Svenska Matematikersamfundet

MEDLEMSUTSKICKET

1 oktober 2005

Redaktör: Ulf Persson
Ansvarig utgivare: Olle Häggström

					五		六	二
四		二		七				
				四				
五							九	
		七		三		五		
	九	八					七	
	一		七					八
			三	八	六			
		四				七		

Gårding minns

Sudokun: *Paul Vaderlind* Ryska skolproblem: *Andre Toom*
Granska läroböckerna: *Gerd Brandell* Gowers on Mathematics: *Ulf Persson*
Högskoleverkets Rapport: *Ola Helenius*
Regeringens Matematiksvek: *Emanuelsson, Johansson, Mouwitz*
Matematikernas eget förlag: *Mikael Möller*
Einstein: *Jan-Erik Björk* **Beurlingsymposiet** *i Uppsala, 4 november*
höstmöte i Karlstad 25-26 november *Tema: Juniora matematiker*

UTSKICKET

utkommer tre gånger per år I Januari, Maj och Oktober. Manusstopp är den första i respektive månad

Ansvarig utgivare:	*Olle Häggström*
Redaktör:	*Ulf Persson*
Adress:	*Medlemsutskicket c/o Ulf Persson* *Matematiska institutionen* *Chalmers Tekniska Högskola*

Manus kan insändas i allehanda format `.ps, .pdf, .doc` Dock i tillägg önskas en ren text-fil. Alla texter omformas till `plain tex`

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem betala in avgiften på samfundets `plusgirokonto 43 43 50-5.`
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om Du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter (per år)

Individuellt medlemsskap, *200 kr*
Reciprocitetsmedlem *100 kr.*
(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal):
Doktorander gratis under två år
Gymnasieskolor: *300 kr.*
Matematiska institutioner: *Större 5 000 kr, mindre 2 500 kr*
(institutionerna får sälva avgöra om de är större eller mindre).
Ständigt medlemsskap: *1 500 kr (engångsinbetalning)*
2500 kr efter 1 januari 2006

Man kan även bli individuellt medlem av EMS genom att betala in 200 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

HEMSIDA: `http://www.matematikersamfundet.org.se/`

Här återfinnes bl.a. protokoll från möten

STYRELSE:

ordförande *Olle Häggström*
`031 - 772 53 11`
`olleh@math.chalmers.se`

vice ordförande *Nils Dencker*
`046 - 222 44 62`
`dencker@maths.lth.se`

sekreterare *Johan Jonasson*
`031 - 772 35 46`
`jonasson@math.chalmers.se`

skattmästare *Milagros Izquierdo Barrios*
`013 - 28 26 60`
`miizq@mai.liu.se`

5:te ledamot *Anette Jahnke*
`0730 - 69 56 95`
`anette.jahnke@hotmail.com`

ANNONSER

(Dessa publiceras inom en ram som denna)

helsida 3000 kr
halvsida 1500 kr
mindre 750 kr

Annonser i tre konsekutiva nummer ger endast dubbla priser d.v.s. 1/3 rabatt

Annonser inlämans som förlaga
samt i förekomamnde fall som text-fil, Dessa formateras om i PostScript

Detta Nummer

Samfundet har en ny ordförande, och till vissa delar därmed en ny styrelse. Detta kommer dock ej att påverka kontinuiteten varken i medlemsutskickets form eller innehåll, som läsaren snart kan förvissa sig om. Som vanligt, efter detta inledande stycke så presenteras ordförandens ledare. Denne bidrager ytterligare med en debattartikel som i något modifierad form nyligen publicerades i Ny Teknik skriven i hans egenskap som ordförande för samfundet. Denna hänvisar bland annat till en Högskolerapport författad av Ola Helenius och Anders Tengstrand, som presenteras av den juniore författaren samt kritiseras av Arne Söderqvist. Vidare finner man en hänvisning till den nya flugan - Sudoku, och jag har bett Sveriges främste expert på detta - Paul Vaderlind, att skriva om den ur ett historiskt och matematiskt perspektiv. Detta har även inspirerat till titelsidans illustration.

Häggström berör också Matematikdelegationen i sin ledare. Denna sjösattes med stort buller och bång under Östros tid som utbildningsminister för två år sedan, men när den väl kom i land igen, så hade Östros ersatts av Pagrotsky, vars adminstration tycks ha andra skutor i åtanke. Lasten lossas inte i hamn, och även om matematiker må vara ovetande och dessutom luttrade så är inte NCM det, utan de tre tunga namnen - Göran Emanulesson, Bengt Johansson och Lars Mouwitz slår larm på Utskickets sidor.

Den ryske matematikern Andre(i) Toom gav, ett i mitt tycke, mycket intressant föredrag på förra årsmötet om matematiska problem (benämnda tal) i den ryska skolundervisningen. Jag bad honom om ett kondensat för utskicket. En fylligare artikel planeras för ett kommande nummer av *Nämnaren*. Detta leder osökt till Gerd Brandells artikel, också detta ett beställningsarbete. Brandell har tidigare i National Kommittén för matematik tagit föreslagit en systematisk granskning av matematiska läroböcker. Ett initiativ som jag tycker förtjänar all uppmuntran och i vilket samfundets medlemmar kan spela en signifikant roll. Det är min förhoppning att hennes artikel skall utgöra ett startskott, och intresserade läsare ombedes höra av sig.

Mikael Möller föreslår ett gemensamt bokförlag för matematiker och statistiker, bland annat för att främja det egna modersmålet. Jan-Erik Björk vill avliva myten om Einstein som den svage skoleleven. En allmännt utbredd uppfattning som har varit till skada. Därtill så bidrager han även med en längre artikel om Einstein och matematiken, som har speciell aktualitet i dagarna i och med att årets Nobelpris i fysik har tillkännagetts. Och slutligen bidrager jag med en recension av ännu en matematisk populärvetenskaplig bok, denna gång författad av E.T.Gowers. Den minnesgode läsaren erinrar sig säkert att Olle Häggström redan i marsnumret 2004 behandlade denna bok i utskicket. Detta hade jag dock glömt tills han påminde mig om det. Dock så beslutar jag att trots allt inkludera denna anmälan ty även om O.H. må ha sagt det väsentliga om boken så innehåller min några konkreta exempel. Till Gowers och kombinatoriken, eller som det numera heter - den diskreta matematiken har vi anledning till att återkomma i ett senare nummer.

Ulf Persson (redaktör) Göteborg den 4 oktober, 2005

Några reflektioner av samfundets nya ordförande

- *Olle Häggström* -

Vid samfundets årsmöte i Göteborg den 4 juni i år valdes en ny styrelse bestående av undertecknad (ordförande), Nils Dencker (vice ordförande), Johan Jonasson (sekreterare), Milagros Izquierdo Barrios (skattmästare) och Anette Jahnke (femte ledamot). Kontinuiteten i förhållande till den förra styrelsen säkerställs i och med att Milagros och Anette omvalts på sina poster, medan jag själv i enlighet med praxis tar steget till ordförandeposten efter att i två års tid ha fungerat som vice ordförande. För förnyelsen i styrelsen står alltså Nils och Johan. Speciellt Johan har rivstartat sitt arbete i styrelsen genom att kavla upp ärmarna och ta itu med det gamla bekymret med det otympliga medlemsregistret, som nu förs över på ett mer ändamålsenligt format och blir användbart på ett långt smidigare sätt än tidigare.

Jag vill ta detta tillfälle i akt att rikta ett varmt tack till de avgångna styrelseledamöterna Sten Kaijser och Fan Ming för deras ypperliga insatser som ordförande respektive sekreterare under den gångna tvåårsperioden. Särskilt tacksam som nytillträdd ordförande är jag över att Sten som en av sina sista ordförandeåtgärder försäkrade oss om ytterligare tre års stöd om 300 000 kr per år från Marcus och Marianne Wallenbergs Stiftelse, så att vi kan fortsätta utdela det för svensk matematik så viktiga Wallenbergspriset.

♢ ♠ ♢

Vad har vi då att se fram emot de närmaste två åren? Någon radikal kursändring till följd av den nya styrelsesammansättningen är knappast att vänta. De gångna två åren har varit ovanligt händelserika med bl.a. *4ECM* och *Matematikdelegationen* som viktiga inslag, och möjligen kan det vara frestande att tänka sig att de närmaste åren blir jämförelsevis stillsammare. Mot detta vill jag emellertid peka på följande. Trots att Matematikdelegationens betänkande sedan något år tillbaka är färdigställt (och, vad det verkar, lämnats väsentligen utan åtgärd av regeringen) så är debatten och diskussionerna kring svensk matematikutbildning på alla nivåer minst lika aktuell nu som någonsin – och kommer rimligtvis så att förbli de närmaste åren. Här har Svenska matematikersamfundet en fortsatt mycket viktig roll att fylla.

Vad gäller opinionsbildning och offentlig debatt har jag redan hunnit med ett par ordförandeinsatser i den riktningen. I juni månad gick jag samman med Anders Flodström och Jan-Eric Sundgren (rektorer för KTH och Chalmers) om ett inlägg i Svenska Dagbladet där vi skarpt kritiserade Skolverkets planer på att – trots alla larmrapporter om vikande matematikkunskaper – *skära ned* matematikobligatoriet på gymnasiets Naturvetenskapsprogram (NV).[1] Två skolverkstjänstemän gav ett något förbryllande svar där de bl.a. motiverade nedskärningen med att NV-programmet annars riskerar förlora (och nu citerar jag ordagrant!) ”elever som vill inrikta sig mot andra områden än matematik, naturveten-

[1] `http://www.svd.se/dynamiskt/brannpunkt/did_9944446.asp`

skap och teknik”.[2] Under hösten har signaler från Skolverket inkommit som tyder på vissa förbättringar i deras förslag, men sista ordet är ännu inte sagt.

Min andra insats på opinionsbildningsområdet rörde Högskoleverkets aktuella rapport *Nybörjarstudenter och matematik*, författad av Ola Helenius och Anders Tengstrand.[3] Ny Tekniks debattredaktion beställde en artikel av mig, men valde att korta ner den en smula här och var i den version som publicerades i september; den fullständiga versionen återges på annan plats i detta Medlemsutskick. Jag ber läsaren ha i åtanke att det fanns betydligt mer att säga om Helenius och Tengstrands rapport än vad som fanns utrymme för ens i den icke nedkortade versionen av min artikel.[4]

♢ ♠ ♢

På samfundets program för innevarande läsår står bl.a. ett höstmöte i Karlstad den 25-26 november, och ett årsmöte i Stockholm den 9-10 juni. Mötet i Karlstad, som annonseras på annan plats i detta utskick, kommer att inriktas på bidrag av juniora matematiker (doktorander och nyblivna doktorer), medan planeringen för årsmötet i Stockholm fortfarande är på skisstadiet. Jag hoppas båda mötena blir välbesökta! OH

\- ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ -

Titelsidan

					五		六	二
四		二		七				
				四				
五							九	
		七		三		五		
	九	八					七	
	一		七					八
			三	八	六			
		四				七		

Titelsidan visar, som de flesta av er förstår, en sudoku, i själva verket en av dem som Vaderlind presenterar i sin artikel om den nya japanska flugan. Vilken överlåter jag åt läsaren att utröna. Tecknen är de kinesiska för 1-9, varav tre av dem bör vara självklara. Jag vet inte huruvida japanerna använder dessa tecken i sina sudokun. Jag misstänker att de kinesiska taltecknen fyller samma funktion som de romerska gör för oss. Men i vilket fall som helst frestelsen att fylla i med dessa tecken var mig oemotståndlig, speciellt som jag vid ett tidigare tillfälle snickrat ihop dem i PostScript. UP

[2] `http://www.svd.se/dynamiskt/brannpunkt/did_9957188.asp`

[3] `http://web2.hsv.se/publikationer/pressmeddelanden/2005/050818_ny.shtml`

[4] Exempelvis hade jag kunnat kritisera rapporten för dess inte alldeles välavvägda kommentarer om ett visst beräkningstekniskt inriktat pedagogiskt projekt på Chalmers. Att jag avstod från just detta var betingat inte enbart av utrymmesskäl, utan även av en önskan att inte framstå som om jag bär på en monoman fixering vid detta projekt och dess ”primus motor”. (Ajdå, gjorde jag det i alla fall?)

Mitt Universitet

- Lars Gårding -

Första intryck och första matematikstudier

Pappa hade bestämt att jag skulle läsa matematik i Lund och samtidigt ta med sådana ämnen att jag kunde bli försäkringsmatematiker. Detta var förutsättningen för mina studier som betalades av pappa.

Villkoren för studier vid universitet var enkla och klara. Den teoretiska lärogången var densamma i alla ämnen. Kunskaper föreskrivna ör en termin och redovisade i tentamina gav ett betyg och analogt för två och tre betyg. En mycket lyckad tentamen gav spets, dvs betyget räknades åtminsone informellt som ett halvt steg högre. För de flesta tog studierna längre tid än den föreskrivna, en termin två terminer osv. På sex betyg i valfri kombination blev man filosofie kandidat, på samma merit i en för skolan lämplig kombination plus en kurs i pedagogik blev man filosofie magister och kompetent att undervisa i skolan. Sedan kom licentiattexamen i samråd med professorn i ämnet och då var man licentierad att författa, utge och försvara en doktorsavhandling. Varje år promoverades ett antal nya doktorer vid universitetets avslutningsfest i slutet av maj.

Jag kom till Lund i början av oktober 1937 efter en månads manöver i gränstrakterna mellan Östergötland och Småland. Det var påfrestande att byta liv. I militärlivet är man aldrig ensam i studietillvaron gäller motsatsen. De flesta behövde en övergångsperiod på ett par veckor innan studiefliten infunnit sig.

Jag hade bett en excerciskamrat Brahme att via sina systrar tinga ett rum. Det blev hos familjen Jönsson i ett nybyggt hus vid Södra Esplananden, 30 kronor i månaden. Samtidigt kostade tre mål mat per dag 90 kronor på Studentkårens utmärkta matställe Konviktet. Pappa tjänade vid den tiden ungefär 1000 kronor i månaden och kunde utan större uppoffringar underhålla både mig och Per.

Den ganska kompakta staden Lund och invånarnas dialekt föreföll mig i början ganska främmande. Ett stegvis närmande tog sin början. Familjen Jönssons son, jämnårig med mig, var en entusiastisk medlem i föreningen Det Gamla Lund och tog mig på långa exkursioner genom stadens äldre sevärdheter. Senare, när vi blivit mer bekanta, frågade han mig hur man bär sig åt för att tala med flickor. Jag kunde bara ge honom vaga anvisningar men det dröjde inte läge förrän han meddelade mig att hans bekymmer var över.

Jag åkte också till Malmö i något ärende och förskräcktes vid åsynen av de många försäkringsbolag som kantade Stortorget. Skulle detta bli min framtid?

Mamma tvättade mina smutskläder. En gång i veckan gick jag till posten på Östra Mårtensgatan och lämnande in mitt paket. Efter några dagar kom det tillbaka med rena kläder. Jag skrev också hem ganska regelbundet. Ett stort plus i mitt nya liv var den cykel av märket Huskvarna som min farbror Emil senare skickade mig.

Min första åtgärd på universitetet var att göra bort mig vid inskrivningen. Det fordrades ett fotografi och jag företedde också ett sådant för den imponerande stadsfiskalen Redstam, men mitt gick inte att klistra in i tentamensboken. Tillrättavisning och order att komma igen. En annan inskrivning, den i Östgöta nation gick däremot smärtfritt. Nationerna delade ett rum i Akademiska Föreningen och hade mottagning där ett par timmar i veckan. Nationens kurator, Alarik Rynell, framhöll för mig och min studentkamrat Gunnar Kvissberg, som börjat läsa medicin, att det var vår plikt att gå på den terminliga nationsfesten och vi lydde honom. I Akademiska Föreningens vestibul hängde en flott och porträttlik affisch som föreställde nationens inspektor domprosten Brilioth på väg till Växjö för att bli biskop medan en mindre figur, professor Amos Lindblom, böjde sig ned för att fatta ordförandeklubban. Vi köpte ett kort av den. Vi inställde oss också till det ceremoniella Hälsningsgillet den 4 oktober, den dag då Tegnér skrivits in vid universitetet. Vi tågade in i Akademiska Föreningens stora sal nationsvis. Vid uppropet trodde jag att ordet Helsingkrona var ett skämt men det betydde Helsingborg-Landskrona nation. Någon kulturpersonlighet höll ett högstämt tal, men vem det var och vad han sade har försvunnit ur minnet.

Efter den 4 oktober skulle också den vita studentmössan åka av och alternativet hette hatt. Jag och Kvissberg köpte våra i en ganska mörk lokal. I dagsljuset såg jag att min hade en obehaglig blå färg. Senare har jag alltid försökt undvika hatt genom att använda basker eller mössa.

Min väg till den matematiska institutionen var en enda uppförsbacke som först gick genom ett område som kallades Nöden och ännu till stor del beboddes av judar som i slutet av 1800-talet flytt från ryska pogromer. Till slut, via Akademiska Föreningen och biskopens hus, nådde jag matematiska insitutionen på Sölvegatan 8, ett före detta småskolelärarinneseminarium som matematik delade med statistik och dit matematiken nyss flyttat från översta våningen i det gamla Lundagårdshuset. Statistiken hade nedre våningen med en enkel föreläsningssal, ett bibliotek och professorns rum. På dörren hängde ett imponerande visitkort, Sven Dag Wicksell, fil. och med. doktor. Nästa våning med samma inredning tillhörde matematiken och på tredje våningen hade de två professorerna i ämnet, Marcel Riesz och Nils Zeilon, sina rum.

Den s.k. propedeuten i matematik hade redan börjat. Vi var kanske femton i föreläsningssalen som detta år började läsa matematik. Många hade redan läst kemi och fysik och sparat matematiken till sist i en magisterexamen där också pedagogik fordades. Föreläsare var docent Frostman. Han var påfallande solbränd och frisk och jag föreställde mig en angenäm framtid som docent.

Frostman skramlade med nycklarna i byxfickan efter varje viktig punkt, t.ex. vid definitionen av gränsvärde: om man till *varje* positivt ε på *något* sätt kan finna ett δ.... eller ett *nödvändigt* och *tillräckligt* villkor att ..... . I skolan hade bevisen aldrig gått fram och tillbaka. Jag fick tänka till ordentligt för att förstå innebörden hos de två adjektiven. . Mitt andra ämne var statistik, en kurs som lästes tillsammans med ett antal humanister som ville avlägga den nya examen pol.mag., uttytt politices magister. Att summan av avvikelserna från medelvärdet är lika med noll var för dem ett mysterium. Jag försökte förklara sammanhanget för Irina Handamirov, den ryske lektorns dotter.

Första matematikboken var Leonard Eugene Dicksons A First Theory in the Theory of Equations. Vad jag inte visste då var att Dickson var en framstående talteoretiker och framgångsrik läroboksförfattare. Det var mycket som för mig var ovant i Dicksons bok, mycket därför att det inte slarvades med bevis. Jag svettades åtskilligt över hans induktionsbevis att ett symmetriskt polynom i rötterna till en algebraisk ekvation med högsta koefficienten ett är ett polynom i dess koefficienter. Det hände några kvällar att min läsning ledde till svindel som botades med en promenad i kvällsluften. Mina drömmar färgades också för första gången av matematiken. Små tjusiga andragradspolynom dansade kring mig i sömnen. Jag läste också de la Vallée-Poussins lärobok i analys och köpte som jag minns det en påfallande dyr bok av Somerville som hette Analytical Geometry in Three Dimensions. I den prisades en serie böcker av den engelske geometrikern H.F. Baker som hade inspirerats av den italienska skolan. Detta fick mig att en tid säga att mitt mål var att resa till Italien och läsa geometri. I studiehandboken stod det också att Hardys bok Pure Mathematics rekomenderades för intresserade. Två timmar varannan vecka höll det lägre seminariet räkneövningar under ledning av rektor Sjöberg vid flickskolan. I regel var det fråga om gamla tentamensproblem.

De två professorer som var den egentliga anledningen till att jag kom till Lund och inte Uppsala var Marcel Riesz och Nils Zeilon. De höll i princip fyra timmars föreläsningar i veckan. Varannan vecka hölls det högre seminariet. Allt detta gick över min horisont.

En ordinär students första och sista kontakt med professorerna skedde i regel vid en muntlig tentamen. Min kontakt med Riesz kom tidigare i hans som det då hette halvhöga seminarium som han ledde. Det lilla auditoret bestod av mig och ett par så kallade fil magar. Här fick jag för första gången uppleva matematisk disciplin med ordentliga, formella bevis och svårare problem. Jag kan här rekonstruera ett av dem. Olikheten $1 \leq \sin x/x$ var bekant då $|x| < \pi/2$. Problem: komplettera den med $\sin x/x \leq 1/(\cos x)^{1/3}$. Efter mycket besvär hade jag lyckats klara det kritiska fallet $x = 0$ och tyckte det räckte men Riesz tog mig ur min villfarelse och andra fick ta över. En enda gång kunde jag något bättre än de andra och det var genom att jag kom ihåg ett avsnitt i Hardys bok.

