detta drabbar exempelvis olika former av tillämpad matematik. Om ett viktigt tillämpat problem blir löst med hjälp av matematik, så kan en lösning som använder enklare matematik ibland vara "bättre" än en som använder mer avancerad. Anledningen till detta är att matematisk modellering handlar om ett möte mellan verklighet och matematik vilket innebär att det inte i sig är matematik. Tyvärr är det ofta svårt att få matematiker att *uppskatta* den enkla lösningen.

Generellt sett brukar vi matematiker ha en tendens att bli mer kritiska, ju närmare oss själva en verksamhet fortgår. Detta är naturligtvis högst mänskligt - det är ju lättare att genomskåda ett dåligt arbete om vi tycker oss förstå det. Risken är bara att vi mäter annan verksamhet med matematikens stränga måttsystem.

Ett historiskt perspektiv

När jag för nästan två decennier sedan började studera matematikens historia så var det en sak som slog mig – de få kulturer som understödde matematisk forskning kunde räknas på ena handens fingrar, medan möjligheterna för matematiker att försörja sig genom att undervisa matematik alltid varit betydligt bättre. Till och med i den första kultur där vi tydligt kunnat se att det bedrevs matematisk forskning, i Grekland under det 5:te århundradet fvt (före vår tideräkning), så öppnade Platon en skola för att kunna samla matematiker. Detta är i och för sig inte så konstigt, att stödja matematisk forskning kan liknas vid att plantera träd, det tar som regel lång tid innan den ger avkastning, och eftersom de flesta mecenater är kortsiktiga och vill se resultat åtminstone under sin egen livstid, så är det få som velat stödja ren matematik.

Däremot finns det många historiska exempel på att härskare förstått att de behöver tillräckligt många undersåtar med tillräckligt goda kunskaper i matematik, och som därför understött undervisning i matematik. Med Arkimedes och kanske Vite som lysande undantag var det inte heller förrän efter Newton som stater började inse att matematiken kunde användas på nya sätt, och med början i Frankrike efter revolutionen och Tyskland något senare, så började det bedrivas forskning i matematik och matematisk fysik vid europeiska universitet.

Sedan dess har matematiken utvecklats på ett för utomstående närmast ofattbart sätt – speciellt i samspelet med fysiken – och även om matematiken vanligen legat före, så att det varit gårdagens matematik som använts i tillämpningar, så har staternas satsningar på matematik och matematiker kunnat betraktas som lönsamma investeringar.

Idag, när forskningsfinansiärer blivit alltmer kortsiktiga så har vi matematiker haft svårt att hävda oss. När det gäller matematiskt viktiga projekt vet vi inte om de kommer att lyckas, och för mindre viktiga men kanske säkrare projekt så räcker det inte med att de har en klar matematisk inriktning – förutom att vi inte kan utlova kortsiktig ekonomisk avkastning, så har vi sällan ens en självklar framtida användning att hänvisa till.

Idag, liksom i gångna tider och förmodligen inom överskådlig framtid, så består matematikernas värde (för dem som har makten över våra pengar) främst i att vi kan dela med oss av våra kunskaper till dem som är ”bättre än vi på att använda dem”. Det är de som använder matematiken, och alla dem som tillsammans med oss lär ut den, som gör det möjligt för några få att få ägna sig åt matematisk forskning. Det är de som ska vara våra vänner.

Sten Kaijser

- ♢ -

Kritik över kritiker

Sten Kaijser

Den svenska 1700-talsskalden Thomas Thorild tog en gång så illa vid sig av kritik som riktades mot honom att han skrev en berömd försvarsskrift med ovanstående titel. Eftersom det är en skrift på över 100 sidor så har jag inte tid att läsa den innan jag skriver min egen kortversion på samma tema.

När jag för en liten stund sedan ville citera Thorild så trodde jag att jag sittande vid datorn på institutionen inte skulle ha tillgång till Thorilds egen skrift, men insåg plötsligt att vi lever i en ny tid, så jag bad Google om hjälp och plötsligt fick jag upp nät-sidan

http://www.svenskaakademien.se/SVE/klassiker/pdf/Thorild.pdf

och där fanns den, alla 100 sidorna.

Anledningen till att jag nu vill citera Thorild är att jag liksom han tagit illa vid mig av en recension. Det gäller Ulfs recension av Anders Karlqvists bok om Hilberts problem i detta utskick, och eftersom jag inte läst boken så kan jag inte nu avge en egen recension av den, däremot kan jag i Thorilds efterföljd ge en kritik över kritiker.

Jag vill också, innan jag fortsätter, nämna att jag känner både Ulf och Anders, och tycker bra om dem båda, och att jag tar illa vid mig kan naturligtvis åtminstone delvis bero på att jag uppskattar Anders. I samband med att jag förberedde de tyvärr inställda utbildningsdagarna, så bjöd jag in Anders till den traditionella middagen. Jag visste då inte om att hans bok om Hilberts problem redan var skriven och på väg att ges ut. Däremot beskyllde jag honom i mitt inbjudningsbrev för att "dra skam över svensk matematik", jag tyckte nämligen att det var och är en stor skam för svensk matematik att när det förekommer matematik i Forskning och Framsteg, så brukar det inte vara yrkesmatematiker som skriver, utan en polarforskare. Jag anser fortfarande att det är en skam att vi yrkesmatematiker inte kan skriva artiklar som passar ens denna, den mest seriösa och inflytelserika populärvetenskapliga svenska tidskriften, utan att den som lyckas är just Anders Karlqvist.

För att återgå till min egen kritik över kritiker så börjar jag med att citera min föregångare som uppställde tre lagar som han tyckte att en kritiker bör lyda. Den första lagen är att

Veta vad man skall döma

vilket jag tycker är högst relevant i detta fall.

Ulf inleder sin recension med allmänna funderingar om popularisering av matematiken där han först konstaterar att det är så gott som omöjligt att ge en ickematematiskt skolad läsekrets en *vetenskaplig* (min kursivering) förståelse för ämnet. Detta är visserligen, åtminstone för mig, självklart, men detsamma gäller exempelvis teoretisk fysik. Ändå är fysikerna angelägna om att delge allmänheten sina tankar, medan vi matematiker slutar att berätta så snart vi misstänker att den vi berättar något för inte kan följa våra tankegångar.

Jag vill gärna föra en debatt med Ulf om hur han och jag tror eller anser att matematik ska populariseras, men jag tycker inte om meningar som "tyvärr består populärvetenskap, speciellt i matematik av urvattning". Syftet med populärvetenskap är att ge intresserade läsare, som varken har relevanta förkunskaper eller tillräckligt med tid, en inblick i vad vi håller på med. För mig hör ordet "urvattning" inte hemma i detta sammanhang. Det är inte med förklenande ord som vi ska recensera populärvetenskapliga böcker i matematik.

Jag har ingenting emot skarp saklig kritik i samfundets utskick, men jag tycker inte om recensioner där kritiken främst framförs med hjälp av förklenande omdömen.

Till nästa nummer av utskicket hoppas jag att många av utskickets läsare själva ska ha läst "Århundradets matematik" och jag hoppas att åtminstone några ska vilja skriva egna recensioner, och speciellt hoppas jag att jag själv ska vara en av dem.