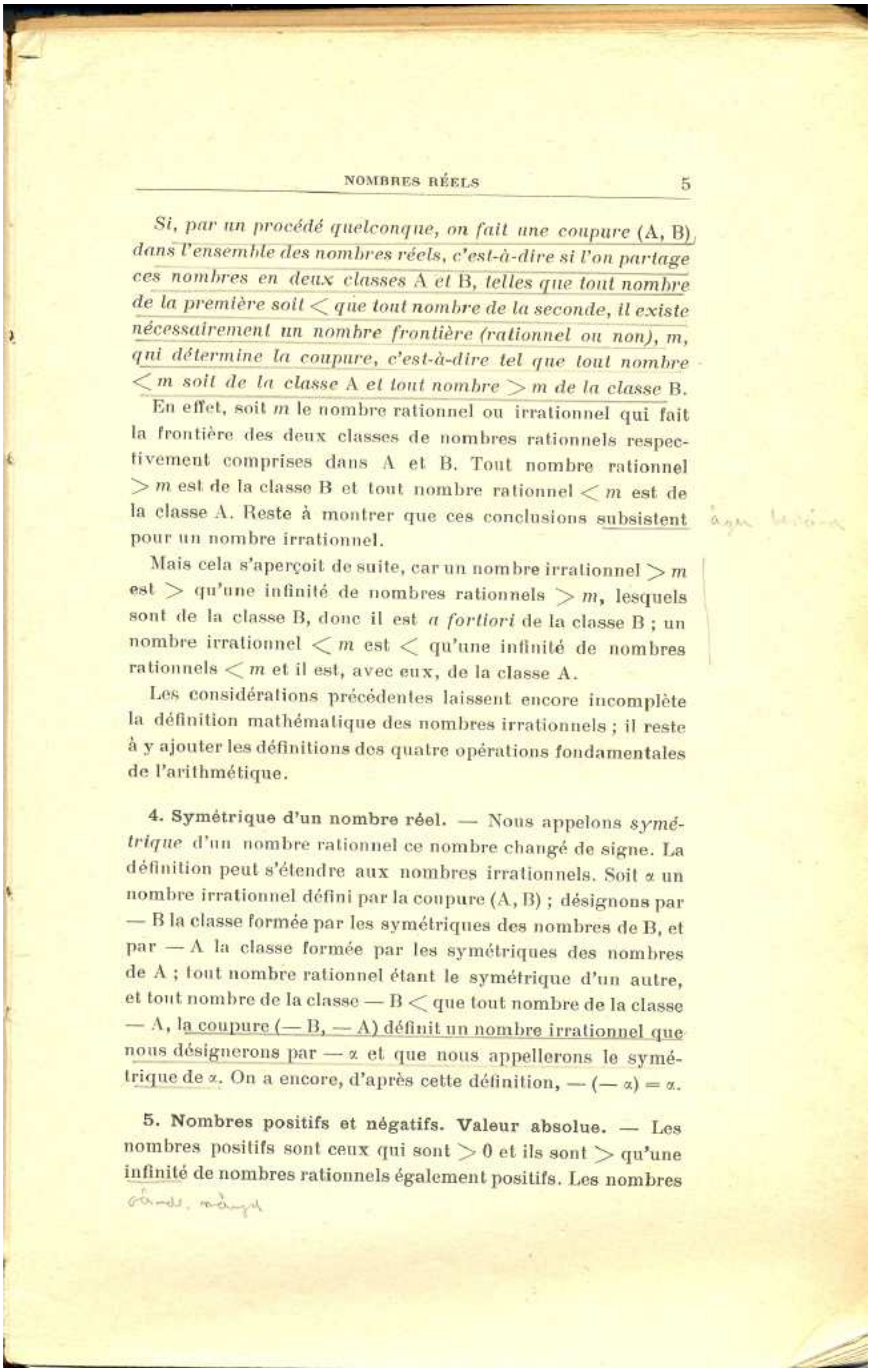
Mina matematiska studier medförde några mysterier, t.ex. de inledande avsnitten om reella tal i de la Vallée-Poussins bok som var oläsbara för de flesta. Men de värsta svårigheterna för det oskolade sinnet låg i projektiv geometri. Frostman sade en gång att det komplexa planet och det projektiva har två olika oändligheter. I det första fallet är det en punkt, i det andra en linje. Svårigheten var för mig det betydelsemättade ordet oändlighet. De imaginära cirkelpunkterna I och J var ännu svårare att acceptera. Ett år eller två senare då Riesz mycket djärvt frågat mig om jag kunde hålla ett föredrag om något som intresserade mig tänkte jag att det skulle vara intressant att diskutera sådana svårigheter och skrev ihop en inledning. Men jag var osäker och visade mitt utkast för Fritiofson, en äldre kamrat som höll på med sin licentiatexamen. Han läste igenom och sade sedan att "det låter som en psalm". Detta fick mig att avstå. Det är mycket senare som jag förstod och predikade för andra att vanligt språk förlorar större delen av sin vardagliga betydelse då det används om matematiska begrepp och konstruktioner. I seminariet fanns också Folke Lannér, ett par år äldre än jag men en jämlike i det att vi började läsa för tre betyg samtidigt. med mig,

Mina första matematikstudier avslutades i mars 1938 med en skrivning om gick bra och en muntlig tentamen för Frostman som gick mindre bra. Det gällde Abels sats att om $\sum a_n r^n$ konvergerar då $0 \leq r \leq 1$ så är summan en kontinuerlig funktion av r i samma intervall. Frostman frågade mig så ingående att jag till slut måste erkänna att jag inte förstått satsen. Han fick förklara den för mig.

Ibland såg jag mina matematikstudier som ensidiga och sa till mig själv ungefär följande. Alla föreläsningar här börjar alla på samma sätt: låt $f(x)$ vara en funktion.......

. Ska det bli det framtida livet? Jag ville också skaffa mig litterär bildning, läsa klassiska böcker, kunna språk bättre osv. Men sådant måste uppskjutas. Efter min första tentamen var det dags att börja andra delen av militärtjänsten. LG

Spår i bokhyllan


NOMBRES RÉELS 5

Si, par un procédé quelconque, on fait une coupure (A, B) dans l'ensemble des nombres réels, c'est-à-dire si l'on partage ces nombres en deux classes A et B, telles que tout nombre de la première soit $<$ que tout nombre de la seconde, il existe nécessairement un nombre frontière (rationnel ou non), m, qui détermine la coupure, c'est-à-dire tel que tout nombre $< m$ soit de la classe A et tout nombre $> m$ de la classe B.

En effet, soit m le nombre rationnel ou irrationnel qui fait la frontière des deux classes de nombres rationnels respectivement comprises dans A et B. Tout nombre rationnel $> m$ est de la classe B et tout nombre rationnel $< m$ est de la classe A. Reste à montrer que ces conclusions subsistent pour un nombre irrationnel.

Mais cela s'aperçoit de suite, car un nombre irrationnel $> m$ est $>$ qu'une infinité de nombres rationnels $> m$, lesquels sont de la classe B, donc il est *a fortiori* de la classe B ; un nombre irrationnel $< m$ est $<$ qu'une infinité de nombres rationnels $< m$ et il est, avec eux, de la classe A.

Les considérations précédentes laissent encore incomplète la définition mathématique des nombres irrationnels ; il reste à y ajouter les définitions des quatre opérations fondamentales de l'arithmétique.

4. Symétrique d'un nombre réel. — Nous appelons *symétrique* d'un nombre rationnel ce nombre changé de signe. La définition peut s'étendre aux nombres irrationnels. Soit α un nombre irrationnel défini par la coupure (A, B) ; désignons par — B la classe formée par les symétriques des nombres de B, et par — A la classe formée par les symétriques des nombres de A ; tout nombre rationnel étant le symétrique d'un autre, et tout nombre de la classe — B $<$ que tout nombre de la classe — A, la coupure (— B, — A) définit un nombre irrationnel que nous désignerons par $-\alpha$ et que nous appellerons le symétrique de α. On a encore, d'après cette définition, $-(-\alpha) = \alpha$.

5. Nombres positifs et négatifs. Valeur absolue. — Les nombres positifs sont ceux qui sont > 0 et ils sont $>$ qu'une infinité de nombres rationnels également positifs. Les nombres

Detta är ett facsimile av femte sidan av 18 upplagan av de la Vallée-Poussins *Cours d'Analyse I* som just behandlar de reella talen. Tyvärr har jag inte tillgång till Gårdings eget exemplar, dock till det gulnande och sönderfallande exemplar som tillhörde min bortgångne fader (Olof Persson) som studerade boken i slutet av 40-talet. (Och mycket riktigt. Av Lennart Sandgren rekommenderades han att lugnt hoppa över det inledande kapitlet om just reella tal). På den tiden var det självklart att en student skulle kunna läsa kurslitteratur inte bara på engelska utan även på tyska och franska. (van der Waerdens tyska orginalutgåva av hans *Algebra* var standardlitteratur på trebetygsnivå fram till omkring 1970). Parallellt med de bägge böckerna av la Vallée-Poussin båda figurerade även Hardys Pure Mathematics, som Gårding nämner, och som jag även mycket riktigt återfann i min faders bokhylla på 60-talet och som fascinerade mig mycket. Annan litteratur som tydligen var vanlig i Lund på 40-talet var Sommervilles *Analytic Geometry of three dimensions*, en tjock bok som min far varnade mig för. *forts sid 42*

Arithmetical Word Problems in Russia

- *Andrei Toom* -

In every society certain skills are expected of everybody. For example, if a Brazilian boy tells his mates that he cannot play soccer, he will be considered a nut. Mastery is expected from everyone, so everyone gets it.

Something similar takes place in Russia with respect to word problems. Presence, even abundance of word problems has been normal in Russian school for many decades. The difficulty of problems continually grows from one grade to another, then to olympiads, then to research. Here are a few short statements under which most Russians would subscribe:

- It is good for children to solve multi-step word problems already in elementary school, before starting algebra,.
- Children are motivated to solve arithmetical word problems because they are generally motivated to overcome difficulties, both physical and intellectual, and are willing to train themselves for that if the tasks are within their possibilities and the society approves it.
- Solving word problems is a good opportunity for the children to display and train creativity. The fact that the answer is unique and predetermined by the data by no means contradicts this.
- If you can solve a word problem without algebra, it is good for you. Generally, the more bare-handed you solve a problem, the better for you.
- It is normal, even necessary that teachers require correct, clear and explicit solutions and answers.
- The younger are children, the less they should be allowed to decide what to study. Solving arithmetical word problems in elementary school should be obligatory for every healthy child.
- The government should plan the minimal version of school studies and state the minimal level of difficulty of problems solved in every grade.
- Word problems do not need to be realistic in the literal sense. They are solved for the sake of general intellectual development rather than for a literal application to everyday life.

The following small selection contains arithmetical word problems of different levels taken from Russian sources with short comments.

The following problem is from a recent Russian textbook for the 2-d grade:

`Problem 1.` **Vintik and Shpuntik agreed to go to the fifth car of a train. However, Vintik went to the fifth car from the beginning, but Shpuntik went to the fifth car from the end. How many cars has the train if the two friends got to one and the same car?** `[Geidman.2.1,p.9]`.

The following problem is from a well-known russian book for children written by Nosov. Its main character Vitya Maleev did poorly in mathematics in the third grade and promised his teacher to train himself in solving problems from the 3-grade textbook. This is one of them.

`Problem 2.` **A boy and a girl collected 24 nuts. The boy collected twice as many nuts as the girl. How many did each collect?**

In Russia problems like this one are called *problems by parts*, because they can be solved using the notion of a *part*, which prepares children to use a letter to denote an unknown quantity. The author describes Vitya's process of thinking in much detail. First Vitya divides 24 by two and gets 12. May be, each collected 12 nuts? No, the boy collected more than the girl. Not knowing what to do, Vitya draws a picture of a boy and a girl. To express the fact that the boy collected two times more nuts than the girl, Vitya draws two pockets on the boy's pants and one pocket on the girl's apron. Then he looks at his picture and sees *three pockets*. Then an idea "like a lightning" comes to his mind: he should divide the number of nuts into the number of pockets! Thus he gets $24 : 3 = 8$. So each pocket contains 8 nuts. This is how many nuts the girl has. The boy has two pockets, so he has 8 times 2, which gives 16. Now Vitya can check his answer: he adds 8 and 16 and gets 24. Now he is sure that his solution is correct. He is very excited. Probably, this is the first time in his life that he solved a problem on his own. He goes to the street to tell somebody about it. A neighbor girl says: "This is a third-grade problem. We solved them last year." This does not diminish Vitya's joy and he is right: he made a discovery.

The following problem is from a recent Russian textbook for the 4-th grade:

`Problem 3.` **When Ivan Tsarevich came to the Magic Kingdom, Koschey was as old as Baba Yaga and Ivan Tsarevich together. How old was Ivan Tsarevich when Koschey was as old as Baba Yaga was when Ivan Tsarevich came to the Magic Kingdom?** `[Geidman.4.1,p.104].`

Ivan Tsarevich, Koschey and Baba Yaga are well-known characters of Russian folk tales. The problem is solvable, although it gives none number!

`Problem 4.` **Deniska can eat a jar of jam in 6 minutes. Mishka can eat a similar jar of jam two times faster. In how much time will they eat a jar of jam together?** `[Geidman.4.1,p.34].`

Deniska and Mishka are colloquial versions of common Russian names, which fit into the jocular style of this problem. However, this problem is very seminal. It introduces children into the realm of rates.

The following problem appeared first in a book by Perelman, then at a Moscow mathematical olympiad in 1940 and a few years later was included into a school problem book for 5-6 grades:

`Problem 5.` **A boat, going downstream, made a distance between two ports in 6 hours and returned in 8 hours. How much time is needed for a raft to make this distance downstream?** `[Berezanskaya,p.246].`

To solve it, we may take the distance in one direction as a unit of length and call it *one way*. Then the velocities of the boat downstream and upstream are *1/6 way/hour* and *1/8 way/hour* respectively. They are different because the current in one case increased and in the other case decreased the boat's velocity. Thus the velocity of the current is half the difference between them, that is

$$\left((1)/(6) - (1)/(8) \right) \div 2 = (1)/(48) \quad way/hour.$$

Velocity of the raft equals velocity of the current. To make one *way* with this velocity, one needs the quantity of hours, which is equal to 1 divided by 1/48, that is 48 hours.

`Problem 6.` `An ancient problem.` **A flying goose met a flock of geese in the air and said:** *Hello, a hundred geese!* **The leader of the flock answered to him:** *There is not a hundred of us. If there were as many of us as there are and as many more and half as many more and quarter as many more and you, goose, also flied with us, then there would be a hundred of us.* **How many geese were there in the flock?** `[Larichev,p.37].`

This problem may be solved in two ways, which is especially useful in introducing algebra. First you may call "one part" the quantity of geese in the flock. Then

$$1 \text{ part } + 1 \text{ part } + (1)/(2) \text{ part } + (1)/(4) \text{ part } + 1 = 100.$$

Collecting coefficients we get

$$1 + 1 + (1)/(2) + (1)/(4) = (11)/(4).$$

Thus 11/4 parts equals 100-1=99. Thus one part is 99 divided by 11/4, which is 36. This is halfway to algebra. Writing X instead of "part", we get an algebraic equation

$$X + X + (1)/(2)X + (1)/(4)X + 1 = 100,$$

which can be solved by algebraic means.

One very important quality of word problems is that they connect arithmetics and algebra with physics and geometry. Let us present two examples of this.

`Problem 7.` `A historical problem.` **A swimmer was swimming upstream Neva River. Near the Republican Bridge he lost an empty flask. After swimming 20 min more upstream he noticed his loss and swam back to find the flask; he reached it near the Leughtenant Schmidt Bridge. Find the velocity of current at Neva River if the distance between these two bridges is 2 km.** `[Larichev,p.208].`

This problem shows the power of the physical idea of relative movement. Let us place ourselves in the coordinate system moving with the stream. In this system the flask does not move when it is lost, while the swimmer swims first away from it, then towards it. His proper velocity is assumed constant, so he spends one and the same time swimming in both directions. But one of them took 20 minutes, so the other also takes 20 minutes, so the total time when the flask was lost is 40 minutes. Now we return to the coordinate system where we were before, and notice that the flask took 40 minutes to move from one bridge to the other, that is 2 km. So the velocity of the current is 2 km divided by 2/3 hour, which makes 3 km/h.

The following is a (slightly changed) word problem with geometric content, included in one of Perelman's books:

`Problem 8.` **A man sold firewood. To make standard portions, he always used one and the same rope, surrounded a pack of logs with it and brought it into houses on his back. One woman asked him to bring a double portion of firewood. The man proceeded as usual, only took a rope one and a half times longer than usual. The woman complained:** *Since I payed* [sic] *you a double fee, you should use a double length rope.* **The man replied:** *You are mistaken, mam. In fact, I brought you even a little more firewood than you requested.* **Who is right?** `[Perelman,p.27].`

To solve this problem, we have to make simplifying assumptions, as it is usual in applied science. We assume that the firewood surrounded by a rope is a cylinder, whose height is the length of the logs and base's circumference equals the lenght of the rope. Since the height of the cylinder is constant, the volume of the cylinder is proportional to the area of the base, which is proportional to the square of the radius or, which is the same, to the square of the circumference. So, if the length of the rope is multiplied by $3/2$, the amount of the firewood is multiplied by a square of this amount, which is $9/4$, which is really a little more than 2. The man was right.

REFERENCES

[B] E. S. Berezanskaya. *Collection of problems and exercises in arithmetics. For 5-th and 6-th classes.* 20-th edition. Uchpedgiz, Moscow, 1953. (In Russian.)

[G.2.1] B. P. Geidman a.o. *Mathematics. 2 grade. First half-year.* Moscow, 2004. (In Russian.)

[G.4.1] B. P. Geidman a.o. *Mathematics. 4 grade. First half-year.* Moscow, 2004. (In Russian.)

[L] P. A. Larichev. Collection of problems in algebra. Part I for 6-8 grades. "Uchpedgiz", Moscow, 1961 (in Russian.)

[P] Ya. I. Perelman. Amusing problems. Moscow, 2001. (In Russian.)

MATEMATIKLÄROBÖCKER FÖR SKOLAN

EN GRANSKNINGSPROCESS BEHÖVS

- *Gerd Brandell* -

Läroböcker i matematik har stort inflytande på elevernas kunskaper och attityder till ämnet. Man vet från olika studier att läroböckerna i hög grad styr hur eleverna arbetar och med vad de arbetar på lektionerna. Därför påverkar rimligen böckerna starkt elevernas kunskaper i matematik. För läraren är läroboken troligen den faktor som väger tyngst när hon/han planerar uppläggningen av kursen och de enskilda lektionerna. Valet av bok borde styras av elevernas behov, av lärarnas önskemål om arbetssätt och av andra lokala förhållanden, förutom av de krav som ställs av kursplanen och läroplanen. Vilket stöd finns för lärarna på en skola som vill undersöka olika läroböckers kvalitet? Den läromedelsgranskning som tidigare skedde i statlig regi, är avskaffad sedan många år. Det finns ett behov av en motsvarande värdering av läroböcker idag.

Vilka skulle då utgångspunkterna vara för en bedömning av läroböcker? Det finns givetvis en rad relevanta kriterier, som alla är viktiga. Överensstämmelse med läroplan och kursplan är givna krav. Motivering av matematiken utifrån tillämpningar och användning i olika sammanhang är viktigt. Val av exempel, övningsexempel, problem och projektuppgifter som tillsammans ger grund för ett varierat och effektivt arbete för elever med skiftande bakgrund och intressen bör vara ett annat givet kriterium. Olika varianter av böcker för samma kurs på olika gymnasieprogram upplevs av lärarna som mer eller mindre nödvändigt.

En central aspekt är att matematiken "didaktiseras" på ett konsekvent, sammanhängande, relevant och hederligt sätt. Den rätta balansen mellan ett formellt synsätt och en intuitiv framställning kan vara svår att hitta. Matematiken får inte trivialiseras, men inte heller formaliseras på en nivå som eleverna inte har möjlighet att förstå.

Den inneboende logiska strukturen i matematiken måste få plats. Den för högskolan traditionella "definition - sats - bevis"- strukturen är inte möjlig att använda genomgående. Man måste finna andra utvägar för att förmedla matematikens logiska uppbyggnad. Begreppen definition, sats och bevis används ibland. I många av böckerna kommer begreppen sats och bevis in sporadiskt och i mycket specifika sammanhang, t ex när det gäller Pythagoras sats. Författarna växlar mellan olika ord. Resonemang - eventuellt genomfört för ett exempel - kan leda till ett resultat som kallas "sammanfattning", men som lika gärna skulle kunna kallas sats. Ett resultat (en sats) kan sättas inom ram och markeras med färg, utan att annars markeras speciellt. Förutsättningarna är ofta oklara. Eleverna måste fråga sig varför man ibland använder ordet "sats" för vissa resultat, ibland inte.

Terminologin är givetvis central. Hur inför man nya termer, hur förklaras de, hur förklarar man generaliseringar av termer? Terminologin måste vara klar och överensstämma med vad som är accepterat. Men den matematiska terminologin är inte alltid enkel att förklara (vad menas till exempel med en formel?). Då måste författarna göra val som kan motiveras utifrån sammanhang och klarhet.

I vissa böcker lämnar författarna ofta åt eleverna att själva göra generaliseringar utifrån exempel. Det bäddar för missuppfattningar och kan troligen bidra till att eleverna uppfattar reglerna som godtyckligt valda och utan inbördes sammanhang.

Följande exempel från ett par serier av läroböcker visar på vilka svårigheter som kan uppstå.

Exempel 1, logiskt sammanhang

Följande gäller den för alla obligatoriska A-kursen. När potenser introduceras för heltalsexponenter så står det att ”vi inför skrivsättet” för positiva exponenter, medan för negativa exponenter (och noll) det handlar om en definition. Potenslagarna motiveras utifrån några konkreta exempel för positiva exponenter, medan lagarna för godtyckliga heltalsexponenter endast påstås gälla: ”Potenslagarna gäller nu för alla heltalsvärden”. Inget allmänt resonemang som bevisar lagarna finns med. När man går vidare till rationella exponenter motiveras definitionen utifrån ett konkret exempel följt av en ruta med en ”sammanfattning” och sedan påstår man frankt att ”Vi har nu visat hur definitionen kan utvidgas även till rationella exponenter.” Författarna förklarar inte varför man inte argumenterar för att definitionen blir entydig och för att potenslagarna gäller för alla rationella exponenter. Eleverna måste ha svårt att inse att de själva i det första fallet (heltalsexponenter) ska kunna förstå potenslagarna, i det andra fallet (rationella exponenter) inte kan förstå dem Hela framställningen andas en ad hoc inställning. Hade det kanske varit bättre att nöja sig med heltalsexponenter och eventuellt enkla rötter - i det sista fallet verkligen som ett skrivsätt? Alternativt kunde man göra en tydlig markering att rationella (eller reella) exponenter visserligen går att använda men är något som ligger utanför det som kan framställas sammanhängande i denna kurs.

Exempel 2, terminologi

Följande gäller C- och D-kurserna. Begreppet ekvation är centralt och har flera betydelser i skolkursen. Grundläggande är åtskillnaden mellan för det första ekvationer vars lösningar man söker och där man lär sig metoder för att lösa dem (ex: ekvationer av första graden, ekvationssystem, trigonometriska ekvationer), för det andra ekvationer som namn på funktionsgrafer och där man studerar egenskaper hos funktionerna utifrån ekvationen (ex: linjens ekvation, parabelns ekvation) och för det tredje ekvationer som beskrivning av punktmängder i planet och där man är ute efter geometriska egenskaper (ex: cirkelns ekvation, räta linjens ekvation). I de böcker jag sett på glider man mellan dessa användningar av begreppet ekvation utan att göra reda för att det finns olika betydelser.

En systematisk genomgång av de idag mest använda serierna av böcker och intressanta uppstickare skulle vara till stor nytta för lärare som söker efter den mest lämpliga läroboken för just sin skola. Ett första steg skulle vara att ta fram relevanta kriterier. Matematikersamfundet skulle kunna bidra med sakkunskap i en värderingsprocess av läroböcker för i första hand gymnasiet.

Inga Inbetalningskort skickas ut numera

Medlemmarna uppmanas att betala in på Plusgirot 434350-5. Notera att efter 1 januari 2006 höjes avgiften fär ständigt medlemskap till 2500 kronor.

Skattmästaren.

Einstein som skolpojke

- *Jan-Erik Björk* -

"Einstein var inget skolljus". Detta är en vitt utbredd missuppfattning som faller i god jord, ty bekräftar den inte allmänt spridda uppfattningar om att skolan, speciellt den gamla skolan, missgynnar kreativitet och uppmuntrar konformitet? Den kan jämföras med myten om att de stora banbrytarna alltid är missförstådda av sin omgivning, och därmed inge månniskor den falska illusionen om att dåliga studieresultat och den närmaste omgivningens ringaktning är indikation på genialitet. Verkligheten är på gott och ont inte slik, även om man i och för sig kan finna enstaka exempel om man letar tillräckligt länge. Men Einstein var i alla fall inget sådant exempel. Det är således inget fel att uppmuntra folk att vara duktiga i skolan. Begåvningarna tenderar att vara det oavsett om de strävar efter det eller inte. red.anm.

Möte med euklidisk geometri:

Alberts två år yngre syster Maja skrev 1924 en artikel om familjen Einstein och Alberts uppväxtår i München. Hans far Hermann Einstein samt farbrodern Jakob hade en elektroteknisk firma som var framgångsrik under hela 1880-talet fram till 1893 varefter verksamheten i München på grund av konkurrens och konjunkturnedgång gick i konkurs. Efter flytt till Milano 1895 startade firman en ny verksamhet där. Jakob var en framstående ingenjör som inspirerade den unge Alberts studier. Här följer ett stycke från Majas text som berättar om detta:

Som 13-åring skulle Albert i gymnasieskolans femte klass börja läsa algebra och geometri. Han hade redan tidigare med förkärlek löst komplicerade uppgifter i aritmetik. Under jullov och sommarferier brydde han sig inte om lek och umgänge med kamrater - han ville helst studera mer avancerade läroböcker i matematik än vad skolan erbjöd. Då han läste på egen hand nöjde han sig inte med böckernas bevis utan sökte själv finna ut dem. Han kunde sitta hela dagar försjunken med olika problem tills han funnit en lösning. Ofta fann han ett bevis med andra metoder än lärobokens. Hans farbror Jakob som hade en gedigen matematisk skolning stärkte hans ambitioner och gav honom även svårare uppgifter på prov. Här tillfogar Maja lite ironiskt: Jakob gab diese probleme, nich ohne gutmütigen Äusserrungen des Zweifels, ob er sie bewältigen könnte. *För det mesta lyckades Albert finna egna bevis, bl.a. för Pythagoras sats med andra metoder än lärobokens. När Albert lyckades med sådana upptäckter upplevde han stor lycka vilket Maja beskrev med orden:* Den Knaben überkam ein grosses Glücksgefühl, und schon jetzt war er sich des Weges bewusst, den ihn seine Fähigkeit wiesen

I Einsteins egen självbiografi *Nekrolog* beskriver han sina upplevelser då han fick börja läsa euklidisk geometri: *Vid tolv års ålder upplevde jag ett andra under av helt annat slag än tidigare i mitt liv. I ett häfte om euklidisk plangeometri som jag fick i min hand fanns exempelvis utsagan att de tre höjderna i en triangel skär varandra i en punkt - på intet vis* *en självklarhet men som ändå kunde bevisas med sådan säkerhet, att varje tvivel tycktes uteslutet. Denna klarhet gjorde ett obeskrivligt intryck på mig.*

Skolåren:

Albert Einstein föddes 14 mars 1879 i Ulm. Som en kuriositet kan nämnas att ett ordspråk från stadens blomstringstid under medeltiden var "Ulmense sunt mathematici", dvs. "Ulmsborna är matematiskt sinnade". 1880 flyttade familjen Einstein till München där Albert kom att bo femton år. Efter några år i folkskola skrevs Albert som 9-åring in i första latinklassen vid Luitpold-gymnasiet i Munchen där han kom att gå sex klasser varefter han på eget bevåg slutade skolan efter höstterminen i den sjunde. I *Early Years* redovisas skolämnena med från varje klass. Huvudämnen från första klass var Latin och modersmålet tyska, Matematik kallades till och med fjärde klassen aritmetik. Där ingick övningar i huvudräkning i andra klass, decimalkalkyl och bråkräkning i 3-e och 4-e klass, i klass 5 plan geometri och i sjätte klassen euklidisk geometri, algebra med potens- och rotkalkyl samt lösningar till linjära ekvationssystem med två eller tre obekanta. I huvudämnet tyska språket behandlades grammatiska regler i de tre första klassern. I de högre klasserna handlade det om uppsatsskrivning och litteraturläsning där diktanalyser ingick som ett centralt moment. I sjätte klass läste eleverna t.ex. dikter av Schiller och Goethe och annan episk poesi.

Naturlära:

Upp till klass 5 var huvudämnena zoologi, botanik och läran om jordens historia och mineraler. Redan i klass 3 undervisades Carl von Linnés system som kompletterades med praktiska försök om hur växter kan bestämmas med Linnés metod. I 4:e klassen ingick botaniska utflykter. Religonskunskap var mer speciell. Här följde Albert undervisning tillsammans med andra judiska skolelever, dvs. inte samma som den katolska skolans kristendomsundervisning. När det gällde "moderna språk" utöver tyska ingick franska från 6:te klass men däremot inte engelska som ju på 1800-talet inte hade den dominerande roll som i vår tid. Einstein lärde sig inte behärska engelska förrän framåt 1930-talet - han behövde t.ex. tolk under sina resor till Amerika och England på 1920-talet.

Albert var en skötsam elev med goda betyg i de flesta skolämnena, inte minst i latin där han flera år hade högsta betyg. I 10-årsåldern var han fängslad av religion och tog starkt intryck av predikaren Salomes texter. Han komponerade även egna hymner till Guds ära som han lär ha reciterat och sjungit på i hemmet och under promenader. Men han fick aldrig någon djupare skolning i judisk tradition och eller studier i hebreiska. Skälet var hans möte med naturvetenskapen i tolvårsåldern som radikalt förändrade hans intressen. Max Talmund, en då 20-årig medicinstuderande som regelbundet besökte Einseins föräldrarhem, blev Alberts mentor då han förde med sig läroböcker i naturlära, fysik och matematik. Albert läste med stor iver från de 20 band som ingick i Aaron Bernsteins monumentala verk *Naturwissenschaftlichen Volksbücher*. Intresset för fysik grundlades när han läste Humboldts klassiker *Kosmos - Entwurf einer physischer Weltbeschreibung*[1]

[1] För nyutgåva, se t.ex. `http://www.perlentaucher.de/buch/18755.html` *Red. anm.*

. Matematiken spelade en särskild roll. Alberts möte med den euklidiska geometrin har ju redan kommenterats i inledningen. Bland matematiska läroböcker som han började läsa på egen hand i tolvårsåldern kan nämnas *Lehrbuch der ebenen geometrie* av Theodor Spiekers samt den utmärkta serien läroböcker av Heinrich Lübsen för gymnaseskolans elever. Där det bl.a. ingick en introduktion till infinitesemalkalkylen, dvs. differential-och integralkalkyl samt en plan och sfärisk geometri. Resultatet av dessa självstudier var att Einstein redan i 15-årsåldern behärskade den matematik som fordrades för studentexamen.

Musik och fiolspelning:

Alberts mor Pauline var musikalisk och han fick redan som sexåring börja lära sig spela på en fiol. Men han gjorde inga större framsteg och uppfattade undervisningen som alltför auktoritär vilket speglar hans grundläggande karaktärsdrag som kan beskrivas som en egensinnig självtillit. Följande citat från Einsteins självbiografi får illustrera detta:

Först i 13-årsåldern lärde jag mig något, sedan jag främst förälskat mig i Mozarts sonater. Min strävan att någotsånär återge dessa med sitt konstnärliga innehåll och sin unik grace tvingade mig att förbättra tekniken, som jag förvärvade med dessa sonater utan att någonsin öva systematiskt. Överhuvudtaget tror jag att kärlek är en bättre läromästarinna än ett pliktmedvetande

Under hela livet kom sedan Einstein att spela fiol. Det gav honom stimulans och även vila under intensiva arbetsperioder.

Uppbrottet 1895:

Elektronikfirman som leddes av fadern Hermann Einstein och hans bror Jakob var framgångsrik till början av 1890-talet. Men 1893 kom konkurrens från större firmor och orderingången minskade. Firman som förut haft ända upp till 200 anställda gick i konkurs 1894 och familjen Einstein flyttade till Milano sommaren 1895. Den nu 15-årige Albert fick stanna kvar i München för att avsluta sin skolgång. De tre år som återstod till studentexamen föreföll som en oändlig tid och han trivdes inte i den auktoritära miljön som präglade gymnasieskolan. Inför julferien 1895 tog Albert ett livsavgörande steg när han beslöt sig för att lämna skolan för gott. Hans mentor och vän Max Timaud hade en äldre bror som var läkare och hans skrev ett intyg om att Albert var utbränd - diagnosen var "neurastenisk utmattning". Dessutom fick Albert ett specialbetyg av sin matematiklärare Joseph Ducrue som intygade om att han *redan behärskade kurserna i matematik upp till avgångsklassen !*. Så reste Albert med enkel tågbiljett Milano kring nyåret 1894-95, där han efter ankomsten lyckades övertyga sina från början bestörta föräldrar att det inte kunde bli tal om att återvända till München. I Milano fick Albert ta del i arbetet vid den nystartade elektronikfirman där hans farbror Jakob såg hans uppenbara talang som blivande ingenjör. Han studerade på egen hand i ett drygt halvår för att i oktober 1895 söka inträde på *Polytechnique*, den tekniska högskolan i Zürich. Inträdesprovet omfattande såväl skriftlig som munlig tentamen under en vecka. Där ingick förutom huvudämnena fysik, kemi och matematik också litteratur allmänn historia och naturlära med botanik, zoologi och geologi.

Albert klarade inte inträdesprovet - han var alltför svag i bl.a. historia, zoologi och botanik och helt bristfällig i franska. *Die Prüfung zeigte mir schmerizlich die Lückenhaftigkeit meiner Vorbildung. Dass ich Durchfiel, empfandt ich als voll berechtig.* Däremot var hans prov i huvudämnena matematik och fysik glänsande. Fysikprofessorn Weber blev så imponerad att han erbjöd Albert att följa hans kurser under de nya läsåret trots att han inte var inskriven. Men högskolans rektor, den matematiska fysikern Albert Herzog rekommenderade Einstein att studera ett skolår vid gymnasieskolan i Aarhau för att vinna inträde till Polytechnique. Detta visade sig vara ett lyckosamt råd. Albert uppskattade skolan som var belägen 5 mil utanför Zürich och genomförde under nio månader framgångsrika studier som ledde till att han kunde avlägga studentexamen i september 1896.

Kommentar om förkunskaper:

I ett appendix från *Early Years* återges i detalj de förkunskaper som fordrades för att börja på Polytechnique på 1890-talet. I fysikämnet ingick följande: Elementan i mekanik och rörelselagarna. Elementan i fasta kroppar samt hydromekanik och gaslagar. Elementan i värmelära. Geometrisk optik och insikt om de viktigaste resultaten om optisk och termisk strålning. Insikt om de viktigaste upptäckterna och lagarna hos magnetiska och elektriska krafter.

Detta är onekligen en ganska diger lista. En god illustration till den unge Einsteins förmåga i fysik framgår av det prov han gjorde 16 september 1896 för studentexamen. Uppgiften var att beskriva fysiken hos en galvanometer i en uppsats som skulle skrivas inom loppet av endast två timmar. Einsteins uppsats finns bevarad och återges i *Early Years.* I uppsatsens inledning skriver han: *Varje elektrisk ström omges av cirkelformiga koncentriska magnetiska kraftlinjer, som ligger vinkelräta i förhållande till strömbanans yta. Den i en godtycklig punkt närvarande magnetiska kraften är enligt Coulombs Lag omvänt proportionell mot kvadratiska avståndet till en rätlinjig strömledare ... .* Därefter följer på drygt två sidor en redogörelse för galvanometernas tekniska konstruktion och en koncis beskrivning av hur galvanometern kan användas för att t.ex. mäta elektromotoriska krafter och strömstyrkor. Uppsatsen belönades med högt betyg nära ”stort A”.

Andra ämnesprov:

Mellan klockan 7-9 på morgonen 21 september skrev Einstein sitt prov i Naturhistoria där uppgiften var *Nachwies der früheren Vergleichten unseres Landes*, dvs. att beskriva spåren efter forntidens inlandsisar. Einstein skrev drygt 2 sidor om detta där han även illustrerade texten med figurer som återger sedimentering, morän och slipade stenar. Texten är frapperande pedagogisk. Inlednindsvis skriver han hur man måste skilja på två faktorer: Isens direkta påverkan samt det underliggande smältvattnet. Därefter följer olika förklaringar om tillkomsten av slipade mindre stenar, och moränformationer.

Matematikprov:

Här handlade det om deskriptiv och analytisk geometri samt algebra. Som hjälpmedel ingick logaritmtabeller och tabeller för de trigonometriska funktionerna för att ange numeriska svar när vinklar uttryckes i vanliga grader. Här följer några tentamensproblem från september 1896:

Geometri:

Här ingick två uppgifter med en total skrivtid på fyra timmar. Den första var: Låt Δ vara en triangel vars omskrivna cirkel har föreskriven radie 10 medan sidornas längder förhåller sig som 2:3:4. Bestäm triangelns vinklar samt längden hos en sida. För att besvara frågan inledde Einstein med att notera att vinklar bara beror av likformighet och analyserade specialfallet när sidolängderna är 3,4 och 6. Han anförde nu en trigonometrisk formel som han kände till och inte fordrade eget bevis för den ställda uppgiften, nämligen att om a, b, c är sidor i en triangel och α, β, γ dess motstående hörnvinklar, så gäller enligt cosinusteoremet:

$$\cos(\alpha) = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$$

o.s.v. På så vis kunde han elegant ge numeriska värden med två decimalers nogrannhet för tringelns vinklar när $a = 3, b = 4, c = 6$. Han avslutade med att utnyttja ännu en formel som uttrycker en sida a och dess motstående viknel α med den omskrvina cirkelns radie r enligt:

$$a = 2r \cdot \sin(180^0 - \alpha)$$

En algebraisk kalkyl:

I ett annat matematikprov från 21 september 1896 ingick uppgiften: Låt Δ vara en triangel och ρ radien hos dess inskrivna cirkel C. Antag att längderna mellan C:s centrum och triangelns hörn är $1, \frac{1}{2}$ och $\frac{1}{3}$. Bestäm radien ρ. Einstein löste problemet så här: Först gäller de uppenbara vinkelformlerna:

$$\sin(\alpha/2) = \rho$$
$$\sin(\beta/2) = 2\rho$$
$$\sin(\gamma/2) = 3\rho$$

Därefter utnyttjar Einstein den allmänna trigonometriska formeln:

$$\sin^2(\alpha/2) + \sin^2(\beta/2) + \sin^2(\gamma/2) + 2\sin(\alpha/2) \cdot \sin(\beta/2) \cdot \sin(\gamma/2) = 1$$

Därefter härledde han den algebraiska 3-e gradsekvationen

$$12\rho^3 + 14\rho^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

Einstein löste denna ekvation på med hjälp av Cardanos formel - som just i det här fallet är intrikat eftersom ekvationens diskriminant är < 0, något som Einstein påpekade i sin lösning. Detta betyder att den så kallade trigonmetriska lösningsmetodiken måste användas. Einstein genomförde detta explicit och angav såväl den exakta algebraiska lösningen samt närmevärdet $\rho \simeq 0.243$.

Provet i franska:

i det franska provet fick Einstein knappt godkänt- han hade under skolspurten i Aarchau fått privatlektioner i franska för atrt komma ikapp sina äldre studiekamrater. Men det är texten i provet som har intresse. Här beskrev nämligen Einstein sina framtidsdrömmar efter avslutad studentexamen. Här följer ett utdrag i fri översättning:

Om jag på ett framgångsrikt sätt lyckas klara min studentexamen skall jag börja studera på tekniska högskolan i Zürich. Jag föreställer mig att bli lärare i teoretiskt inriktade grenar av naturvetenskapen.

Se här mina skäl till denna framtidsplan: Den bygger främst på min talang för abstrakt tänkande och matematik, medan jag saknar fantasi och äger brister för en mer praktisk verksamhet. Så mitt val är naturligt eftersom man vill ägna sig åt det man har bäst talang för !

Studier vid ETH:

Den tekniska högskolan *Polytechnique* grundades på 1850-talet i Zürich. Först år 1911 fick högskolan högre status som gav fullständiga akademiska privilegier med det nya namnet *Eidgenössische Hochschule*, dvs. ETH som idag räknas som en av Europas främsta tekniska högskolor. När Einstein började studera där i oktober 1896 fanns cirka 1000 elever, de flesta följde en mer renodlad ingenjörsutbildning. Vid avdelningen för matematik, fysik och naturvetenskap fanns bara drygt 20 elever. Einstein skrevs in som nybörjare på sektionen för matematik där matematik, fysik och astronomi utgjorde huvudämnen. Hans årsklass bestod av 10 nybörjare, däribland hans blivande fru Mileva Maric och W. Grossman. Bland lärarna fanns den framstående matematikern Hermann Minkowski. De matematiska kurserna vid ETH under åren 1897-1900 finns redovisade i [Early Years]. Där ingick förutom elementärt stoff som geometri och grundläggande analys också avancerade kurser om partiella differentialekvationer, analytiska funktioner samt högre algebra där Galoisteori ingick. Med andra ord, i stort sett samma material som ingår i matematikundervising t o m fördjupningskurser vid nutida högskolor. Einstein tog dock aldrig del i de avancerade matematikkurserna. Hans huvudintresse var fysik och under hans sista två år vid Polytechnique ägnade han mycket tid med försök i de välutrustade laboratorierna. I *Nekrologen* skriver Einstein:

Jag såg att matematiken var uppdelad i många olika specialområden, av vilka vart och ett skulle kräva hela vårt korta tilldelade livstid. Så jag fann mig vara i samma läge som Buridans åsna, som inte kunde bestämma sig för någon av hötapparna. .

Fram till mellanexamen 1898 följde Einstein de obligatoriska kurserna som ingick i lärarutbildningen. i matematik gav detta honom ett säkert handlag i flervariabelanalys och förtrogenhet med de partiella differentialekvationer som uppträder i fysik, speciellt inom hydromekanik och värmelära. Hans anteckningar av Webers föreläsningar som främst handlade om värmelära finns återgivna i The Early Years. De omfattar drygt 50 sidor och och vittnar om Einsteins gedigna kunskapsnivå redan 1898 i grundläggande fysik, speciellt värmelära och optik. Vid mellanexamen efter fyra terminer erhöll Einstein högsta medelbetyget i sin klass. Men under de sista två åren ”skolkade han ofta” och föredrog istället att egen hand studera fysik i läroböcker som inte ingick i de vanliga kurserna. Dessa handlade främst om elektromagnetism och optik.

Exempel på fysiklitteratur:

Redan som 16-åring läste Einstein den avancerade texten i *Lehrbuch der Physik* av Jules Violle under vistelsen hos föräldrarna i Milano samt en mer populariserande artikel av Heinrich Hertz: *Die umwäzungen unserer Auschaungen vom Wesen der elektrischen Wirkungen.* Under studieåren vid Polytechnque läste Einstein även Ludwig Bolzmanns verk *Vorlesungen uber Gastheorie* och Paul Drudes bok *Physik des Äther auf elektromagnetische Grundlage.* Einsteins studerade också mer avancerade texter om elektromagnetism där Maxwells ekvationer ingick. De viktigaste var *Untersuchungen der elektrischen kraft* från 1892 av Hertz samt den 1894 utgivna läroboken *Einführung in die Maxwellsche Theorie der Eletrizität* av August Föppl där bl.a. ett avsnitt omtalade att det rådde oklarheter vid förklaringen hos växelverkan mellan elektrisk och magnetisk induktion. Just denna text var en av inspirationskällorna till [E:1].

Men den allra viktigaste text som inspirerade Einstein medan han under åren 1897-1905 funderade kring ljushastighetens speciella betydelse var Henrik Lorenz' bok *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* som utkom i tysk översättning 1896.

Annalen der Physik:

Från och med 1900 läste Einstein regelbundet artiklar i denna ledande tidskrift där i stort sett alla viktiga och aktuella forskningsartiklar i teoretisk fysik publicerades. 1904 blev Einstein medarbetare i tidskriftens *Beiblätter* vilket gjorde att han även kunde ta del av översatta artiklar från andra länder än Tyskland. Så han var mycket beläst i den då aktuella frontforskningen inom fysik när han på allvar debuterade med sina artiklar 1905.

\- ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ -

Arne Beurling Symposiet

Ett Symposium till minne av Arne Beurling (1905-1986) äger rum vid Uppsala Universitet fredagen den 4 november 2005.

Huvudtalare kommer att vara *Paul Mallivin* (Paris), bland övriga medverkande återfinnes *Lennart Carleson* och *Jan-Erik Björk* tänker avtäcka en byst av Beurling.

Programmet i sin helhet (vid pressläggningens tidpunkt ej ännu fullständigt fastställt) kommer att så småningom presenterasdv på hemsidan till Uppsala Universitets matematiska institution `http://www.math.uu`

Intresserade kan vända sig till Svante Jansson (`svante@math.uu.se`) eller prefekten Anders Öberg (`anders@math.uu.se`)

Einstein och Matematiken

- *Jan-Erik Björk* -

Inledning:

Den följande texten bygger på material från *The early years 1879-1902* som ingår i Einsteinbiografierna utgivna av Princeton University Press, Albrecht Fölsings bok *Albert Einstein en biografi* utgiven i svensk översättning på förlaget Nora 1996, samt *Subtle is the Lord* av den teoretiske fysikern Abraham Pais som träffande Einstein i Princeton i början av 1950-talet. Pais' bok belyser främst Einsteins vetenskapliga arbeten medan Fölsings bok innehåller mer biografiskt material. Som bekant firas fysikens år där Einsteins arbeten från 1905 om den fotoeleketriska effekten, brownsk molekylärrörelse samt den speciella relativitetsteorin står i fokus. Runtom i världen pågår utställningar om Einsteins "Mirakulösa År", bl.a. på Universeum i Göteborg och på Nobelmuseét i Stockholm fram till mars 2006. På nätet kan man hitta många instruktiva artiklar om Einsteins banbrytande arbeten och dess fysikaliska konsekvenser. Ett exempel där både den speciella och den allmänna relativitsteorin kommer till användning är GPS-systemet - General Position System - som med hjälp av sina 24 satelliter "håller ordning på nutidens kommunikation". Följande citat från artikeln *Special relativity: A centenary perspective* av Clifford M. Will som ingår i semianarieserien om Einsteins Mirakulösa År som hölls i april 2005 vid Institut Henri Poincaré i Paris, får belysa praktiska konsekvenser relativitetsteorin :

At the centenary of relativity, I can think of no better tribute to the impact and influcence of Einstein's relativity theory, than to cite how they affect daily life. This unique confluence of abstract theory, high precision technology and everyday applications involves the Global Positioning System (GPS). This navigation system, based on the constellation of 24 satellites carrying atomic clocks, uses precise time transfer to provide accurate absolute positioning anywhere on earth to 15 meters, relative positioning to the level of centimeters, and time transfer to a precision of 50 nanoseconds. The whole GPS system relies on clocks that are stable, run at well calibrated rates, and are synchronized. However, the difference in rate between GPS satellite clocks and ground clocks on Earth caused by the special relativistic time dilation is around 7 000 negative nanoseconds per day, while the difference caused by the gravitational redshift is around 46 000 ns/day. The net effect is that satellite clocks tick faster than ground clocks by around 39 000 ns/day. Consequently, both special and general relativity must be taken into account in order to achieve the 50 ns accuracy which is required for good navigation. In addition, the satellite clocks must be synchronized with respect to a fictious clock on the Earth's rotating axis, in order to avoid the inconsistency in synchronizing clocks around a closed path in a rotating frame.

PS:

Den intresserade läsaren hänvisas till `http://www.garmin.com/aboutGPS/` för information om GPS och en länk `http://www.garmin.com/aboutGPS/manual.html` med 23 sidors innehållsrika sidor om GPS.

Årets nobelpristagare i fysik, Roy Glauber, John Hall och Theodor Hänsch har lagt grunden till att skapa klockor med ännu bättre precision än de nuvarande atomklockorna. Så årets nobelpris torde uppskattats mycket av Einstein, samtidigt som han säkert också skulle ha gett eloge till föregångare som Clerk Maxwell. Följande citat från en artikel Einstein skrev 1940 om hur Maxwells upptäckt att ljushastigheten också uppträder hos elektromagnetiska fält, får belysa att Einstein gärna ville presentera fysikaliska slutsatser i en matematisk form:

Imagine his feelings when the differential equations he had formulated proved to him that electromagnetic fields spread in the form of polarized waves and with the speed of light.

Den följande texten ägnas främst åt att kommentera Einsteins förhållande till matematik och till matematiker. [1]

Beträffande den *speciella relativitetsteorin* har det skrivits mycket om i vilken utsträckning Henri Poincaré bidragit. En insiktsfull och väldokumenterad text om Einstein och Poincaré skrevs i slutet av 1990-talet av Armand Borel i artikeln *Henri Poincaré and special relativity* (Enseign. Math. (2), 45 s. 281-300. 1999). Borel och den matematiske fysikern Fröhlich sammanfattar diskussionen med att det var Einstein som till syvende och sist tog de avgörande steget för teorins fullbordan genom sitt tid-rums begrepp.

Einstein samarbetade och inspirerade många framstående matematiker, med namn som Levi-Civita, Caratheodory, Elie Cartan och matematiker i Göttingen, David Hilbert, Felix Klein, Hermann Weyl och Emmy Noether. De kom alla att skriva mer renodlade matematiska artiklar inspirerade av Einsteins fundamentala arbete [E:2] från 1916 där den allmänna relativitetsteorin lades fram.

Genom att via *google.se* klicka Einstein+annan matematiker, kan man läsa om hans korrespondens och samarbete med kolleger. Einstein och Caratheodory hade t.ex. en livlig korrespondens 1916 om tillämpningar av Hamilton-Jacobiteorin. Följande citat från ett brev Einstein skrev till Carathodory i september 1916 får illustrera hur han kunde ta hjälp av specialister och samtidigt förkovra sig i matematik: *Would you think a little about the problem of closed time trajectories ? Here lies the essence of this still unsolved part of space-time problems. I wish you all the best from yours truly. A. Einstein.* Två månader senare svarade Caratheodory med ett utförligt brev *Dear Collegue, the main points in the theory of canonical substitutions can be most easily derived in the following way....* Hans brev fortsatte sedan med en veritabel matematisk artikel som handlade om hur Hamilton-Jacobi metodik kan utnyttjas för att härleda samband mellan variationskalkyl och de fältekvationer som ingår i [E:2]. Genom att via google klicka *Einstein Noether* kan man få referenser och kommentarer om Emmy Noethers bidrag till den allmänna relativitetsteorin, t.ex. hennes artikel *Invariante Variationsprobleme* från 1918. Den finns i engelsk översättning i tidskriften Transport Theory and Statistical Physics vol 1 (3), sid. 183-207 (1971). Ett annat exempel från google är *Einstein Levi Civita* där man under olika rubriker kan ta del av deras korrespondens under åren 1914-1915, dvs. medan Einstein ännu arbetade med att fullborda den allmänna relativitsteorin. Under 1920-talet fortsatte korrespondens mellan dem medan Einstein sökte utveckla en enhetlig fältteori. Omvänt kom Einsteins tankar och idéförslag att inspirera Levi-Civitas forskning inom differentialgeometri ända in på 1930-talet.

Ett exempel på hur matematikvärlden tidigt uppskattade Einsteins insatser är att han redan 1918 tilldelades *Ackermannpriset* efter förslag av Hilbert och Klein. Priset motsva-

[1] En separat artikel handlar om den unge Einsteins möte med matematiken under skolåren i München fram till 1895 och hans studier vid ETH i Zürich mellan 1896 till 1900. Detta belyser hur det "mirakulösa året" 1905 var frukten av intensiva studier och tankar som Einstein inledde redan som 16-åring.

rade vid den tidpunkten en dryg årslön för Einstein som då var professor vid Kaiser-Wilhelms institutet i Berlin. Notera att detta pris gavs innan det berömda Londonmötet i november 1919 ägt rum där astronomiska observationer från sommaren 1919 konfirmerat Einstein beräknade värde för ljusstrålars avböjning när de passerar i närheten av solen. Hilbert höll 1919 en serie föredrag om fysikens utveckling där han bl.a lyfte fram Einsteins insats med orden: *Das allgemeine Relativitätsprinzip ist nicht wieder aus der Welt zu schaffen. Wenn irgend von einem ewigen Naturgesetz die Rede sein kann, dann muss dieses als ein solches angesprochen werden.* Hilbert avslutade sin närmast euforiska genomgång av Einsteins allmänna relativitetsteori med att beskriva den som *Tankens högsta triumf över sinnevärlden.*

Enhetlig fältteori:

Under 1920-talet och framåt sökte Einstein vidareutveckla den allmänna relativitetsteorin. Efter att ha fått 1921 års Nobelpris för arbeten om den fotoelektriska effekten höll han sitt Nobelprisföredrag 11 juli 1923 i Göteborg. Inför föredraget hade Nobelkommitténs ordförande Svante Arrhenius uppmuntrat Einstein att tala om den relativitetsteorin, dvs. inte pålagt honom det sedvanliga kravet att tala om de arbeten som främst legat till grund för Nobelpriset. Den intresserade hänvisas till Nobelmuséets hemsida där man kan läsa - och vid behov printa ut - Nobelkommitténs biografi över Einstein och Arrhenius' presentationsföredrag om hans bidrag till den fotoelektriska effekten. Göteborgsföredraget hade titeln *Fundamentala idéer och problem om den allmänna relativitetsteorin.* Där talade Einstein om behovet att att förena teorin för gravitationsfält och elektromagnetiska fält. Den intresserade läsaren kan ta del av Einsteins hela föredrag på Nobelstiftelsens webbsida där alla fysikpristagares föredrag finns i översättningar på engelska - originalet höll förstås Einstein på sitt modersmål som var tyska. Här följer ett kort stycke från föredraget där han för fram tankar om en enhetlig fältteori som förutom den egentliga fysikens problematik får illustrera hans respekt och rentav tilltro till matematiken som ett verktyg för att skapa nya fysikaliska teorier:

The mind striving after unification of the theory cannot be satisfied that two fields, the gravitational field and the electromagnetic field should exist which, by their nature, are quite independent. A mathematical unified theory is sought in which the gravitational field and the electromagnetic field are interpreted only as different components or manifestations of the same uniform field, the field equations where possible no longer consisting of logically mutually independent summands.

I fördragets avslutning talar sedan Einstein om hur den "klassiska Riemannska geometrin" skulle kunna ersättas med den mer allmänna teorin för affina förbindelser som vid den tidpunkten hade utvecklats av Levi-Civita och Hermann Weyl. I slutet av sitt föredrag uttrycker Einstein förhoppningsfullt: *By seeking the simplest differential equations which can be obeyed by an affine correlation theory, there is reason to hope that a generalization of the gravitation equations will be found which includes the laws of the electromagnetic field.*

Den första mer omfattande artikeln som handlar om att söka ställa upp en enhetlig fältteori är *Neue Möglichkeit für eine einheitliche Feldtheorie von Gravitation und Elektrizität* från

1929. Vid den tidpunkten var ju Einstein en "världskändis". Den mediala bevakningen av detta arbete var närmast hysterisk, bl.a. publicerades den sex sidor långa artikeln "spängfylld" med matematiska formler som förstasidestoff i New York Times bara någon dag efter publiceringen i Berlin. Hur Einstein själv såg på denna uppståndelse är oklart, särskilt med tanke på att han såg sitt arbete som ett "utkast". I varje fall drabbades han inte av "hybris". Istället inleddes ett samarbete med Elie Cartan som kom att vara i nära tre år. Även om inga fysikaliska resultat erhölls, så gav Einsteins ansatser till en enhetlig fältteori indirekt bidrag till differentialgeometrin genom detta samarbete. Brevväxlingen under åren 1929-32 är publicerad i boken *Letters on absolute parallelism* som utgavs i början på 1970-talet i engelsk översättning av originalbreven som Einstein skrivit på tyska och Cartan på franska. Cartan som ju redan 1894 revolutionerat differentialgeometrin i sin doktorsavhandling om Liegrupper inledde här ett fruktbart utbyte av idéer med Einstein som bland annat ledde till fram till arbetenen om involutiva system av differentialekvationer.

Det är fascinerande att läsa dessa brev som visar prov på såväl ödmjukhet som vetenskaplig stringens från Einsteins sida. Här framstår Einstein snaraast som lärljunge till Cartan medan de tillsammans sökte utreda om det var möjligt att med matematisk formalism skapa en fysikaliskt hållbar teori. Våren 1932 avslutades deras gemensamma ansträngningar för att skapa en enhetlig fältteori. I ett av de sista breven till Cartan - daterat 21 mars 1932 - skriver Einstein:

Ich habe mit grossen Genuss Ihre Arbeit über Involutions-Systeme gelesen. Dies schient mir ein wirklich wichtiger Beitrag zur Theorie der partiellen Differenzial-Gleichungen zu sein... Aber übrigens bin ich jetzt von der Methode des Fern-Parallelismus gänzlich abgekommen. es schient dass dies Struktur mit der wahren Beschaffenheit des Rauems nicht zu tun hat

I ett senare brev till Cartan från 22 maj 1932 skriver Einstein: *Denken Sie also, wir sein wieder beide jung und ich sei ein zwar eifriger aber leider Schüler von Ihnen* - tänk om vi åter vore unga och jag en ivrig men också besvärlig elev till er.

Cartans svarsbrev från 22 maj - här översatt från franska till engelska - avslutades med orden:

Your letter has filled me with joy and confusion. Of course I take the pleasure in our litte exchange, and if it were up to me, I would willingly become young again, if not to give you lessons, at least to follow, better than I now can, all the marvelous things being done in physics.

Einsteins förhållande till matematiken:

Det finns en mytbild att Einstein inte var "road av matematik". Sant är att han såg matematiken som ett medel snarare än ett mål. Det var alltid det fysikaliska innehållet som stod i förgrunden. Men även om Einstein främst utnyttjat matematik snarare än skapat nya matematiska resultat, så har han inspirerat den matematiska forskningen. Ett exempel förutom relativitetsteorin är hans arbeten om den brownska molekylärrörelsen från åren fram till 1905, följda av en serie arbeten tillsammans med den polske fysikern Schmoluchowski fram till början av 1910-talet. Dessa har haft stor betydelse när den matematiska teorin om enskilda brownska rörelsevägar började utvecklas på 1920-talet. I klassikern *Fourier transforms* av Paley-Wiener kan man på sid. 157 läsa ett utdrag från Jean Perrins bok *Les Atomes* i engelsk översättning som berättar lite om den fysikaliska bakgrunden och hur man efter observationer under åren kring 1910 kommit till insikten att *We must regard the Brownian motion as completely irregular.* Som bekant var det Wiener som 1923 första gången bevisade att enskilda brownska vägar är nästan säkert kontinuerliga. På sid 141 i *Fourier transforms* skriver Wiener: *Physically it is at least reasonable that the Brownian motion of a particle is continuous, and we shall in fact show that the Einstein theory of Brownian motion permits us to say that in fact it is almost everywhere continuous...*

Einstein och matematiken:

För Einstein var matematiken ett medel snarare än ett mål. Men det uteslöt inte hans beundran för ämnets inneboende logik. Under skolåren i München studerade han med stort intresse euklidisk geometri. Förutom själva inlärandet framhöll Einstein senare i livet att mötet med den euklidiska geometrin gav *intellektuell stimulans, en själens mognad och förtroende att våga tänka självständigt.* Men framförallt gav dessa studier insikt om styrkan av en axiomatisk logik. De båda fundamentala arbeten [E:1] från 1905 och den allmänna relativitetsteorin [E:2] från 1916 utgår från postulat som Einstein införde som en ”nödvändig konsekvens” snarare än med stöd av fysikaliska experiment.

När det gällde att genomföra ofta ganska omständiga matematiska kalkyler var Einstein både nogrann och skicklig. Ett gott exempel på detta är ett arbete från oktober 1910 där han kvantifierade den polske fysikern Scholuchowskis teori om hur ljuset kan spridas, dvs. teorin för opalescens hos gaser och vätskor. Mer precist innehåller detta arbete en vacker matematisk härledning som kulminerar i en formel som kvantiativt förklarar en upplevelse vi ständigt möter i vår vardag, nämligen varför himlen opalscerar i blå färg på dagen, medan den på morgon och kväll lyser rödaktigt.

Kommentar:

För att förstå naturens förlopp fordras förutom fysikaliska, kemiska och biologiska insikter ofta omfattande beräkningar. Här är nutida datorer till stor hjälp. Deras förmåga att genomföra omfattande kalkyler torde på Einsteins tid ha framstått som något av en uppenbarelse. Mot denna bakgrund förundras i varje fall undertecknad över de preferenser som dyker upp nu på 2000-talet inom svensk högskoleutbildning. Inför höstterminen 2005 vid Stockholms Universitet fanns till exempel inte *en enda* sökande till kurser som erbjöd examensarbeten i beräkningsteknik eller datalogi på fördjupningsnivå.

Merkurius oregelbundna rörelse:

Einstein kanske mest spektakulära matematiska kalkyl handlade om planeten Merkurius' periheliumrörelse. Merkurius är en planet som rör sig närmast solen. Den färdas med god nogrannhet i en sluten ellipsbana där solen är en av ellipsens brännpunkter. Den franske astronomen LeVerrier visade efter nogranna observationer på 1850-talet att Merkurius inte rör sig i en sluten keplersk ellipsbana, utan i ett slags rosett där en långsam förskjutning av planets närmaste position till solen förändras under ett varv. Detta kallas periheliumförskjutningen. Avvikelsen från en perfekt ellips är mycket liten, men tillräckligt stor för att astronomer i över 50 år fram till Einsteins arbete [E:2] sökte finna förklaringar på Merkurius' förskjutning, bl.a. genom att söka efter förekomsten av andra mindre planeter i dess närhet som i så fall skulle påverka dess bana[2]. Den 25 november 1915 presenterade Einstein inför den fysikalisk-matematiska klassen vid Berlins akademi sin teori över Gravitationens Fältekvationer och sammanfattade sitt föredrag med orden:

Härmed är den allmänna relativitetsteorin som logisk byggnad avslutad. I sin mest allmänna formulering leder relativitetspostulatet till en alldeles bestämd teori för gravitationen, vilken förklarar Merkurius' periheliumrörelse.

En specifik formel:

I sista stycket från [E:2] redovisar Einstein de kalkyler som förklarar planeternas perheliumrörelse så här: När hänsyn tas till andra ordningens termer i fältekvationerna erhålles en avvikelse från lagarna av Kepler och Newton som avslutas med följande ordagrant återger några rader från [E:2]: *Die Bahnellipse eines Planeten erfärhrt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung vom betrage*

$$\epsilon = 24\pi^2 \cdot \frac{a^2}{T^2c^2(1-e^2)} \tag{1}$$

pro Umlauf.

Kommentar:

I formeln är T planetens omloppstid räknat i sekunder, a ellipens storaxel i meter, e ellipsens eccentricitet och c ljushastigheten i meter/sekund. Sin bokstavligt talat euforiska upplevelse av att (1) tillämpad på Merkurius gav god överensstämmelse med LeVerriers mätningar har Einstein skildrat i många brev och minnesartiklar. Redan december 1915 skrev han till kollegan Paul Ehrenfest: *Tänk dig min glädje över att jag lyckats genomföra den allmänna teorin, och att ekvationerna korrekt ger Merkurius' perhelium.* Hans uppnådda resultat i november 1915 hade då föregåtts av flera års arbete som ända fram till oktober 1915 uppvisat defekter, bl.a. gav tidigare uppställda ekvationer ingen korrekt uppskattning av Merkurius' periheliumrörelse. I boken *Min världsbild* från 1933 beskriver Einstein hur han själv upplevde sina upptäckter. Tillkomsten av den allmänna relativitetsteorin beskrev han så här:

Tjusningen i det aningsfyllda, mångåriga sökandet i mörker, med dess spända längtan, dess kastningar mellan tillförsikt och misströstan, och dess slutgiltiga som genom en uppenbarelse vunna klarhet, förstår blott den, som själv upplevat detta.

[2] LeVerrier var jämsides med Adams Neptunus upptäckare. Han strävade att göra om sin tidigare bragd och döpte faktiskt en predikativ himlakropp till Vulcanus.*redaktörens anm.*

Sudoku

- *Paul Vaderlind* -

Från latinska kvadrater till sudoku:

Ett år före sin död publicerade Leonard Euler[1] en artikel som handlade om ”en ny sort av magiska kvadrater”, det vi idag kallar för latinska kvadrater.

En latinsk kvadrat av ordning n, där n är ett fixt positivt heltal, är ett $n \times n$ rutnät, där i varje ruta finns en av n givna symboler, till exempel talen 1 till n. Rutorna ska vara ifyllda på ett sådant sätt att varje symbol förekommer precis en enda gång i varje horisontell och varje vertikal rad.

Antalet olika latinska kvadrater ökar mycket fort med n: för $n = 1$ och $n = 2$ finns det förstås en respektive två kvadrater, för $n = 4$ finns det redan 576 olika latinska kvadrater. För $n = 9$ är antalet uppe i storleksordningen $5,5 \times 10^{27}$.

En sudoku är i grunden en latinsk kvadrat av ordning 9. Det som skiljer sudoku från andra latinska kvadrater är box villkoret: nätet är indelad i nio boxar med 3×3 rutor var, och kravet är att även rutorna i varje box ska innehålla olika siffror.

Själva sudokupusslet går ut på att finna slutkonfigurationen med utgångspunkten från ett begränsat antal i förväg ifyllda rutor. En välkonstruerad sudoku måste ha en entydig lösning.

En fråga som ofta ställs i samband med pusslet är hur många olika sudoku finns det. Med detta menar man förstås hur många olika slutkonfigurationer (latinska kvadrater av ordning 9 med box-villkoret uppfyllt) finns det. Den tyske matematikern Bertram Felgenhauer visade nyligen att det finns 6670903752021072936960, dvs. cirka $6,67 \times 10^{21}$ sådana konfigurationer.

Inte alla dessa konfigurationer vill man betrakta dock som olika i sudokusammanhang. Sudokupusslet ändras ju inte om man permuterar symbolerna 1 till 9. Pusslet förändras inte heller om man permuterar de första tre raderna i nätet. Allmänt kan vi säga att två pussel anses vara identiska om:

(a) Den ena kan fås från den andra genom att man permuterar siffrorna 1 till 9.

(b) Man permuterar de horisontella eller vertikala boxgrupper (en boxgrupp består av tre boxar i en rad). Till exempel bildar de tre första horisontella raderna en horisontell boxgrupp.

(c) Permuterar raderna inom en och samma boxgrupp.

(d) Roterar eller speglar i nätets axlar.

Med hänsyn till ovanstående kunde Ed Russell och Frazer Jarvis från Storbritannien nyligen bestämma att det finns 5472730538 väsentligt olika sudokukonfigurationer. Med tanke på att var och en av dessa kan vara slutprodukten på tusentals startkonfigurationer så kan vi bara konstatera att antalet olika sudokupussel är verkligen stort.

[1] 1707-1783

Bortsett från permutationer av symbolerna (operationen (a) ovan) så bildar operationerna (b), (c) och (d) en delgrupp G till den symmetriska gruppen S_{81}. Russell och Jarvis visade att gruppen G har ordning $6^4 \times 6^4 \times 2$.

Lite historia:

Sudokupusslet föddes i USA i slutet av 1970 talet. De första exempel som publicerades 1979 i tidskriften *Dell Puzzle Magazine* under namnet Number Place vann dock inget större intresse. Lite senare dök pusslet upp i Japan, som har en mycket gammal och väl utbredd tradition för liknande logiska spel. Omkring 1984 introducerade japanerna en liten estetisk förbättring av pusslet och efter det blev sudoku snabbt en mycket uppskattad förströelse. Den japanska innovationen gick ut på att de från starten ifyllda rutorna ska bilda ett symmetrisk mönster i nätet. Denna krav på symmetri minskar uppenbarligen antalet möjliga sudoku men med tanke på det enorma antalet spel som man ändå kan konstruera så är det ingen avgörande begränsning. I Japan fick pusslet namnet *Suuji wa dokushin ni kagiru*, en siffra som måste förbli ensam (utan par). Då beskrivningen var lite för lång så förkortade man det till *Su Doku*, en ensam siffra. Utanför Japan blev det till slut bara ett enkelt sudoku.

I början av detta sekel har sudoku klivit in på den brittiska scenen, alltså ytterligare ett land med en långtgående pusseltradition. Sedan flera decennier hade de brittiska tidningarna regelbundet publicerat, vid sidan av de traditionella korsorden, diverse logiska pussel. Och efter det att britterna helt hade fallit för sudoku, så blev det dags för andra länder, däribland Sverige. Det är min förhoppning att den sudokuhysterin som vi idag kan se i Sverige kommer att leda till en etablering av en pusselkultur liknande den i England.

Hur många ifyllda rutor behövs det?:

I sudoku ska man alltså fylla i alla tomma rutor med symbolerna 1 till 9 i enlighet med vissa regler. Antalet från början ifyllda rutor i de exempel som finns i dagspressen varierar från 20 till 35. För det mesta gäller det att ju fler ifyllda rutor som är givna desto lättare är pusslet, men man kan faktiskt konstruera pussel med många startvärden men som knappast är möjlig att lösa för hand. Ett sådant exempel som kräver en datakörning representerar sudoku (1) nedan.

					5		6	2
4		2		7				
				4				
5							9	
		7		3		5		
	9	8					7	
	1		7					8
			3	8	6			
		4				7		

(1)

Ju färre rutor som är ifyllda desto svårare bli pusslet i allmänhet och den naturliga frågan som infinner sig är: Vilket är det minsta antalet ifyllda rutor som ger en väldefinierad sudoku (ger alltså en entydig lösning). Frågan är för närvarande öppen och vi bara vet att detta minimum är som mest 17. Man har konstruerats redan ett stort antal pussel, mer än 25 tusen som alla leder till väsentligt olika slutkonfigurationer, med bara sjutton ifyllda rutor (i det allmänna, icke-symmetriska fallet), och många med 18 ifyllda rutor (i det symmetriska fallet).
Två exempel på sådana sudoku, båda mycket lättare än (1), finns i figur (2) och (3) (på nästa sida).

Det är inte många som tror att antalet ifyllda rutor i startkonfigurationen kan vara mindre än 17 men, som sagt, ingenting är ännu bevisat så det slutliga svaret kan vara en överraskning.

		1	2	3				
4				1		5		
						6		
							3	7
	5		8		6			
					7			
6					5			
		3					2	

(2)

9					8			
					7			6
		5					4	3
	6	4						
						9	2	
7	8					1		
2			6					
			3					4

(3)

Ytterligare två frågor ter sig naturliga i sammanhanget, båda inte ännu besvarade. Den första kan sammanfattas som: hur mycket information är nödvändig för att kunna lösa varje sudoku. Mera konkret gäller det att finna det största möjliga antalet ifyllda rutor i en startkonfiguration, där varje ifylld siffra är nödvändig. Med andra ord, om man tar bort vilken som helst av de ursprungliga siffrorna så kommer sudoku att sakna entydig lösning. För närvarande är det största antalet 32 och ett exempel på en sådan pussel finns i figur (4). Jag tror att talet 32 kan fortfarande ökas men har inget bättre exempel än.

				5	6	8		7
	8		3					
			1	8			3	4
					3			9
2	4			6				
	6	9	8	7		4		
4								8
	1	8		3	2	9		5
		5	7			3		2

(4)

Den andra, och enligt mig mycket mera intressanta frågan, gäller reduktion av en slutkonfiguration. Som bekant kan varje sådan konfiguration vara lösningen till många olika pussel, men kan varje sudokukonfiguration vara en slutprodukt av någon startuppsättning bestående av 17 siffror? Med andra ord, är det möjligt att i en godtycklig slutkonfiguration sudda bort lämpligt valda 64 siffror så att de återstående 17 siffror utgör en väldefinierat pussel?

Bland flera andra frågor som kan vara värda att närmare titta på är att konstruera sudoku med så många tomma boxar och rader som möjligt. Än så länge är det bästa resultatet ett pussel med fyra helt tomma boxar (ett exempel finns i figur (5)) och ett pussel där antalet helt tomma boxar och rader tillsammans är nio (figur (6)). Sudokuentusiasterna försöker också finna pussel med så många tomma rutor som möjligt grupperade tillsammans, som exempelvis i figur (7).

8		6					9	
		5				8	7	6
4	3						2	
			3	5				
			4	8	6			
				1	7			
	2						3	8
5	4	7				2		
	6					1		5

(5)

			1		3	5	2	
			2		4	6	7	
	3	5				2	1	
	8	6				7	5	
	1	4	3		8			
	5	7	4		1			

(6)

	1	2	3	4				
5			6					
7		8						
8	7							
3								5
							9	7
						1		6
					7			4
				5	9	3	8	

(7)

En fråga som däremot kan enkelt besvaras är: Vilket är det största antalet ifyllda rutor som inte leder till en entydig lösning? Svaret är 77 och ett exempel på en sådan sudoku finns i figur (8). Var och en av de tomma rutorna kan innehålla siffran 1 eller 7.

Hur svåra kan sudoku vara?:

7	6	2	1	9	5	3	4	8
3	1	4	6	8	2	9	5	7
5	9	8	7	3	4	1	2	6
2	3	5	8	6	9	7	1	4
1	4	7	5	2	3	8	6	9
9	8	6	4			2	3	5
6	2	3	9	5	8	4	7	1
4	5	9	2			6	8	3
8	7	1	3	4	6	5	9	2

(8)

Som det nämnts tidigare är sudoku i grunden ett latinsk kvadrat av ordning 9. Man kan förstås generalisera begreppet till kvadrater av en annan storlek. En allmän sudoku av ordning n^2, där n är ett positivt heltal, är en latinsk kvadrat av ordning n^2 (alltså med n^2 horisontella och n^2 vertikala rader) som är indelad i n^2 boxar, var och en av storlek $n \times n$ rutor. Hälften av 576 latinska kvadrater av ordning 4, dvs. 288 stycken är samtidigt sudoku kvadrater av ordning 4. Dessa kan dock reduceras till endast två väsentligen olika konfigurationer (olika med respekt till samma villkor som för kvadrater av ordning 9). Dessa två olika konfigurationerna finns i figur (9). Sudoku av ordning 4 bjuder därmed inte för särkilt mänga överraskningar.

1	2	3	4
3	4	1	2
2	1	4	3
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	2	1
2	1	4	3
4	3	1	2

(9)

Sudoku av ordning 9 kan däremot göras hur svåra som helst för en vanlig lösare utan tillgång till datorer. I och för sig är jag inte på något sätt entusiast av lösningar med datorhjälp; det är som att bestämma sig för en joggingsrunda och till slut välja bilen för då blir man mindre trött och svettig. En välformulerad sudoku, sådan som publiceras i pressen eller i standard sudokusamlingar, borde kunna vara lösbar med enbart elementära logiska resonemang och de eventuella gissningsmoment/backtracking borde antingen inte förekomma alls eller, vid enstaka fall, vara nödvändiga endast när ett fåtal rutor återstår att fylla.

Inte desto mindre kan sudoku vara riktigt svåra och figur (1) är ett exempel på en sådan. Allmänt visade Takayuki Yato och Tahashiro Seta från Tokyos universitet att sudoku tillhör klassen av NP-kompletta problem.

Ortogonala sudoku:

Eulers avhandling från 1782 gällde närmare bestämt ett speciellt problem rörande latinska kvadrater av ordning 6. Han formulerade frågan på följande sätt: Sex regementen skickade var och en delegation bestående av sex officerare av sex olika grader till ett möte (det blev alltså sex officerare med var och en av graderna men från olika regementen). Kan dessa 36 officerare ställas i en 6×6 kvadrat på sådant sätt att ingen rad, vertikal eller horisontell, innehåller två officerare av samma rang och inte heller två officerare från samma regemente?

Om vi bortser från olika-regementes villkoret i Eulers fråga och bara behåller olika-grad villkoret så reduceras fråga till att finna en latinsk kvadrat av ordning 6: varje ruta i en 6(6 kvadrat ska fyllas med en av sex gradbeteckningar på ett sådant sätt att samma grad aldrig förekommer mer än en gång i varje horisontell och vertikal rad. Om vi istället bortser från olika-grad villkoret men behåller olika-regementes villkoret så har vi återigen en fråga om en latinsk kvadrat av ordning 6. Sådana latinska kvadrater av ordning 6 är inte svåra att konstruera (det finns 812851200 sådana), men Eulers fråga är betydligt mera komplex än så. Vad han efterlyser är två latinska kvadrater av ordning 6 (för enkelhets skull kan vi tänka att det ena fylls med gradbeteckningar och det andra med regementes beteckningar) så att när man lägger dessa två på varandra så finns det inte två rutor som innehåller samma grad/regemente par. Sådana två kvadrater kallas för ortogonala latinska kvadrater (eller greko-latinska kvadrater. På Eulers tid använde man grekiska respektive latinska bokstäver istället för siffor i dessa sammanhang).

Euler observerade att det fanns par av ortogonala latinska kvadrater av ordning 3, 4, 5, och 7. Det är lätt att övertyga sig att det inte finns sådana kvadrater av ordning 2. För ordning 6 kunde han varken finna ett sådant par eller bevisa att det inte existerar. Däremot lyckades han bevisa att för varje n som inte är av typ $4k+2$, där k är icke negativt heltal, existerar par av ortogonala latinska kvadrater. För n av typ $4k+2$ fungerade hans bevisteknik inte.

För k = 0 har vi latinsk kvadrat av ordning 2 och för k = 1 kvadrat av ordning 6. Euler beklagade misslyckande och eftervärlden döpte problemet ”Det finns inga par av ortogonala latinska kvadrater av ordning $n = 4k + 2$” till *Eulers förmodan.*

Första framsteget i lösningen av problemet gjordes av fransmannen Gaston Tarry som år 1900 lyckades bevisa att Eulers uppgift med 36 officerare verkligen saknar lösning. Nästa och slutliga stegen kom 1959/1960 då T.T. Parker, R.C. Bose, och S.S. Shrikhande visade att par av ortogonala latinska kvadrater existerar först för k = 2 (dvs. $n = 10$), det så kallade *Euler spoiler* exemplet, och sedan att ortogonala paren existerar för alla k större än 1. De enda ordningar då det inte existerar ortogonala par av latinska kvadrater är alltså 2 och 6.

Eftersom det existerar ortogonala par av latinska kvadrater av ordning 9 så är det naturligt att fråga om det existerar ortogonala par av sudoku kvadrater. Som tur är existerar sådana par och det bjuder genast till konstruktion av nya typer av sudokupusslen, nämligen ortogonala sudoku.

En sådan utmaning finns i figur (10): I varje ruta ska två siffror 1 till 9 placeras så att det bildas 81 tvåsiffriga tal. Betraktar man bara tiotalssiffror så bildar de en sudokukonfiguration. Betraktar man bara entalssiffror så bildar de en annan sudokukonfiguration. Utöver detta ska dessa två sudoku vara ortogonala, vilket innebär att inget tvåsiffrigt tal förekommer mer än en gång i hela nätet! (Eftersom med siffrorna 1 till 9 kan man bilda exakt 81 olika tvåsiffriga tal så kommer vart och ett av dessa tal förekomma i nätet). Inget av de två enskilda sudoku har en entydig lösning men tillsammans med ortogonalitetsvillkoret är uppgiften inte särskilt svår.

5 9			1 8			8 4		
	2				9 4		4 3	
1		7 4		6 3				9 8
6	9		5	7	2	6		1
6		2	2		5	9		1
4		1	6	3	3		9	2
9 3				1 5		3 1		6
	8 5		9 1				9	
		4 7			6 9			2 5

(10)

Nu är det så att för ordningen 9 kan man konstruera 8 stycken latinska kvadrater som är sådana att varje två av dessa bildar ett ortogonalt par. Då är det förstås nästa fråga som genast infinner sig: Finns det uppsättningar av fler än två sudoku kvadrater som är parvis ortogonala?

Sudoku och datorer:

Som med de flesta logiska pussel ligger utmaningen i sudoku inte i att finna lösningen utan i att göra det med enbart logiska resonemang. Tyvärr så fungerar de flesta elementära logiska argument inte alltid, vilket gör att för de allra svåraste pussel är man tvungen att tillgripa brute-force metoder. En sådan är att låta dator leta rätt på lösningen.

De flesta sudoku solvers som för närvarande översvämmar web-universum är baserade på en relativt enkel backtracking algoritm. Sådana algoritmer leder alltid, förutsatt att sudokun är välkonstruerat, till en lösning inom några sekunder. Mera ”humana” algoritmer försöker att så långt som möjligt imitera standardalgoritmer som används av de flesta vanliga lösare som du och jag: *slicing/dicing, crosshatching, list-reduction,* osv. Först när alla dessa elementära metoder är uttömda övergår man till begränsade sökningsstrategier med de vackra namnen som forcing chains, nishio och liknande: man söker en tom ruta med ett litet antal kandidatsiffror, tar en av dessa och kontrollerar vilka konsekvenser valet av denna siffra kommer att medföra.

Eftersom sudokupusslet har en naturlig grafteoretisk tolkning så har det på senare tid dykt upp mera eleganta algoritmer baserade på matching och färgläggning av grafer. Flera sudokuprogrammerare tillämpar även den så kallade constrains programming, speciellt Donald Knuths Dancing Links Algortithm. Alla dessa algoritmer låter i ännu större utsträckning undvika backtracking metoden, men inte alltid. Pusslet i figur (1) är just ett sådant exempel som står mot alla idag tillämpade algoritmer, utom backtracking förstås.

När det gäller konstruktion av sudoku så är de flesta av pussel som dyker upp i dagspressen eller i flertalet av sudokuböcker massproducerade av datorer. Nästan vem som helst kan idag sätta sig vid en dator utrustad med en sudokugenerator, som kan köpas för 30 dollar, och på en kväll "producera" en hel pusselbok. Dessvärre är de flesta sudokugeneratorer än så länge ganska osofistikerade, vilket gör att de sudoku pusseldatorerna spottar ut inte är av särskilt hög kvalité. Att de inte uppfyller det estetiska krav en riktig japansk sudoku ställer, nämligen att de från början ifyllda siffrorna ska bilda ett symmetriskt mönster, kan man kanske bortse ifrån, men inte att deras pusselvärde är ganska lågt. Efter att ha klarat de tre, fyra första siffrorna så "rinner" de övriga in nästan av sig själva. En bra sudoku bör vara en utmaning i betydligt fler steg än de första få initiala.

De standardmetoder som dagens generatorer använder är

1. Börja med en slutkonfiguration, avlägsna sifrorna slumpmässigt en efter en och varje gång kolla om den reducerade konfigurationen ger en entydig lösning. Till slut har man en giltig pussel. Vill man behålla symmetrin avlägsnar man två symmetriskt belägna siffror åt gången.
2. Börja med ett tomt nätt och lägg till siffrorna en åt gången (två i det symmetriska fallet) tills man får en uppsättning som ger en entydig lösning. Hela tiden bör algoritmen kontrollera att de inskrivna siffrorna inte strider med grundläggande sudokuregler.

När man konstruerar sudoku för hand börjar man oftast med att välja (markera) de rutor som ska innehålla den givna uppsättning av siffror. Sedan skriver man in siffrorna en efter en i hela nätet enligt sudokus grundregel: varje siffra får förekomma endast en gång i varje rad och box. Hela tiden bör man se till att i de markerade rutorna skriver man in siffrorna endast när det är nödvändigt för att motivera varför den nyss ifyllda omarkerade ruta fick den eller den siffra. Det är som att bygga pusslet i omvänt ordning.

Som tur är har fler och fler duktiga programmerare drabbats av "sudokufebern" och förhoppningsvis kommer snart ut bättre pusselgeneratorer, generatorer som så småningom kan ersätta både de gamla program och de personer som för närvarande konstruerar sudoku manuellt.

Gowers on Mathematics

- *Ulf Persson* -

Som kanske en del av Samfundets läsare känner till har Oxford University Press under de senaste tio åren gett ut ett antal titlar under den allmänna rubriken 'Very Short Introductions'. Böckerna är små och behändiga, och därmed tunna, inte mer än en 100-150 sidor, och med mjuka kraftiga omslag med breda flikar. De spänner ett hundratal olika områden, av vilka vi kan nämna Fascism, Drugs, Heidegger, Northern Ireland, Postcolonialism, Schizophrenia, Presocratic Philosophy, The Tudors och med aviserade titlar såsom Buddhist Ethics, Cloning, The End of the World, Derrida, Hiroshima. 'The reader gets the idea' som det heter. Man kan tänka sig den stressade affärsmannen, som Sten Kaijser frammanar honom[1] snabbt läsandes igenom boken på flyget för att få sig ett hum om säg Cloning eller Första Världskriget 'to get the facts straight'[2]. Man kan undra vad en 'Very Short Introduction to mathematics' (eller music, psychology, quantum theory, philosophy) kan bidraga med i sammanhanget. Hundra sidor om Hiroshima kommer väl ge de flesta läsare en ganska grundlig bild, även om stilen år lättsam (trots innehållet), men vad kan den matematiskt oskyldige få ut efter ett par timmars samvaro? Böckerna är givetvis skrivna av experter, och i detta fall så representerar den unge fieldsmedaljören Timothy Gowers[3] den matematiska sakkunskapen. Hur lyckas ha med sin omänskligt omöjliga uppgift? Först och främst så antager han från början att motivationen och nyfikenheten måste läsaren själv bestå med. Han tänker inte sockra sin anrättning med anekdoter, peppra den med utropstecken eller dekorera den med studentikosa kapitelrubriker. Och ingenstans i boken kommer läsaren att finna en bild på Mandelbrotmängden eller en diskussion av Gödels teorem (som han mycket riktigt påpekar har mycken marginell betydelse för matematiken som den praktiseras). I boken finner man givetvis det förväntade, såsom Pythagoras sats, icke-euklidisk geometri, speciellt tessalationer av det hyperboliska planet, samt även irrationaliteten hos $\sqrt{2}$ och det gyllene snittet (populärare bland icke-matematiker än matematiker?). Han behandlar även högre dimensioner, inkluderande de brutna, Jordans kurvsats, talbegreppet med speciell hänvisning till räknelagarna och manipulationer av oändliga decimalbråk (hur gör man egentligen när man multiplicerar sådana filurer?). Han strör en del filosofiska reflektioner kring sig och presenterar bevis när detta är görligt. Han betonar matematikens abstrakta väsen och dess instrumentella karaktär. Ja vad är en schackkung egentligen? En svart figur utskuren i träd med krona, eller helt enkelt något som rör sig enligt ett viss förutbestämt mönster på en schackbräda? Ja själva schackspelet kan formaliseras i form av en riktad graf, utan någon som helst hänvisning till schackpjäser. På samma sätt skall tal reduceras till vad som reglerar dess manipulation. I mångt och mycket så skiljer sig inte hans framställning så mycket från andra ambitiösa försök att förmedla till de ofrälsta matematikens speciella charm, bortsett

[1] Oktobernumret 2004 av medlemsutskicket

[2] Man tänker osökt på ICA-kurirens serie bli en expert på X på fem minuter, där X kan stå för allt möjligt alltifrån Selma Lagerlöf, Opera, till hjärnkirurgi

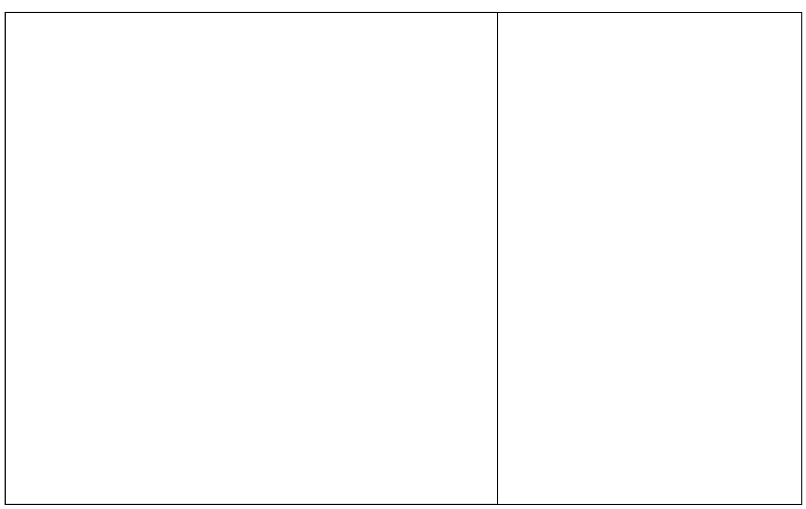
[3] Som vi kommer att ha anledning att återkomma till på Utskickets sidor

kanske från en mera utpräglad tendens att se det hela 'von oben' än vad som kanske har utmärkt mera klassiska framställningar. Klart är dock att detta knappast är boken för den stressade affärsmannen, han (eller hon) skulle kanske vara mera betjänt av pikanta anekdoter, lustiga skämtteckningar, massor av utropstecken och 'one-liners' samt en hel del färggranna bilder på fraktaler. Läsaren förutsättes att anstränga sig.

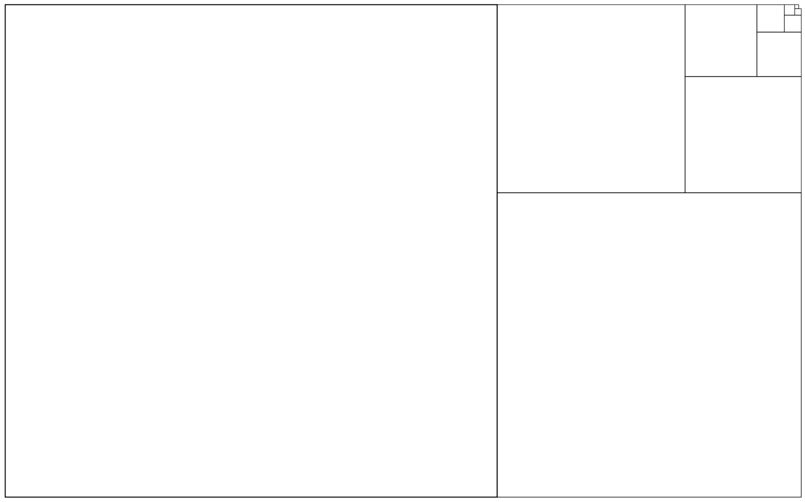
Som helhet ger boken på mig ett sympatiskt och charmerande intryck. Jag har inte läst den så nogrannt att jag funnit några direkta fel men jag misstänker att den är ganska ren från 'blunders'. En professionell matematiker kommer oundvikligen ha synpunkter på innehållet beroende på smak, men till författarens försvar skall sägas att även om han anses vare en kombinatoriker (vad det nu skall menas med detta) så visar boken ingen slagsida. Jag tänker som smakprov presentera två exempel ur boken, varav det senare utgör min egen vidareutveckling, samt avsluta med att presentera några av Gowers synpunkter på matematik, matematiker och utövandet av matematik avsett att i viss mån provocera läsaren.

Gyllene Snittet

Gyllene snittet tycks fascinera icke-matematiker mera än matematiker. Gowers avböjer att spekulera varför, vilket jag ej eller tänker göra, utan nöjer mig med att presentera Gowers argument varför det gyllene snittet inte är rationellt. Som definerande egenskap utgår vi från det välkända faktum att en rektangel med dessa proportioner, bevarar dessa om vi tar bort en kvadrat formad på dess kortsida.



Via induktion kan denna process fortsättas i det oändliga, och storleken på de kvadrater som avlägsnas blir godtyckligt små.

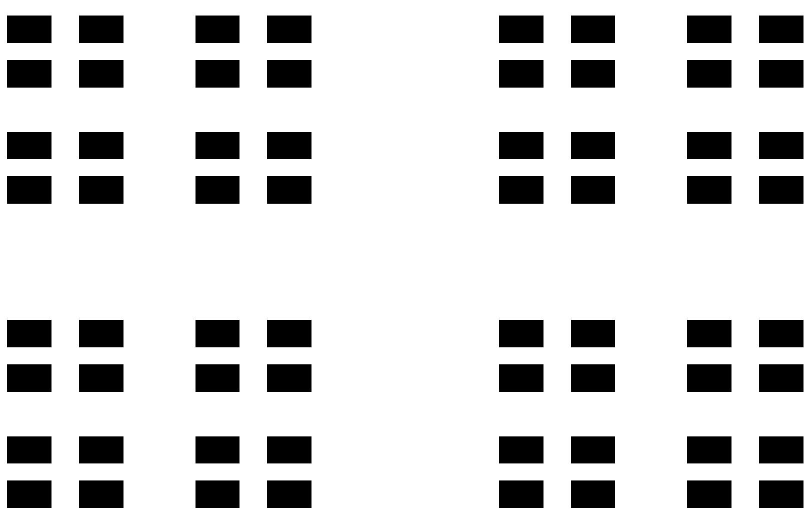


Om det gyllene snittet vore rationellt, d.v.s om vi kunde realisera rektangeln med heltals längder, så skulle per induktion varje kvadrat som avlägsnas också ha heltals längd. Speciellt skulle den minsta kvdrat som skulle kunna tas bort ha yta ett. Vilket motsäger den oändliga processen. För den professionella matematikern så ger detta argument inte något väsentligen nytt (hur skulle det?). Åtminstonde formellt vore standardargument ekvivalenta med detta. Notera även hur det väsentliga faktumet i alla diofantiska överväganden, nämligen att ett strikt postivt heltal är åtminstonde större eller lika med ett, uppträder naturligt i slutklämmen. Vad som är av intresse är huruvida Gowers argument är mera övertygande än ett formellt, speciellt för amatörer. Vitsen med ett bevis är att övertyga. Detta kan åstadkommas på två olika sätt. Det formella sättet är för läsaren att mer eller mindre mekaniskt övertyga sig om att alla argumenten är vattentäta. Att gå från A till B kan vara uppenbart, men ett bevis består av många små steg, och i slutändan inträder inte sällan en känsla av förvåning (inte sällan förvirring), fastän läsaren kan övertyga sig om att varje litet steg är oklanderligt. Varje steg är uppenbart, men kombinationen är det tydligen inte. Detta är inte alltför olikt en längre beräkning. Varje steg är mycket enkelt, men resultat kan vara förvånande. Vi brukar normalt tala om 'lokal förståelse'. Många bevis är av den arten, i själva verket de allra flesta. Det är därför en föreläsare drar sig för att presentera bevis och därmed tråka ut sin åhörarskara. Men å andra sidan att hävda utan att argumentera är i det långa loppet otillfredställande. Därav tendensen att välja ut så kallade nyckelidéer och göra svepande rörelser med händerna. Men då och då träffar man på bevis som fungerar som blixtnedslag och ger oss en ögonblicklig insikt.[4] Plötsligt 'känner' vi att något är sant, en kunskapskänsla som kan transformeras

[4] Ibland kan en lång kedja av 'oklanderliga' argument leda till något uppenbarligen absurt. I så fall vad tror vi på? Den långa beviskedjan eller vår instinktiva reaktion? Uppenbarligen den senare. Och i de flesta fall bekräftas denna. Efter en mycket nogrann granskning kan vi vanligtvis upptäcka ett subtilt, ofta mycket subtilt fel i ett eller flera argument. En granskning vi aldrig skulle ha varit motiverade att företaga oss, hade vi inte haft någon anledning att betvivla resultatet. Så mycket är således den 'lokala förståelsen'

till en djupare förståelse. Sådana ögonblick är veritabla 'epifanier' inom matematiken. Varför kan inte alla bevis vara av den arten[5]? Så varför kan vi inte göra oss av med alla 'beräkningsbevis', vars syfte inte är att instruera och förklara, utan endast avgöra; och ersätta dem med direkta bevis? Bortsett från det faktum att även långa bevis byggda på det evidenta kan innehålla många slående argument och vara härvidlag mycket instruktiva, så behöver vi förlika oss med det faktum att våra hjärnor, liksom våra sinnesorgan, är begränsade. Vi accepterar att de senare kan förstärkas via sinnrika instrument som teleskop. Samma sak med vårt tänkande. Metoder och algoritmer (ibland externt implementerade i elektroniska vidunder) utvidgar vår mentala kapacitet långt utöver dess naiva räckvidd. Så är det bara, och det finns ingen anledning att beklaga detta.

Efter denna digression om det evidenta kontra det uppenbara, kan jag inte motstå frestelsen att innan jag lämnar det gyllene snittet göra en kommentar, som inte återfinnes i Gowers. I illustrationen ovan, i vilken den gyllene rektangeln är uppdelad i ett oändligt antal mindre och mindre kvadrater, så följer vi en rigid procedur. Närhelst rektangeln är horisontell (d.v.s. den långa sidan 'ligger') väljer vi den vänstra kortsidan för att forma vår kvadrat, och när rektangeln är vertikal så avlägsnar vi den undre kvadraten. På så sätt konvergerar kvadraterna mot övre högra hörnet. Men om vi istället gör detta val slumpmässigt? Då kommer hopningspunkterna karaktäriseras av oändliga serier av nollor och ettor enligt någon konvention. Dessa oändliga slantsinglingar är naturligtvis inte samma sak som de reella talen i intervallet $[0, 1]$ eftersom uppenbarligen $001000\ldots$ inte är samma sak som $000111\ldots$. I själva verket får vi ett segment i vilken varje dyadisk punkt är dubblerad och med våld separerad. Ju högre höjden (i en uppenbar mening) desto kortare är splittringsintervallet. I själva verket framstår det hela misstänkt likt konstruktionen av en Cantormängd. Och i själva verket utgör mängden av hopningspunkter en Cantormängd, uppkommen via successiva avlägsnande av rektanglar, som i bilden nedan.

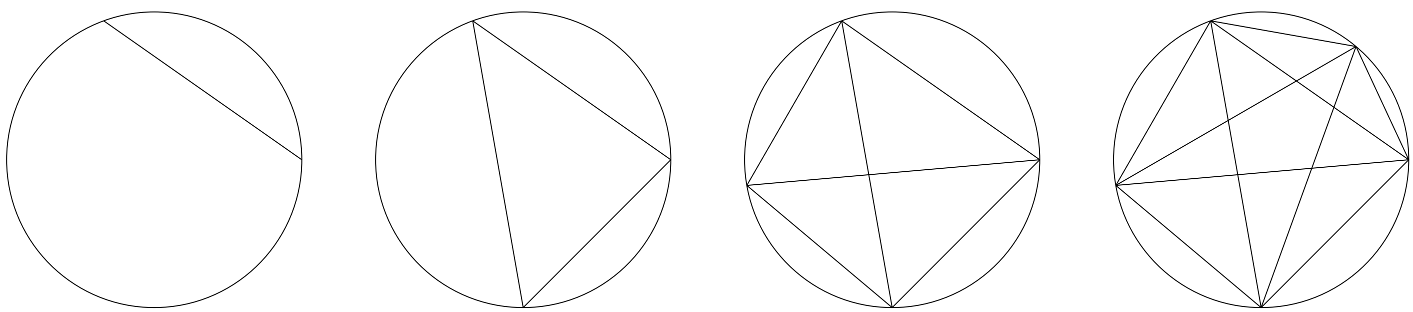


värd. Och matematikens soliditet är inte så mycket baserad på deduktion som ömsesidig koherens.

[5] Framlidne Mats Martinsson brukade göra distinktionen mellan det evidenta och det uppenbara

I själva verket är det inte svårt att visa att hopningsmängden är en nollmängd, homeomorf med Cantormängden, likväl som med produkten av en sådan med sig själv. Denna kommentar är ämnad att illustrera det faktum att varje del av matematiken ger upphov till oförutsägbara associationer och konsekvenser. Vad som stimulerar fantasin en väg är benägen att stimulera den på en annan. Matematiken är inte bara ett spel (som vissa cyniker insisterar) utan framför allt en gudomlig lek.

Som andra illustration ur Gowers bok, väljer vi att betrakta en cirkel med två, tre, fyra och fem punkter på sin rand, och antalet regioner alla uppkomna kordor vill dela skivan i.



Om man räknar får man serien $2, 4, 8, 16 \ldots$ och hade detta varit frågan om ett simpelt intelligenstest hade det varit liten tvekan om hur man skulle fortsätta serien. Men se upp, varnar oss Gowers. Om detta vore sant, och det vore en fråga om trettio punkter, skulle vi ha en miljard olika regioner. Dessa borde vara mycket små, och kordorna skulle trängas tätt. I själva verket vore de lite tjocka, som blyertslinjer obevekligen tenderar att vara, så skulle de uppenbarligen svärta ner hela cirkelskivan. Och detta verkar ganska otroligt. I själva verket kan vi göra några grova uppskattningar. Gowers gör det inte, men jag kan inte motstå frestelsen. Om vi har en region med omkrets d vad är dess yta? Uppenbarligen av storleksordningen d^2, i själva verket kd^2 där k beror på formen. (I själva verket gäller $k \geq \frac{1}{4\pi}$.) men låt oss vara lite vaga när det gäller k och behandla det mer eller mindre som en konstant. Om vi normaliserar radien till 1 och låter N vara antalet regioner. Då gäller $Nkd^2 = \pi$. Men om det är n punkter på cirkeln får vi $n(n-1)/2 \sim n^2/2$ kordor summan av vars längder är högst lika med n^2. Summan av alla omkretsar kommer att vara Nd och därmed sluter vi $2Nd \sim n^2$, från vilket vi förväntar oss $d \sim \frac{n^2}{2N}$. Om vi nu gör det uppenbara substitutionen ovan erhåller vi $N \sim k\frac{n^4}{4}$. Argumentet är medvetet slarvigt och läsaren inbjudes att göra det mera precist och med olikheter radande upp sig på ett konsekvent sätt. I vilket fall som helst så förväntar vi oss att antalet regioner inte växer exponentiellt utan med fjärde potensen. I själva verket för $n = 30$ har vi precis 27841 regioner enligt Gowers. Och jag finner ingen anledning att betvivla honom. Han är ju när allt kommer omkring en Fieldsmedaljör. Och i fallet $n = 6$ kan läsaren övertyga sig om att det rör sig om 31 regioner.

Obiter Dicta

Gowers hävdar att

1. det mycket väl går att göra ett flerårigt uppehåll i säg romanskrivande och sedan komma tillbaka, men att det är omöjligt att så göra i matematiken. När man väl har förlorat vanan att stundligen syssla med matematik är det hart när omöjligt att återfå den.

2. En matematiker behöver inte nå sin topp före trettio, men få matematiker gör sitt första banbrytande arbete efter fyrtio år fyllda.

3. Man behöver inte vara ett geni för att syssla med högklassisk matematik, om man med geni menas en person som snabbt och lättvindigt kan göra vad andra endast förmår efter långårig träning om ens det. Utan i själva verket det är sköldpaddan snarare än haren som vinner i längden.

4. Amatörer göre sig inte besvär i matematiken. Det är ju så gott som omöjligt att komma upp med en ny oprövad idé på ett välkänt problem. Möjlighet har endast de som är välförtrogna med ett annat område inom matematiken som visar sig ha oväntad relevans. (Ett klassiskt exempel på detta är ju just Wiles och Fermats Hypotes.) De amatörer som sänder in lösningar på klassiska problem visar just det stora gapet mellan amatören och den professionelle matematikern. Ett gap som är vida större än i andra discipliner.

5. Många matematiskt intresserade personer är kufar. Ovårdade, socialt inkompetenta nördar. Men, ju högre upp i nivån man kommer bland matematiker, ju mer av dessa sållas bort. Sensmoralen, låt dig inte skrämmas bort av kufarna, de riktigt framgångsrika matematikerna är inga kufar.

6. Matematikens essens är abstraktionen. Det är bättre att betrakta $x^{a+b} = x^a x^b$ som en regel, än att försöka härleda den från fallet med a, b positiva heltal. Tvärtom är bättre. (Med andra ord ett Bourbakistiskt förhållningsätt, från det allmänna till det speciella.) Och man kan manipulera med matematiska begrepp utan att riktigt förstå vad de innebär. Matematiker gör det hela tiden.

7. Matematiken är ackumulativ, och robust förståelse uppleves som ett krav. Således har man en gång tappat tråden i skolundervisningen kommer det att vara mycket svårt att hinna ifatt, vilket förklarar den utbredda motviljan mot matematiken bland allmänheten.

8. Datorer kommer i framtiden att ta över mycket av matematikerns rutinuppgifter, inte bara de beräkningsmässiga, utan att bevisa rutinatade lemman och bistå med en databas av sökbara motexempel, vilket besparar mycken möda med att försöka bevisa felaktiga teorem.

Regeringen har övergivit sina mål för matematiken

- *Göran Emanuelsson, Bengt Johansson och Lars Mouwitz* -

Efter att ha tagit del av budgetpropositionen kan vi konstatera att regeringen nu övergivit sina strategiska mål för svensk matematikutbildning. Vart har alla löften om kraftfulla satsningar tagit vägen? Löften som upprepats i olika uttalanden av utbildningsminister och skolminister i riksdagen, i pressmeddelanden och i media. Ett antal begränsade punktinsatser utan fokusering och samordnande ledning föreslås i budgetproppen. Detta står i skarp kontrast till den bakgrund, den analys, de ställningstaganden och den offensiva och långsiktiga handlingsplan som regeringens egen matematikdelegation lämnade i sitt betänkande för ett år sedan. Då gällde det att vända den negativa trenden. Att med föreslagna stöd nå upp till den tidigare deklarerade ambitionen att *svenska elevers resultat i matematik vid internationella jämförelser skall vara ledande* är mer än avlägset. Kommer utbildningsutskottet att acceptera regeringens sänkta ambitionsnivåer? Propositionens innehåll kommer sannolikt att uppfattas som ett svek av alla dem som engagerat sig i förändringsarbete och trott på alla utfästelser.

I sin Utvecklingsplan för kvalitetsarbete i förskola, skola och vuxenutbildning i maj 2002 (skr. 2001/02:188) skrev regeringen att vikten av goda kunskaper i matematik var obestridlig och att det var av vitalt intresse att matematikundervisningen utvecklades så att elevernas intresse för och kunskaper i matematik ökade. Regeringens ambition var att svenska elevers resultat i matematik vid internationella jämförelser skulle vara ledande. Beslutet att inrätta en Matematikdelegation presenterades som ett strategiskt utvecklingsområde. Detta följdes upp i statsministerns regeringsförklaring hösten 2002: *Matematiken stärks på alla nivåer från förskola till högskola* och Utbildningsutskottet välkomnade regeringens initiativ på matematikområdet.

Sedan Matematikdelegationen lämnat sitt betänkande i september 2004 med en detaljerad handlingsplan för en femårig matematiksatsning har den ena larmrapporten efter den andra lagts fram: Nationella utvärderingen NU2003, PISA2003 och TIMSS2003. Dessa ger en mycket dyster bild och visar att den nedåtgående trenden håller i sig. Läget i svensk matematikutbildning blir allt allvarligare. Tydliga försämringar har skett i elevernas kunskapsutveckling i grundskolan enligt såväl nationella som internationella jämförelser efter att regeringens utvecklingsplan kom till. 2003 uppvisade svenska elever i 8:an den resultatnivå som elever i 7:an hade 1995 enligt TIMSS. I förra månaden kom två nya rapporter som redogör för hur försämringarna fortsätter. Skolverkets rapport visar att en ökande andel elever inte är godkända i matematik när de lämnar grundskolan. Högskoleverkets rapport handlar om undervisningssituationen i matematik för nybörjarstudenter och pekar bl a på att de kunskaper eleverna har med sig i matematik från gymnasieskolan blir allt sämre med allt större brister inom grundläggande räkning och algebra. Och i förra veckan kom en OECD-rapport som visar att var tredje elev hoppar av gymnasieskolan. Bristande kunskaper i matematik är en starkt bidragande orsak.

Vad ger den uteblivna långsiktiga satsningen på matematik för signaler till utbildningsanordnare och näringsliv när det gäller de förväntningar om kraftfulla åtgärder som de senaste årens utvärderingar så tydligt gett anledning till? Vilka ytterligare sänkta ambitioner har vi att vänta? Inom NCM är vi t ex oroliga för vad som händer i det pågående kursplanearbetet för gymnasieskolan och de förändringar som aviserats för grundskolans kursplan i matematik. Är det tänkt att mål och målnivåer nu ska sänkas och anpassas efter de resultat som eleverna nått de senaste åren? Denna oro gäller också ämnesproven i matematik.

Inom den euoropeiska unionen har medlemsländerna kommit överens om tre strategiska utbildningsmål uppdelade på 13 delmål. EU skall 2010 vara ?världens mest konkurrenskraftiga ekonomi?. Bland målen finns krav på att skolan har tillräckligt många välutbildade lärare och goda grundläggande kunskaper i matematik, avgörande för både individens fortsatta lärande och för det moderna samhället och ekonomin. Direktiven till Matematikdelegationen innehåller en tydlig koppling till dessa mål. Det är medlemsländerna som har det fulla ansvaret för att vidta åtgärder. I det faktablad som regeringen nyligen presenterade om Sverige och de gemensamma europeiska utbildningsmålen konstateras att de svenska resultaten i matematik totalt sett inte är lika goda som i läsförståelse men att de ändå ligger signifikant över genomsnittet i såväl EU som OECD. Varför står ingenting om att Sverige utmärker sig som det land som visar de största försämringarna i matematik under de senaste åren?

$\diamondsuit \quad \spadesuit \quad \diamondsuit$

Svenska matematikersamfundets höstmöte

i Karlstad, 25-26 november 2005

Svenska matematikersamfundets höstmöte äger rum på Karlstads universitet, fredag-lördag 25-26 november 2005. Tema för mötet är **juniora matematiker** (precis som vid ett liknande arrangemang i Göteborg två år tidigare). Detta innebär att, frånsett mötets huvudtalare Warwick Tucker från Uppsala universitet, så är det tänkt att övriga föredrag skall ges av juniora matematiker, där junior betyder att man antingen är doktorand eller har en doktorsexamen som är högst två år gammal.

Juniora matematiker uppmanas anmäla föredrag: skicka titel och sammanfattning till Olle Häggström (`olleh@math.chalmers.se`) senast 1 november. Tillåtna språk är svenska och engelska, men samfundet ser gärna att så mycket som möjligt av dess aktiviteter äger rum på svenska. Anmälda bidrag kommer att beredas 20-30 minuter i programmet. Även mer seniora deltagare är naturligtvis mycket välkomna att delta (dock utan föredrag).

Mötet påbörjas fredagen den 25 november kl 13.00, och pågår som längst till kl 13.30 på lördagen. Ett antal rum har reserverats på Ibis Hotel Karlstad-City (495 kr/rum för 1-2 personer, plus 60 kr/person för frukost om sådan önskas). Deltagare kan vända sig direkt till hotellet för bokning, tel 054 - 17 28 30, ange bokningsnr G77130, senast 1 november. Hotell- och resekostnader förväntas betalas av deltagarnas respektive heminstitutioner.

För ytterligare information, kontakta Olle Häggström (samfundets ordförande) eller Niclas Bernhoff (lokal arrangör, `Niclas.Bernhoff@kau.se`). Se även

`http://www.math.chalmers.se/~olleh/SMS_Karlstad.html` .

Matematikens problem är verkliga[1]

- *Olle Häggström.* -

Den ena rapporten efter den andra visar att svensk matematikutbildning har allvarliga problem. På en rad tekniska högskolor har under en lång följd av år diagnostiska prov genomförts för att få reda på nybörjarstudenternas matematiska förkunskaper. Dessa vek kring millennieskiftet dramatiskt nedåt, och någon ljusning i siffrorna syns ännu inte till. Än mer alarmerande är uppgiften från förra årets internationella TIMSS-undersökning om att svenska åttondeklassare uppvisar sämre resultat än sjundeklassarna gjorde tio år tidigare. Ett helt år har gått förlorat!

Dessa omständigheter har fått stort genomslag i media. Lars Nilssons ledare i Ny Teknik den 7/9 för dock knappast diskussionen framåt. Vi får veta att när han själv påbörjade sina civilingenjörsstudier i början av 70-talet så förekom liknande tongångar, men se hur bra det ändå gått för honom och hans generationskamrater, liksom för svensk högteknologi! Underförstått: vi kan lugnt rycka på axlarna och räkna med att saken, nu liksom då, ordnar sig till det bästa.

Nilsson förbiser att dagens kris är långt djupare än den man då talade om. De brister i studenternas förkunskaper som vi idag alarmeras av handlar inte bara om elementär algebra (bokstavsräkning) utan även om aritmetik och bråkräkning - saker som hör hög- och i vissa fall mellanstadiet till. Kronan på verket i Nilssons bagatelliserande analys är att hans enda konkreta idé om vad som skulle kunna vända den negativa utvecklingen, är att Sudoku-flugan skall bestå. Man tar sig för pannan.

Mer konstruktiv är den färska rapport från Högskoleverket, författad av Ola Helenius och Anders Tengstrand, som tar upp frågan om hur universitet och högskolor hanterar situation, och ger förslag till åtgärder. En övertro på att satsningar på matematikdidaktisk forskning skall kunna lösa problemen kan skönjas i rapporten, men i övrigt har den en hel del klokt att säga.

Runt om på de olika universiteten och högskolorna pågår arbete med att utveckla undervisningen för att hantera det uppkomna läget. På en del håll har man provat att erbjuda studenterna två olika spår i matematikundervisningen beroende på om de känner sig säkra på gymnasiematematiken eller inte. Överhuvudtaget har uppfinningrikedomen varit stor vad gäller att hitta andra undervisningsformer än de traditionella. Projekt- och grupparbeten är exempel på detta, liksom en examination som löper kontinuerligt under kursens gång.

Dessa försök har ofta slagit väl ut. Trots detta har de ekonomiska realiteterna i många fall framtvingat en återgång till traditionell undervisning i form av föreläsningar i storgrupp och en enda skriftlig tentamen i slutet av kursen. Ett tungt ansvar för denna beklagliga utveckling faller på statsmakterna, som i sina satsningar på högskolan konsekvent prioriterat kvantitet framför kvalitet: antalet studieplatser har de senaste 15 åren ökats drastiskt, medan den ekonomiska tilldelningen ränkat per student har minskats nästan lika drastiskt.

[1] Publicerad i Ny Teknik, 14 sep 2005

Men en del av ansvaret faller också på högskolorna själva, som i sina interna resursallokeringar ibland behandlat matematikämnet alltför styvmoderligt.

En annan viktig fråga belyses i en aktuell studie av KTH-lektorerna Hans Thunberg och Lars Filipsson, som visar att ett allvarligt kommunikationsglapp mellan gymnasier och högskolor har uppstått. Det ena momentet efter det andra har under årens lopp mönstrats ut från gymnasiematematiken, utan att högskolorna tagit tillräcklig notis. Här behövs ett bättre helhetsgrepp.

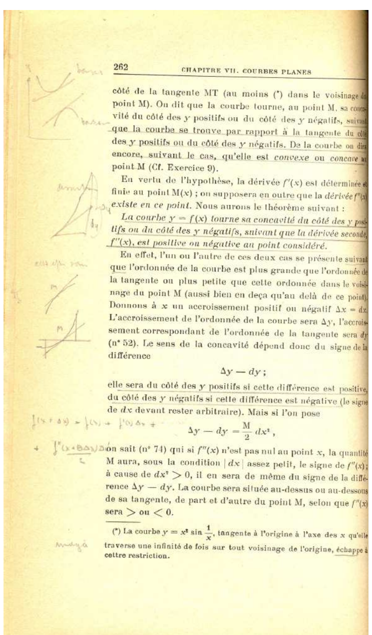
Samtidigt är det viktigt att slå fast att även om universitet och högskolor självklart behöver anpassa sig till det förändrade förkunskapsläget, så är det på längre sikt orimligt att högskolan tar över ansvaret för den sortens elementär matematik som rätteligen hör grund- och gymnasieskolan till.

Orsakerna till de försämrade resultaten på grund- och gymnasieskolan är många och komplexa. Varför har just matematiken drabbats ännu hårdare än andra ämnen? En trolig delförklaring är att den koncentrationskrävande matematiken är mer känslig för de ordningsproblem i skolan som vi naturligtvis måste komma till rätta med.

Till sist vill jag, i likhet med Helenius och Tengstrand, betona att även högskolorna har ett stort ansvar för utvecklingen i gymnasiet. Flertalet civilingenjörsutbildningar har sänkt behörighetskraven från gymnasiets matematik E till matematik D. Detta skedde i ett läge då söktrycket sjönk och man desperat sökte bredda rekryteringsunderlaget, men vad man inte tänkte på var de olyckliga signaler man därmed sände till gymnasieelever. Att snarast återgå till att kräva matematik E vore ett enkelt steg i rätt riktning.

- ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ -

Spår i bokhyllan, forts från sid 7



262 CHAPITRE VII. COURBES PLANES

côté de la tangente MT (au moins (*) dans le voisinage du point M). On dit que la courbe tourne, au point M, sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, suivant que la courbe se trouve par rapport à la tangente du côté des y positifs ou du côté des y négatifs. De la courbe on dira encore, suivant le cas, qu'elle est *convexe* ou *concave* au point M (Cf. Exercice 9).

En vertu de l'hypothèse, la dérivée $f'(x)$ est déterminée et finie au point $M(x)$; on supposera en outre que la *dérivée* $f''(x)$ *existe en ce point*. Nous aurons le théorème suivant :

La courbe $y = f(x)$ tourne sa concavité du côté des y positifs ou du côté des y négatifs, suivant que la dérivée seconde, $f''(x)$, est positive ou négative au point considéré.

En effet, l'un ou l'autre de ces deux cas se présente suivant que l'ordonnée de la courbe est plus grande que l'ordonnée de la tangente ou plus petite que cette ordonnée dans le voisinage du point M (aussi bien en deçà qu'au delà de ce point). Donnons à x un accroissement positif ou négatif $\Delta x = dx$. L'accroissement de l'ordonnée de la courbe sera Δy, l'accroissement correspondant de l'ordonnée de la tangente sera dy (n° 52). Le sens de la concavité dépend donc du signe de la différence

$$\Delta y - dy \,;$$

elle sera du côté des y positifs si cette différence est positive, du côté des y négatifs si cette différence est négative (le signe de dx devant rester arbitraire). Mais si l'on pose

$$\Delta y - dy = \frac{M}{2} dx^2 ,$$

on sait (n° 74) qui si $f''(x)$ n'est pas nul au point x, la quantité M aura, sous la condition $|dx|$ assez petit, le signe de $f''(x)$; à cause de $dx^2 > 0$, il en sera de même du signe de la différence $\Delta y - dy$. La courbe sera située au-dessus ou au-dessous de sa tangente, de part et d'autre du point M, selon que $f''(x)$ sera $>$ ou $<$ 0.

(*) La courbe $y = x^2 \sin \frac{1}{x}$, tangente à l'origine à l'axe des x qu'elle traverse une infinité de fois sur tout voisinage de l'origine, échappe à cettre restriction.

Kanske ansåg han den utgöra ett föråldrat sidospår i matematiken? Föga anade jag då att mycket av det som jag senare skulle fascineras av i den algebraiska geometrin, stod där att läsa i sin linda. Dock skall tilläggas att på detta område fanns faktiskt en svensk bok, Carlsons *Rymdgeometri*, som jag dock aldrig blev tillräckligt nyfiken på för att lockas bläddra i. Kanske det okända men helsvenska namnet på författaren förmådde inte utöva den lockelse som de utländska gjorde? Matematiken var ju för ynglingen utvidgade horisonter och en väg ut i den stora världen. Dicksons bok om ekvationer (*First Course in the theory of equations*), som Gårding också nämner, återfanns även den i bokhyllan. I denna bok kunde man på de första sidorna lära sig (om man var villig) hur man löser en tredjegradsekvation. En färdighet som de flesta matematiker kan klara sig utan.

Ulf Persson

Därför skall Sveriges statistiker och matematiker ha ett eget förlag

- *Mikael Möller* -

Språk:

Sverige är ett litet land som översköljs av amerikanska läroböcker som alla liknar varandra i sina upplägg, har samma fel i sina exempel och sällan har exempel och problem som är helt relevanta för våra studenter. Detta är särskilt utmärkande i statistikböcker för ekonomer men även andra discipliner är drabbade. Eftersom vi svenskar är så få går det inte att få ekonomi, på traditionellt sätt, vid utgivning av läroböcker skrivna på svenska, om de samtidigt skall vara ämnesanpassade och hålla god kvalitet.

Men läroböcker på svenska är ett måste! I t ex statistik på nybörjarstadiet har studenterna en känsla för vad ordet *spridning* står för och kan därför lättare anamma begreppet *standardavvikelse* Däremot blir samma begrepp på engelska *dispersion* och *standard deviation* oftast bara abstrakta ord. Lägger man sedan på den statistiska definitionen av detta begrepp

$$\sqrt{(1)/(n-1)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

så har vi en stor andel av studenter som bara har en algoritmisk förståelse av begreppet standardavvikelse – formeln ovan.[1]

Detta får som konsekvens att de i ett senare skede av livet endast beräknar datamängders medelvärden och inte deras spridning och därmed erhåller nonsenspåståenden. Ett aktuellt exempel där DN visar en skriande brist på kunskaper i statistik har gett ett fullständigt nonsenspåstående i form av en artikel som påstår att *9 av 10 av alla kvinnor förlorar på att arbeta*. Artikeln bygger på en rapport av Hélène Sandmark (Med dr) och Christer Hellsing (statistiker) vilka inte ens haft klart för sig skillnaden mellan median och medelvärde. Denna artikel citeras om och om igen som ett bevis för att sjukersättningen är för hög – men också som ett bevis för att lönerna är för låga (Sic!). Hur skall man ha det!

Dagens studenter är inte desamma som gårdagens och många har numer svaga kunskaper i svenska och än sämre i engelska. Istället utvecklar man på sina håll egna språk som rinkebysvenska (vilket av några knäppskallar i akademien betecknas som en språkutveckling istället för vad det är – språkligt förfall). Om inte detta räcker som motivering för att läroböcker på universitet och högskolor skall vara, åtminstone första året, på svenska så läs *Svenska språket dör ut på landets universitet*, DN den 15:e juni 2005.

Skaparglädje kvävs:

Alla lärare skriver under sina förberedelser föreläsningsanteckningar och dessa tenderar, hos vissa med stor skaparlust, att växa till kompendier. Många av dessa kompendier blir mycket bra men når aldrig bokstadiet eftersom den ytterligare ansträngning

[1] Du som läser detta uppmanas att ge motsvarande exempel inom det matematiska området.

som behövs är (eller rättare sagt **har varit**) rätt stor – det ska skapas övningar som ger den studerande möjlighet att träna på att använda de nya verktygen, det skall skapas index av olika slag så att det blir lätt att hitta det man söker, texten måste vara lätt att följa och felfri (åtminstone nästan), bilder skall göras o s v och sist men inte minst skall ett förlag intresseras för att trycka boken.

Förlaget tror jag är den primära grundbulten som kväver lusten att ta sig ända fram, men också att man som författare känner sig så ensam. Författaren har, i dagsläget, ensam allt ansvar för att den blivande boken skall bli bra i alla sina delar men förlaget tar en stor andel av vinsten. **Vad vi behöver är ett förlag som hjälper till med att ta fram bra statistisk och matematisk litteratur på svenska. Ett förlag som fungerar som en kuvös, tillhandahåller korrekturläsare och ger riktlinjer för hur arbetet skall utföras.**

Förlaget skall också inneha en webbplats där böckerna presenteras och deras styrkor och svagheter anges (observera att förlaget i första hand inte skall vara ute efter att sälja utan har som uppgift att ta fram bra litteratur). På så sätt kan skaparlusten frodas och komma andra till del – både studenter och lärare – ingen människa skapar uteslutande för sin egen skull utan nästan alltid för andra.

Upptäckarlust frodas:

Som ung människa leds man oftast in i matematikens värld av lärare som saknar kunskap om vad matematik egentligen är. Mina egna minnen är förvisso vaga men där finns $+$ och $-$ och $\times$ och $\div$ i oändlighet men aldrig varför. Där finns också enkla och sammansatta bråk – lika dödligt tråkiga. Först med införandet av den obekante x och lösande av andragradsekvationen kan jag vagt påminna mig en väckt nyfikenhet – hur löser man ekvationer av högre ordning? Den stora vändpunkten blev för mig när lärarna gick i strejk 1966 och jag hamnade på biblioteket i Högdalen. Där fanns en bok *Infinitesimalkalkyl* av en för mig tyvärr obekant författare som bland annat visade hur många av de formler som användes i skolan faktiskt har enkla härledningar. Det starkaste minnet jag har är av härledningen av formeln för cirkelns area, med hjälp av en enkel integrering, när man vet dess omkrets – så enkelt det blir med rätt verktyg!

Tyvärr stötte jag då inte på Tord Ganelius bok *Introduktion till matematiken* (vilken jag nyligen läst) och som på ett ypperligt sätt skapar en röd tråd som gör att man förstår matematik globalt om än ej lokalt. En bok som jag hoppas skall bli förlagets första i form av en redigerad nyutgåva.

Med dessa rader vill jag peka på en mer allmän uppgift för förlaget nämligen att vara huvudman för projekt, med en eller flera författare, vars uppgift är att ta fram litteratur riktad till ungdomar med intresse för de matematiska disciplinerna. Litteratur som väver ihop matematiken med dess personer och de samhällen dessa lever eller levde i. På så sätt kan vi väva ihop historia såväl matematik som statistik (jag nämner statistik här eftersom det var av väsentlig betydelse för staterna att ha en bra statistik för t ex skatteuppbörd), speciellt kan vi beskriva matematikens roll vid framställning av tyger till dagens moderna väverier. Hur fungerade egentligen den första programmerbara vävstolen och vad var det för industriell (matematisk) utveckling som ledde fram till den? Men det är inte bara historia och matematik som kan vävas ihop[2]: Se dig omkring och du ser inte ett enda föremål, tillverkad av människan, som inte har någon koppling till matematiken.

Det praktiska:

Efter kuvösverksamheten är det viktigaste med förlaget att det skall gå runt med pengar som kommer från förlagsverksamheten. **Förlaget skall ej kräva ett kontinuerligt tillflöde av bidrag. Dock måste det ha ett startkapital samt vara en från samfunden fristående juridisk och ekonomisk enhet, d v s ett aktiebolag där jag tänker mig att Statistikersamfundet och Matematikersamfundet står för hälften var av aktiekapitalet.**[3] Den löpande verksamheten betalas av att varje bok som trycks ger 25 kronor till korrekturläsaren, 25 kronor till förlaget och 100 kronor till författaren. Bokens pris bestäms sedan av de kostnader som tillkommer för tryckning av små upplagor. Förvisso kostar det mer att trycka en liten upplaga men det ger möjlighet att snabbt korrigera eventuella fel och brister.

Först när en bok har mognat och funnit en stadig kundkrets trycks den i större upplagor av förlaget och kan därmed antingen säljas till ett lägre pris eller ge en större vinst. Vinsten fördelas mellan författaren, korrekturläsaren och förlaget enligt samma princip som ovan.

Boken kan även ges ut som en pdf-fil som lever i säg 6 månader (samma teknik som biblioteken använder) och därmed borde boken endast behöva kosta 150 kronor – något som jag tror kommer att uppskattas av studenterna. Vill de sedan köpa en traditionell bok bör de kunna få den för något mer än tryckkostnaden d v s de rabatteras nästan hela kostnaden om 150 kronor. Eventuellt tillkommer kostnader för att kunna använda tekniken. Själva boken laddas ner från nätet och efter att ha betalt 150 kronor erhålls en nyckel för att kunna läsa pdf-filen.

Detta är en teknik som sannolikt kommer att explodera när det kommer prisbilliga och tryckkänsliga skärmar i A4-storlek som inte väger mer än ett kollegieblock. Den ger också boken helt nya möjligheter att utvidga sin domän med objekt som länkar, video och ljud.

Vem äger boken?:

I den traditionella förlagsvärlden, vad gäller facklitteratur, övertar förlaget äganderätten och författaren kan ej använda t ex ett kapitel från en bok i en annan bok utan förlagets medgivande.[4] I det gemensamma förlaget skall däremot författaren behålla den fullständiga äganderätten till sitt alster dock med en klausul som ger korrekturläsaren och förlaget deras andelar (25 kronor per tryckt bok) om författaren vill ge ut boken på annat förlag.

Det är mycket viktigt att författaren behåller äganderätten ty antag att du har skrivit en nybörjarbok i statistik för företagsekonomer och sedan får en kurs i statistik för nationalekonomer och vill ta fram en bok som är anpassad till denna senare kurs. Om du

[2] Ett mycket ambitiöst arbete har gjorts av Bo Göran Johansson i *Matematikens historia* som enligt min personliga mening borde kommit ut i flera delar för att bli mer lättillgänglig.

[3] Båda samfunden satsar 100 000 kronor vardera.

[4] De av er som givit ut böcker på Studentlitteratur kan i sina kontrakt se att så är fallet.

har äganderätten så kan den förra boken ligga till grund för den senare på så sätt att många teoriavsnitt kan behållas medan exempel, övningar, figurer m m ersätts med för nationalekonomer relevant material och vissa kapitel ersätts av några nya, ävenledes de, med en mer nationalekonomisk inriktning.

Språk igen:

I detta förslag har jag utgått ifrån att förlaget först och främst har som uppgift att ta fram bra läroböcker på svenska för ämnena statistik och matematik och jag har då tänkt på första årets kurser. Men det finns inget som hindrar att förlaget även tar sig an kurser på högre nivåer och även litteratur på andra språk. Förlaget kan här fungera som kuvös för böcker som sedan trycks av Wiley, Oxford University Press m fl och därmed stödja svenska forskare i deras internationella karriär. Dock tror jag att en dylik verksamhet behöver den förra, som ett stöd, just därför att Sverige är ett litet land.

Konkurrens:

Eftersom förlagets prioriterade uppgifter skall vara att dels skapa bra litteratur för svenska studenter och dels ge författaren kontroll över sitt arbete finns idag, mig veterligen, inga egentliga konkurrenter. Förhoppningsvis skall nu existerande kommersiella förlag i en inte alltför avlägsen framtid anamma samma principer.

- ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ -

Sven Spanne-symposium

i Lund 7 december 2005.

Med anledning av universitetslektor Sven Spannes pensionering hålls ett symposium vid Matematikcentrum i Lund 7 december 2005. Sven har gjort stora insatser inom undervisning, forskning och forskarutbildning i matematik och dess användningar, liksom inom läromedelsutveckling för tekniska högskolor.

Vid symposiet kommer att hållas föredrag med anknytning till olika delar av Svens verksamhet. Redan vidtalade föredragshållare är Jaak Peetre, Karl Johan Åström, Lars-Erik Persson och Fredrik Andersson. Intresserade ombeds kontakta undertecknade. Mer information kommer att finnas på

`http://www.maths.lth.se/matematiklth/personal/gunnar/spanne-symposiet`

Lund 28 september 2005

Jaak Peetre Gunnar Sparr

`jaak@maths.lth.se` , `gunnar@maths.lth.se`

Högskoleverkets rapport Nybörjarstudenter och Matematik

- *Ola Helenius* -

I sitt reglerings brev för 2005 fick Högskoleverket ett uppdrag att utreda matematiken på naturvetenskapliga och tekniska högskoleutbildningar. Uppdraget att genomföra denna utredning gick till undertecknad och Anders Tengstrand. Utredningen mynnade ut i rapporten ”Nybörjarstudenter och matematik – matematikundervisningen under första året på tekniska och naturvetenskapliga utbildningar”. De som vill ha en exakt redogörelse av innehållet rekommenderar jag att läsa rapporten[1] Jag har fått en förfrågan att här i medlemsbladet mycket kort kommentera denna utredning, vilket jag nedan gör. Jag koncentrerar mig på de förslag vi ger och hänvisar alltså de som vill ha mer kött på benen när det gäller bakgrunden och de observationer vi gjort till rapporten.

Arbetet

I arbetet med utredningen har vi besökt 6 lärosäten där vi pratat med lärare i matematik och tillämpningsämnen, ledning (rektors och/eller dekannivå) och studenter. Vid övriga 23 lärosäten som driver utbildningar inom det berörda området har vi gjort telefonintervjuer med företrädare för matematikämnet (studierektorer, avdelningsledare etc). Vi har också med hjälp av SCB gjort en undersökning av studenternas attityder till matematiken och hur den undervisas. Dessutom har vi studerat ett flertal diagnos- och förkunskapsprov och rapporter om dessa samt de sju tidigare nationella utredningarna och utvärderingarna som berör matematikämnet[2]

Observationer

Man kan säga att både studierna av de tidigare utredningarna och våra egna studier i stort sett bekräftar den bild av matematikundervisningen som jag tror alla läsare av medlemsbladet har. Det är stora problem med att nybörjarstudenterna inte har de kunskaper högskolan förväntar sig och alla lärosäten jobbar med att på olika sätt överbrygga denna klyfta. Matematiken som undervisas har ett mycket traditionellt innehåll och är typiskt sett inte specifikt inriktad mot de olika programmen utan huvudsakligen generell. Datorernas möjligheter illustreras endast sparsamt i de inledande kurserna i matematik och man använder endast i mycket liten utsträckning tillämpningar som illustration av matematikens begrepp. Själva undervisningen visar dock upp relativt stor variation, likaså examinationen. Olika undervisningsprojekt bedrivs dock med mycket små resurser och systematisk uppföljning och informationsutbyte över lärosätesgränserna sker endast i liten utsträckning. Givetvis finns många undantag från denna grova bild, men den är en ganska god approximation av sanningen i allmänhet.

Förslag

Vi ger i utredningen förslag inom tre huvudområden.

Studenternas kunskap om, förståelse för och färdigheter i elementär aritmetik

---

[1] 2005:36R http://web2.hsv.se/publikationer/rapporter/regeringsuppdrag/2005/0536R.pdf.

[2] Matek 1973, Univeristetskanslerämbetets utredning 1993, Räcker kunskaperna i matematik (HSV) 1999, Högskoleverkets utvärderingar av Matematikämnet 2002 och Högskoleingenjörsutbildningarna 2003 samt Matematikdelegationen 2004

Givetvis är det mycket mer än goda färdigheter i elementär aritmetik som högskolan förväntar sig av nybörjarstudenterna. Att vi ändå väljer att formulera oss enligt ovan är ett sätt att tydligt signalera att det även när det gäller elementär aritmetik finns stora brister. Även många duktiga studenter har dessa brister. Vi menar att undervisning om detta egentligen hör grund-och gymnasieskolan till, men att även högskolan under rådande omständigheter måste ta problemen på allvar. Därför måste alla högskolans matematiklärare kontinuerligt måste arbeta med den grundläggande matematiken parallellt med den normala högskolematematiken. Korta repetitionskurser är inte längre tillräckligt. Även arbete med avancerad matematik innebär ofta att man måste hantera grundläggande matematiska beräkningar. Att sådana beräkningar är en del av nästan allt matematiskt arbete verkar vara ett faktum som underskattats i grund- och gymnasieskolans arbete med matematik. Det verkar som att en elev som från början fått en begränsad, väldigt procedurell eller rent av felaktig uppfattning om ett begrepp kan behålla denna genom resten av skolsystemet, trots att eleven senare tillgodogör sig mer "avancerade" begrepp. Att som lärare på högskolan inte ta studenternas kunskapsutveckling inom den elementära matematiken på allvar innebär att man i slutändan kanske accepterar att t ex en färdig civilingenjör fortfarande är osäker på elementär bråkräkning.

Ett urval av andra förslag inom detta område är: Höj den formella behörigheten till E på civilingengörsutbildningar och D till högskoleingenjörsutbildningar. Skapa långsamma studiegångar för de som inte har rätt behörighet eller förkunskaper Utöka kontakterna mellan högskolans och gymnasiets matematiklärare och ställ resurser till förfogande för detta Ändra examensordningen för lärarutbildningen så att gymnasielärare i matematik måste ha 80 poängs studier i ämnesområdet.

Matematikens anknytning till tillämpningarna och användning av datorer.

Det är ingen tvekan om att matematik tillämpas inom fler områden i industri, samhälle och andra vetenskaper än någonsin tidigare och att många av dessa tillämpning är möjliga tack vara matematisk programvara. Det behövs därmed allt fler personer med goda kunskaper inom matematikens tillämpningar. I skenet av detta är det rimligt att dra slutsatsen att tekniska och naturvetenskapliga utbildningar måste ge en god orientering i både matematisk programvara och tillämpad matematik i allmänhet. Vi menar också att man genom att koppla matematiken tätare till olika tillämpningar kan visa på styrkan i matematiken som abstrakt vetenskap. Till exempel kan man genom att utgår från modeller med relevans för olika utbildningsprogram med hjälp av visualiserande programvara använda dessa modeller som en väg in i den mer abstrakta matematiken. Genom att senare också visa på hur en given matematisk "metod" kan modellera vitt skilda fenomen kan man illustrera matematikens generalitet och därmed också förklara varför matematikens styrka är just dess abstraktion. Det är förståss upp till varje utbildningsanordare att bestämma vilken matematik som skall undervisas och hur, men för att ge ett incitament för att starta en seriös diskussion om matematikens roll i de tekniska och naturvetenskapliga utbildningarna föreslår vi att denna roll skall skrivas from i de olika utbildningsplanerna.

Att skapa samarbeten och stärka kopplingen mellan matematiken och tillämpningsämnena är ingen lätt sak. Många lärare har enträgen jobbat med denna uppgift under många år, ofta utan speciella resurser. Därför föreslår vi också en nationell resurs där lärare kan söka pengar för utveckling av matematikkurser, speciellt med starkare anknytning till tillämpningar. Att inte ta situationen på allvar och inte fundera på matematikens roll i ingenjörsutbildningarna tror vi kan få allvarliga konsekvenser. På forskningsvnivå finns redan nu många institutioner inom tillämpade ämnen med stor kompetens inom beräkningar och modellering. Man kan tänka sig en utveckling där dessa institutioner tar över allt större del av matematikundervisningen, speciellt i samband med en övergång till Bolognamodellen. Samarbete mellan matematik och tillämpningsämnen på forskningsnivå är givetvis en bra sak, men vi menar ändå att matematiken bör undervisas av matematiker - även i framtiden.[3] Det är värt att nämna att alla företrädare för lärosätenas ledning (dekaner, rektorer etc) som vi pratat med menar att matematikens roll i de tekniska och naturvetenskapliga utblidningarna i framtiden kommer bli allt viktigare. Matematiken blir den sammanhållande länken när utbildningarnas inriktning i övrigt breddas mot nya områden. Man kan alltså se olika scenarier där matematiken antingen förlorar eller vinner inflytande och jag tror att det blir matematikinstitutionernas eget agerande som avgör vilket.

Matematikdidaktikens roll.

Inom detta område handlar våra förslag om att permanenta och utöka den nationella forskarskolan i matematik med ämnesdidaktiskt inriktning, skapa kurser i matematikdidaktik för högskolan som kan ersätta eller komplettera de mer allmänna högskolepedagogiska kurserna, samt att det skall avsättas resurser för att årligen organisera en nationell konferens om matematikundervisning på högskolenivå. Vår utgångspunkt är att lärarna i matematik vid universitet och högskolor gör ett mycket engagerat och bra jobb och ofta prova nya pedagogiska grepp. Vi saknar dock ett mer systematiskt förhållningssätt till undervisningen och dess utveckling. Målen med de förslag vi lägger är att fördjupa de diskussioner om undervisning som sker på institutionerna och därigenom öka kunskaperna om matematikundervisning och göra undervisningen bättre. Vi hoppas också på att en kultur där erfarenheter från olika undervisningsprojekt mer systematisk utvärderas och rapporteras i förlängningen skall underlätta pedagogisk meritering och skapandet av pedagogiska karriärvägar.

Rapportens struktur.

Till den del av rapporten som Anders och jag skrivit har Högskoleverket lagt en del med sina reflektioner och förslag.Verkets förslag är inte en direkt kopia av våra förslag. En av anledningarna till detta är att Högskoleverkets förslag är riktade till regeringen medan våra har flera olika adressater. Högskoleverket tar till exempel inte upp förslaget om ändrad behörighet som ett eget förslag eftersom detta är beslut som HSV själv förfogar över. Förslaget (till regeringen) om att gymnasielärare skall läsa minst 80 poäng inom ämnesområdet matematik för att bli behöriga är exempel på ett förslag som HSV lyfter.

10 miljoner.

På sidan 58 i utgiftsområde 16 i Regeringens budgetproposition står att läsa:

Under en följd av år har högskolan signalerat att gymnasieelevernas matematikkunskaper är bristfälliga. Regeringen gav därför Högskoleverket i uppdrag att utarbeta förslag för hur lärosätena bättre skall kunna möta nybörjarstudenterna. Regeringen föreslår mot denna bakgrund att 10 miljoner kronor avsätts till lärosäten vars studenter är beroende av

[3] För en diskussion om detta, se Osgood, B. (1998). Mathematics in Engineering: Notes from a Foreign Correspondent. (opublicerad) www.wiley.com/college/cch/Newsletters/Calculus__14/osgood.html

goda matematikkunskaper. Detta för att de skall kunna genomföra lämpliga delar av de förslag som Högskoleverket för fram i rapporten Nybörjarstudenter och matematik (HSV 2005:36 R).

Hur dessa pengar kommer att fördelas och vad som menas med ”lämpliga delar” ovan återstår att se. Regeringen avser att specificera detta i de kommande regleringsbreven till lärosätena. Min förhoppning är att matematikinstitutionerna redan nu börjar fundera på hur man vill förhålla sig till förslagen i rapporten för att när regleringsbreven offentliggörs kunna vara förberedda att på bästa sätt utnyttja de resurser som tilldelas lärosätet.

Göteborg 3 oktober 2005

- ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ -

Isaac and Jacob

I den komplexa projektiva geometrin skär alla plana kurvor varandra. Speciellt så skär en cirkel $x^2 + y^2 = z^2$ (i homogena ko-ordinater (x, y, z)) oändlighetslinjen $z = 0$ i punkterna $I = (1, i, 0)$ och $J = (1 - i, 0)$, de så kallade cirkulära punkterna i oändligheten. I själva verket, som man lätt förvissar sig om, så kan en cirkel (oberoende av radius och medelpunkt) karaktäriseras som en andragradskurva som går genom dessa två punkter I och J. Begreppet lär kunna spåras bak till Poncelet (1813). Förr i tiden ingick detta i den elementära geometri-undervisningen, som Gårding intygar i sina minnen, och beteckningarna I och J gav upphov till smeknamnen $Isaac$ och $Jacob$ åtminstonde i den anglo-saxiska traditionen. Men undervisningstraditioner ändras, själv träffade jag inte på begreppet förrän efter att jag skrivit min doktorsavhandling i algebraisk geometri, och med den förväntade mognad en sådan uppgift är förknippad vid, så beredde mig desssa punkter ingen huvudbry.

Kägelsnitten utgör en 5-dimensionell skara[4] som bland annat illustreras av att genom fem givna punkter går precis ett unikt kägelsnitt (som kan vara degenererat, d.v.s. bestående av två icke nödvändigtsvis skilda linjer). Därav följer det välkända faktumet att genom tre (=5-2) punkter kan man dra precis en cirkel (varje linje (tillsammans med linjen i oändligheten) är en degenererad cirkel). 1-dimensionella skaror av koncentriska cirklar är ingenting annat än en linjär skara av cirklar med givna tangenter i de cirkulära oändlighetspunkterna, och tangenternas skärningspunkter utgör den gemensamma medelpunkten. Den 3-dimensionella skaran av cirklar definerar en avbildning av det projektiva planet på en kvadrik i det projektiva rummet, därvidlag så blåses I och J upp och oändlighetslinjen ned. I det reella fallet betyder det att bilden blir en sfär som därmed utgör den reella strukturen på den komplexa kvadriken $CP^1 \times CP^1$

Genom att i förväg precisera två distinkta punkter I och J utskiljer man således bland kägelsnitten cirklarna utan att behöva precisera en metrik, och därmed ge mening åt många metriska begrepp såsom normal i en rent projektivt sammanhang.

Ulf Persson

[4] Terminologin *skara* är en klassisk svensk sådan, som var vanlig på gymnasieskrivningar fram till slutet av 60-talet. Numera skrivs så gott som ingen geometri på svenska, och därmed har mycket av den klassiska svenska terminologin därvidlag fallit i glömska.

Angående en rapport från Högskoleverket

- *Arne Söderqvist* -

"Nybörjarstudenter och matematik" är titeln på en nyligen presenterad skrift utgiven av Högskoleverket. Skriften har undertiteln *"Matematikundervisningen under första året på tekniska och naturvetenskapliga utbildningar"*. Författarna är de båda matematikerna Ola Helenius och Anders Tengstrand. (Skriften återfinns på adressen

`http://web2.hsv.se/publikationer/rapporter/regeringsuppdrag/2005/0536R.pdf.`)

I förordet kan man bla. läsa följande:

Högskoleverket fick i sitt regleringsbrev för 2005 följande uppdrag av regeringen: Högskoleverket skall, som ett led i satsningen på att stärka matematikämnet och matematikundervisningen i hela utbildningssystemet, kartlägga hur undervisningen för högskolenybörjare organiseras och genomförs, speciellt med avseende på matematikinslagen, vid lärosäten med utbildningar inom matematik, teknik eller naturvetenskap. Högskoleverket skall också utarbeta förslag på hur lärosätena bättre skall kunna möta studenter vid undervisningen och lärande i matematik.

På slutet av rapporten, under rubriken "Förslag till åtgärder", återfinner man bla. följande punkter: *"Mot denna bakgrund föreslår Högskoleverket följande:*

- *Den forskarutbildning i matematikdidaktik som startade med forskarskolan 2001 bör permanentas, och fler matematikinstitutioner bör involveras i den.*
- *Lärarna vid de matematiska institutionerna bör ges möjlighet att följa en pedagogisk kurs i matematikdidaktik där bl.a. resultaten av matematikdidaktisk forskning presenteras och diskuteras."*

För mig utgör rapporten en nedslående läsning. Jag kan dessvärre inte kalla slutsatserna för något annat än verklighetsfrämmande skenlösningar på ett allvarligt problem, nämligen problemet att förkunskaperna i matematik sjunkit katastrofalt hos nyintagna naturvetarstudenter och teknologer. Vad som till stor del orsakat detta är just vad Helenius och Tengstrand föreslår ska införas även på grundläggande akademisk nivå.

Att till exempel teknologer ska lära sig den matematik de behöver kunna i samband med att de studerar sina andra ämnen tror jag inte kan bli särskilt bra. Liknande idéer har sedan länge varit påbjudna i skolan. Därmed har skolmatematiken reducerats till ett hjälpämne helt utan eget värde och med följden att all matematisk förståelse gått förlorad. Man kunde jämföra med att någon försöker lära sig ett språk genom att bara använda en parlör. Visst kan man använda såväl matematiska formler som parlörer, men först måste man lära sig sammanhangen på annat sätt. Att däremot motivera studenterna genom att nämna matematikens tillämpningsområden är en helt annan sak.

En annan del av verkligheten som författarna förmodligen inte känner till och antagligen därför inte berör är hur lärartjänster sedan lång tid tillsätts i det svenska skolväsendet. Formellt och officiellt ska lärartjänster vederbörligen ledigförklaras genom ett stipulerat utlysningsförfarande. Så sker i verkligheten bara undantagsvis. Vad som är helt avgörande vid tjänstetillsättningar är istället social nätverkstillhörighet. De objektiva meritkriterier som fortfarande finns beträffande tillsättning av tjänster betyder i praktiken ingenting.

Detta har varit helt förödande för skolan i sin helhet och i allra högsta grad för skolans matematikundervisning. De allra flesta gymnasister genomgår numera gymnasiet utan att någonsin ha träffat en värdig företrädare för matematikämnet.

En mycket stor andel av skolans matematiklärare saknar "behörighet". Emellertid är begreppet "behörig" alldeles missvisande; förr i världen utgjordes behörighetskraven av en viss nivå på lärarens ämneskunskaper och därtill genomgången pedagogisk utbildning på lärarhögskola. Lärare som bara har ämneskunskaper, om än aldrig så gedigna, betraktas alltså som "obehöriga". Den kategorin lärare utgör numera en synnerligen liten grupp. Skolan består av förskola, grundskola och gymnasium. Förvärvad "lärarbehörighet" avser vissa ämnen och undervisning av vissa åldersgrupper. Det har emellertid blivit allt vanligare att lärare erbjuds eller tvingas att undervisa på kurser över sin kompetensnivå. Så har dessutom åtskilliga lärare med bristande ämneskunskaper, genom dispens, förklarats behöriga, ofta för att de ingår i rätt socialt nätverk. Dessa kategorier kallas däremot "behöriga lärare", vilket är ett rent missbruk av statistik. "Behörig" är alltså ett helt meningslöst begrepp att hänvisa till, trots att skolmyndigheter ofta gör så. Det är alltså viktigt att man förstår den innebörd de lägger i begreppet.

Kommunerna är lärarnas arbetsgivare. De flesta kommuner har ansträngd budget och anställer gärna "lärare" som varken har ämnesteoretisk eller pedagogisk utbildning. Ett frestande skäl är att sådana personer inte har fog för några högre löneanspråk. Senare kan dock de formella kraven komma väl till pass och åberopas av arbetsgivaren; "läraren" har alltså hamnat i en beroendeställning redan från början och är extra lyhörd för direktiv uppifrån. Arbetsgivarrepresentanten, skolans rektor, har på så sätt fått en underlydande som är lätt att styra och som utan att blinka accepterar sin chefs världsbild; varje liten fadäs skulle ju kunna användas som förevändning för avsked, med åberopande av de formella reglerna. Det hela sker med både politikernas och myndigheternas goda minne; vi har ju ofta fått höra att vad skolan behöver är fler "vuxna", och alltså inte speciellt fler lärare.

Allt fler är de rektorer som styr över skolor med undervisning på högre nivåer än sin egen behörighetsnivå som lärare. Det är tex. vanligt att gymnasierektorer rekryteras (oftast genom nätverksrekrytering) bland lärarna som undervisar på de allra första skolåren i kommunen. En chef måste inte nödvändigtvis kunna allt som de underlydande kan, men en chef måste åtminstone förstå hur verksamheten han styr över fungerar. Jag vill påstå att en fd. mellanstadielärare, som själv inte har någon traditionell akademisk utbildning, i regel inte är väl lämpad att styra över ämneslärare som har läst sina undervisningsämnen på akademisk nivå. Kan en sådan rektor förstå, att ingen som inte själv läst särskilt mycket matematik och inte är speciellt intresserad av ämnet inte heller kan sprida någon matematisk entusiasm och upptäckarglädje? Sådan insikt har knappast någon gymnasierektor idag. Dessvärre har nog rektorerna ofta uppfattningen att matematik antagligen är ganska onödig och att samhället troligen skulle fungera lika bra utan att så många människor kan någon matematik. Följaktligen rekryterar man de lärare som ska undervisa i matematik med just detta synsätt för ögonen.

Resultatet av hur det går till i skolorna sedan omkring femton år visar sig nu i form av sjunkande nivå på kunskaperna hos nyintagna studenter på universitet och högskolor. Inom skolväsendet självt har man förvisso inte kunnat undvika att notera en sjunkande kunskapsnivå hos eleverna. Uppfinningsrikedomen när det gäller att hitta på bortförklaringar har varit imponerande. Eleverna sägs tex. numera ha ”andra kunskaper” än de traditionella; man har fått större träning i att bedöma om man får rätt växel av snabbköpskassörskan, vilket skulle förklara varför elementär algebra och lösning av andragradsekvationer måst få komma i bakgrunden. Så tänjer man betygsgränserna nedåt för att få bättre examinationsfrekvens, dvs. man anammar metoden att försköna statistik. Kartan och verkligheten hamnar allt längre ifrån varandra.

En annan desperat åtgärd för att försöka komma ur den uppkomna situationen i skolorna har varit att använda ”didaktiska metoder”. Vad sådana egentligen innebär finns ingen klar uppgift om; uppfattningarna ändrar sig lika nyckfullt som klädmodet. Beträffande skolans värld skulle man kunna ha förståelse för detta med hänvisning till det oförstånd som olyckligen blivit förhärskande inom dess domän. När två matematiker drar slutsatsen att samma åtgärder borde implementeras även på akademisk nivå, blir jag förfärad och frestas utbrista ”Matematiker borde ha bättre förstånd!”

\- ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ -

Svar till Arne Söderkvist.:

I sitt inlägg i Medlemsbladet skriver Arne Söderqvist några saker som jag explicit vill kommentera. Vi menar inte att matematiken på högskolan nödvändigtvis skall läsas i samband med att de studerar sina andra ämnen. Istället menar vi att det till stor del är matematikämnet som skall få en tydligare roll genom att anknyta till tillämpningarna. Möjligen är kan det tyckas vara en subtil skillnad, men den är avgörande. I min text ovan beskriver jag lite mer om hur vi ser på detta och i själva rapporten förklaras det, hoppas jag, än tydligare. Vår viktigaste poäng är egentligen inte heller hur matematiken skall undervisas utan att matematikens roll i utbildningarna funderas igenom och tydligörs. Den del av rapporten som består av Högskoleverkets reflektioner är tyvärr lite mer luddig när det gäller synen på matematikämnet, men det är en del som jag och Anders inte haft inflytande över.

När det gäller det långa avsnittet i Arnes text om lärarbehörighet och tjänstetillsättningar instämmer jag huvudsakligen i hans resonemang. Dock faller detta inte inom ramen för det uppdrag som Högskoleverket har från regeringen.

När det gäller matematikdidaktiken har jag också förklarat några av de bakomliggande tankarna i min artikel ovan. Jag tror inte att det här lönar sig att här gå in på någon djupare diskussion om matematikdidaktikens mål och mening, men möjligen kan det vara värt att påpeka att vårt syfte inte handlar om att utifrån ämnesdidaktiska studier explicit kunna slå fast vilka metoder som skall användas vid högskolans matematikundervisning. Istället är det mer frågan om att på matematikinstitutionerna skapa ett produktivt förhållningssätt till frågor om undervisningen och dess utveckling.

Ola Helenius

Några tankar om matematikundervisning

- *Bengt Svensson* -

Jag har tagit del av flera artiklar om matematikundervisningen i svenska skolor och högskolor, publicerade i Matilde, nyhetsbrev för den danska matematiska föreningen. Här mina synpunkter på matematikundervisningen i den svenska skolan.

Jag är matematiklärare, med erfarenhet från förskola, grundskola, gymnasium och högskola. Min fru Marianne är förskollärare och har skrivit böcker i matmatik för förskolan.

Matematikstudier kräver sin egna pedagogik. Det går inte att använda någon universalpedagogik för alla inlärningssituationer. Språk kräver sin pedagogik, historia sin och så vidare. Tyvärr har inte den "pedagogiska forskningen" kommit så långt.

Som lärare i matematik och av egna matematiska studier vet jag att det framför allt tar tid att tillägna sig matematiskt tänkande. Man måste ha goda baskunskaper, väl befästa, så att bristen på dessa inte hämmar de fortsatta studierna. Det är helt förståeligt att en icke-matematiker inte uppfattar nödvändigheten av detta. Det går att lära sig att byta däck på en bil utan att veta var ratten sitter men det går inte att lära sig Galoisteori utan att veta vad grupper och kroppar är!

En brist i vår matematikundervisning är att vi inte alltid kontrollerar att eleverna har tillräckliga baskunskaper för att klara av nya matematiska avsnitt. Detta beror på att vi som lärare inte har satt oss in i, vilka nödvändiga förkunskaper elverna måste ha. Detta gäller alla stadier och kurser. Lättast att kontrollera att eleverna har nödvändiga kunskaper är det, när eleverna kommer i kontakt med matematik under de första skolåren. Till och med gymnasienivå borde det inte vara svårt att bestämma vilka baskunskaper, som krävs för olika kursavsnitt. På högskolenivå blir matematikstudierna mer komplexa och det blir svårare att precisera baskunskaperna. Det blir mer och mer orimligt att precisera nödvändiga baskunskaper.

En svårighet, som matematiklärarna råkar ut för, är att elever kan mekaniskt lära sig att lösa problem eller lära sig matematiska definitioner och satser. Detta problem uppstår redan från de tidigaste matematikstudierna i späd ålder. Elever, som lär sig på matematik på detta sättet kommer att "hata" matematik eller åtminstone inte "älska" matematik. Själv har jag nyligen mött en elev, som läst en kurs i partiella differentialekvationer, PDE. Han hade klarat tentamen men inte förstått vad han gjort enligt honom själv. Har man tillräcklig minneskapacitet, så klarar man det. Det enda sättet att komma åt detta problem är att lärare och elever kan skapa ett "förtroligt" samarbete. Detta kräver mycket tid och mindre matematikgrupper på alla stadier. Så länge en högskolelärare kan ha upp till 150 elever i en undervisningsgrupp är detta helt omöjligt.

I en av artiklarna i Matilde påpekar en lärare att elever inte vågar ställa frågor till sin lärare speciellt i matematik. Eleverna tror att de är "dumma" och det vill de inte vara inför sina kamrater. Detta är det andra allvarliga problemet inom matmatiken. Tyvärr så tilltar detta ju mer matematik eleverna studerat. Jag har aldrig hört att någon doktorand frågat på en doktorandföreläsning och inte heller att läraren kontrollerat att åhörarna förstått det han har föreläst om. Vi måste skapa ett bättre samarbetsklimat mellan lärare och elev, men kanske framförallt ett bättre samarbete mellan elev och elev.

På vissa högskolor är det poulärt att göra utvärderingar av olika kurser. Ofta har gruppen utsett en elevrepresentant, som skall representera gruppen. Intentionen är att bedömma kursen och lärarna. I matematik är detta slöseri med resurserna. Elevrepresentantens uppgift borde vara att tala om för läraren vad eleverna inte förstått under kursens gång.

Det tredje problemet har jag redan snuddat vid. Eleverna i matematik måste från början lära sig att man måste “tänka”, “försöka förstå”, “öva”, “koncentrera sig under lång tid”, “ha det lugnt omkring sig”, “öva”, “försöka igen”. Tala om att det arbetsamt att läsa matematik! Du måste använda hjärnan! Om du gör detta kommer du att få uppleva glada stunder, när du nått ditt mål. Innan dess kan det vara både tråkigt och jobbigt.

Detta tänkesätt hör inte hemma i dagens skola, där ekonomim är viktigast. Dagens pedagogik går i stort sett ut på att göra det som är roligt, för då lär man sig bäst. Med detta synsätt kan man lika gärna stryka matematik från schemat, vilket man i praktiken har gjort. Det som dagens elever är otroligt bra på och har mycket övning i är att manipulera lärarna för att få bättre betyg. Själv har jag hört en teknolog, som tyckte att hon skulle få poäng för att hon inte förstod vilket fel hon hade gjort eller standardvarianten: “Jag kan väl få godkänt på 25 poäng i stället för 32 poäng, så slipper du att ha arbete med att göra en ny tenta!”. Ju fler godkända, desto bättre lärare och högre lön. Jag har själv råkat ut för att en rektor uppmamant mig att sätta högre betyg, för att skolan skulle få bättre rykte. I Göteborg får nästan alla gymnasieelverna MVG på de “bättre” skolorna förmodligen bara därför att skolan får bättre rykte och fler elever söker sig dit. Därmed blir ekonomin bättre. Lärarna får högre löner. Enligt en studiekamrat från Ryssland hade de samma system under kommunisttiden. Betygssystemet kollapsade! Men det passar nog bra i Sverige.

Under förra läsåret gick jag en kurs i pedagogik för högskolelärare, vid GU. Det visade sig att under de senaste 25 åren har de blivande lärarna i matematik läst matematisk didaktik. Resultatet har blivit att eleverna kan mindre och mindre matematik. Lärarna har mindre och mindre kunskaper i matematik. Lär lärare och elever mer matematik i stället för att lägga pengar på “projekt” och “pedagogisk forskning”. Använd pengarna, där de gör mest nytta!

Som en liten knorr kan jag berätta att jag, som lärarhandledare i mitten av 1990-talet, handledde en lärarkandidat i matematik. Efter en lektion, som lärarkandidaten hållit, undrade metodiklektorn om vi hade ”skrämt” eleverna, eftersom de hade suttit stilla och lyssnat och gjort vad de skulle. Man fick inte “kuva” barnen. Det var länge sedan han hade varit med på en lektion, där alla kunde sitta och arbeta i lugn och ro. Enligt dagens pedagogik är “stökigt och bökigt” det samma som en “kreativ miljö” och lärare med akadmiska kunskaper är en fara för eleverna. Akademiskt utbildade gymnasielärare har ersatts av ämneslärare från grundskolan och grundskollärarna har ersatts med barnskötare.

Lösningar till Sudokun

5	4	2	6	8	7	3	9	1
6	7	8	1	9	3	5	2	4
3	9	1	2	5	4	6	7	8
7	3	5	8	4	6	2	1	9
1	2	9	7	3	5	4	8	6
4	8	6	9	1	2	7	5	3
2	1	4	3	7	8	9	6	5
9	5	7	4	6	1	8	3	2
8	6	3	5	2	9	1	4	7

59	23	96	18	42	75	84	61	37
88	62	35	57	21	94	16	43	79
17	41	74	89	63	36	55	22	98
26	99	53	45	78	12	67	34	81
65	38	82	24	97	51	49	76	13
44	77	11	66	39	83	28	95	52
93	56	29	72	15	48	31	87	64
32	85	68	91	54	27	73	19	46
71	14	47	33	86	69	92	58	25

9	1	2	3	4	5	7	6	8
5	3	4	6	7	8	2	1	9
7	6	8	9	2	1	5	4	3
8	7	5	4	9	2	6	3	1
3	9	1	7	8	6	4	2	5
4	2	6	5	1	3	8	9	7
2	5	9	8	3	4	1	7	6
1	8	3	2	6	7	9	5	4
6	4	7	1	5	9	3	8	2

8	7	6	1	2	5	4	9	3
2	1	5	9	4	3	8	7	6
4	3	9	6	7	8	5	2	1
7	8	4	3	5	9	6	1	2
1	2	9	4	8	6	3	5	7
6	5	3	2	1	7	9	8	4
9	2	1	5	6	4	7	3	8
5	4	7	8	3	1	2	6	9
3	6	8	7	9	2	1	4	5

3	2	4	9	5	6	8	1	7
1	8	7	3	2	4	5	9	6
9	5	6	1	8	7	2	3	4
8	7	1	2	4	3	6	5	9
2	4	3	5	6	9	7	8	1
5	6	9	8	7	1	4	2	3
4	3	2	6	9	5	1	7	8
7	1	8	4	3	2	9	6	5
6	9	5	7	1	8	3	4	2

9	3	2	4	6	8	5	1	7
4	1	8	5	3	7	2	9	6
6	7	5	1	2	9	8	4	3
1	6	4	2	9	5	3	7	8
8	2	9	7	1	3	4	6	5
3	5	7	8	4	6	9	2	1
7	8	6	9	5	4	1	3	2
2	4	3	6	8	1	7	5	9
5	9	1	3	7	2	6	8	4

5	6	1	2	3	8	7	4	9
4	7	2	6	1	9	5	8	3
8	3	9	5	7	4	6	1	2
9	4	6	1	5	2	8	3	7
3	5	7	8	4	6	2	9	1
1	2	8	3	9	7	4	5	6
6	1	4	9	2	5	3	7	8
7	8	3	4	6	1	9	2	5
2	9	5	7	8	3	1	6	4

7	8	3	1	9	5	4	6	2
4	6	2	8	7	3	9	1	5
1	5	9	6	4	2	3	8	7
5	2	1	4	6	7	8	9	3
6	4	7	9	3	8	5	2	1
3	9	8	5	2	1	6	7	4
9	1	6	7	5	4	2	3	8
2	7	5	3	8	6	1	4	9
8	3	4	2	1	9	7	5	6

KALENDARIUM

(Till denna sida uppmanas alla, speciellt lokalombuden, att inlämna information)

Arne Beurling Symposiet
Uppsala, 4 november

SMS Höstmötet
Karlstad, 25-26 november

Sven Spanne Symposiet
Lund, 7 december

Författare i detta nummer

Jan-Erik Björk har förekommit flitigt i Utskicket. Han verkar förutom som matematiker även som skulptör och aktuell med en Beurlingbyst

Gerd Brandell har under många år varit verksam uppe i Luleå men tjänstgör nu sedan 2001 som lektor i Lund. Hon har sedan starten 2000 varit koordinator för forskarskolan i matematikdidaktik. Hon har även varit ordförande i en av matematikdelegationens arbetsgrupper.

Göran Emanuelsson Bengt Johansson och Lars Mouwitz är de tunga namnen vid NCM och har varit djupt involverade i matematikdelegationens arbete

Ola Helenius doktorerade för Alexander Stolin ochär verksam vid NCM sedan ett par år

Mikael Möller är chefredaktör för Qvartilen - den statistiska syster-tidskriften.

Bengt Svensson är pensionerad gymnasielärare från Lindome med en lovvärd ambition att förkovra sig på sin ålders höst.

Arne Söderqvist har verkat som gymnasielärare i matematik och fysik sedan början av 70-talet, och är vid det här laget välkänd såsom debattör för utskickets läsare.

Andre Toom är rysk matematiker verksam i Brasilien sedan 1997. Hans produktion innefattar bland annat ergordteori och perkulation. Men han har även varit kritiskt involverad i matematisk undervisning. Hans artikel *A Russian Teacher in America* har rönt stor uppmärksamhet.

Paul Vaderlind Ursprungligen från Polen men i Sverige sedan 1969 och på Stockholms Universitet sedan 1974. Han doktorerade för Bernt Lindström 1982. Han har givit ut tretton problemsamlingar för såväl vuxna som barn. Dessutom har han skriviten bok om just sudokun.

Innehållsförteckning

Notiser