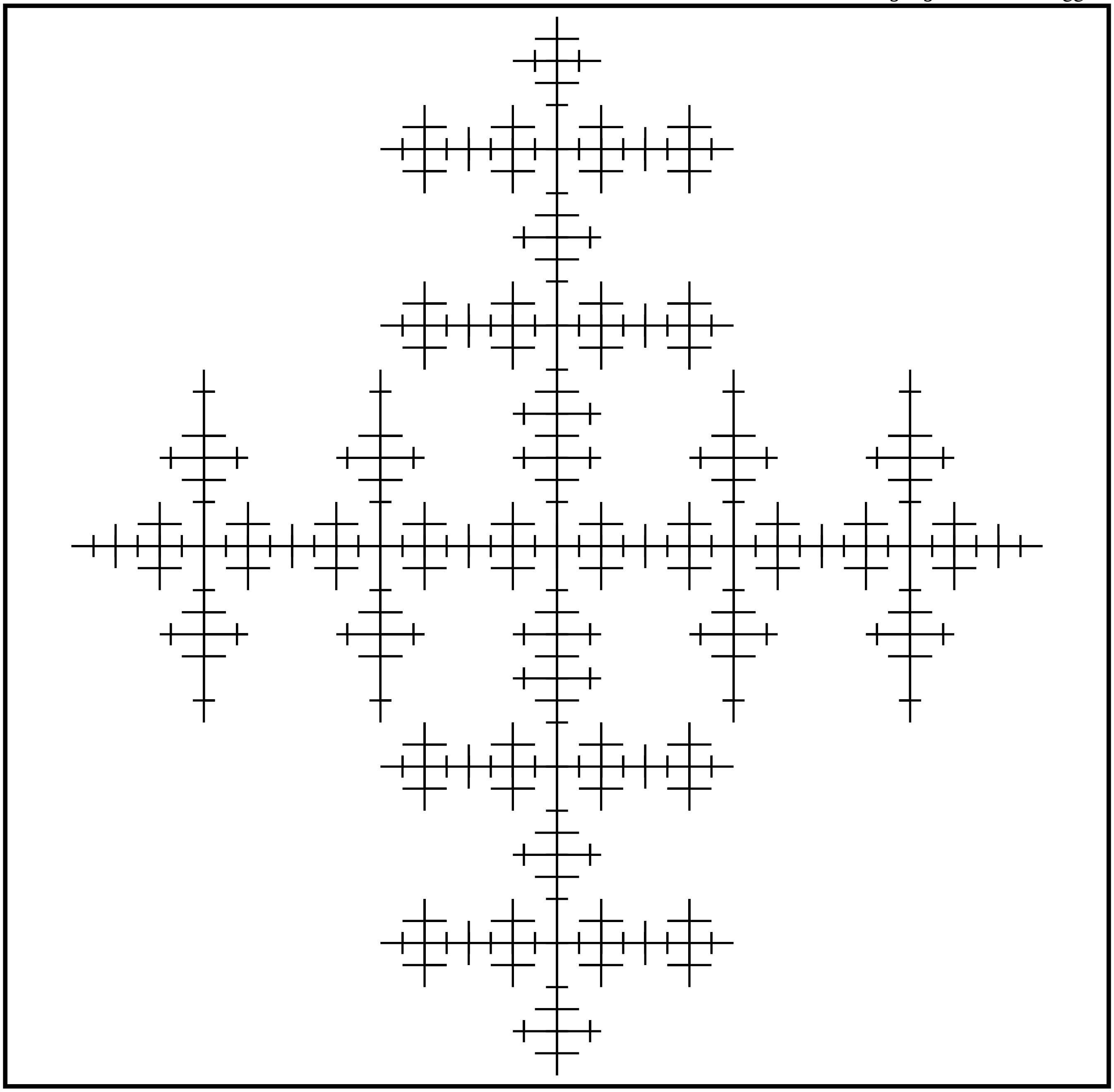
Svenska Matematikersamfundet

MEDLEMSUTSKICKET

15 maj 2006

Redaktör: Ulf Persson
Ansvarig utgivare: Olle Häggström



Prisbelönta - Carleson, Hörmander och Jonsson

Svarte Lasse: *Peetre*   Euklides Nya Kläder: *Bergsten* Kreativ Skolgeometri: *Ulin*
Gör undervisningen mer Rigorös!: *Hackman*   Den svenska modellen: *Söderqvist*
Ganelius i ny Upplaga: *Möller och Söderqvist* Intervju med Abelpristagare: *Persson*
Folke Funnen!: *Peetre*   Skolornas Matematiktävling 2005:

Matematik på Gott och Ont: *Samfundets Årsmöte 9-10 juni*

UTSKICKET

utkommer tre gånger per år I Januari, Maj och Oktober. Manusstopp är den första i respektive månad

Ansvarig utgivare:	*Olle Häggström*
Redaktör:	*Ulf Persson*
Adress:	*Medlemsutskicket c/o Ulf Persson* *Matematiska institutionen* *Chalmers Tekniska Högskola*

Manus kan insändas i allehanda format `.ps, .pdf, .doc` Dock i tillägg önskas en ren text-fil. Alla texter omformas till `plain tex`

SVENSKA MATEMATIKERSAMFUNDET

är en sammanslutning av matematikens utövare och vänner. Samfundet har till ändamål att främja utvecklingen inom matematikens olika verksamhetsfält och att befordra samarbetet mellan matematiker och företrädare för ämnets tillämpningsområden.

För att bli medlem betala in avgiften på samfundets `plusgirokonto 43 43 50-5.`
Ange namn och adress på inbetalningsavin (samt om Du arbetar vid någon av landets institutioner för matematik).

Medlemsavgifter (per år)

Individuellt medlemsskap, *200 kr*
Reciprocitetsmedlem *100 kr.*
(medlem i matematiskt samfund i annat land med vilket SMS har reciprocitetsavtal):
Doktorander gratis under två år
Gymnasieskolor: *300 kr.*
Matematiska institutioner: *Större 5 000 kr, mindre 2 500 kr*
(institutionerna får sälva avgöra om de är större eller mindre).
Ständigt medlemsskap: *2 500 kr (engångsinbetalning)*

Man kan även bli individuellt medlem av EMS genom att betala in 200 kr till Samfundet och skriva EMS på talongen.

HEMSIDA: `http://www.matematikersamfundet.org.se/`

Här återfinnes bl.a. protokoll från möten

STYRELSE:

ordförande	*Olle Häggström*
	`031 - 772 53 11`
	`olleh@math.chalmers.se`

vice ordförande	*Nils Dencker*
	`046 - 222 44 62`
	`dencker@maths.lth.se`

sekreterare	*Johan Jonasson*
	`031 - 772 35 46`
	`jonasson@math.chalmers.se`

skattmästare	*Milagros Izquierdo Barrios*
	`013 - 28 26 60`
	`miizq@mai.liu.se`

5:te ledamot	*Anette Jahnke*
	`0730 - 69 56 95`
	`anette.jahnke@hotmail.com`

ANNONSER

(Dessa publiceras inom en ram som denna)

helsida 3000 kr
halvsida 1500 kr
mindre 750 kr

Annonser i tre konsekutiva nummer ger endast dubbla priser d.v.s. 1/3 rabatt

Annonser inlämans som förlaga
samt i förekomamnde fall som text-fil, Dessa formateras om i PostScript

Detta Nummer

Hur tjockt får ett nummer av Utskicket vara? Numren tenderar att bli tjockare och tjockare i takt med redaktörens växande entusiasm. Den ursprungliga versionen av detta nummer närmade sig åttio sidor. När utkommer det första numret med över hundra? Kan man tänka sig att finna ett femhundra sidor tjockt nummer i postfacket eller brevlådan? Var skall man sätta gränsen? I förväg satta gränser blir lätt lite krystade, och man kan fråga sig huruvida de är nödvändiga, ty även utan fastlagda gränser så brukar fenomen i praktiken begränsa sig naturligt. Inga träd växer som bekant upp till himlen. I samråd med den ansvarige utgivaren har jag dock bestämt mig för att hålla inne något. Detta betyder inte att artiklar förkastas, bara att utgivandet uppskjutes. Det kommer att få som effekt att framförhållningen blir längre och kommande attraktioner kan förannonseras regelbundet.

Tre svenska matematiker Lennart Carleson, Lars Hörmander och Mattias Jonsson(i bokstavsordning) har belönats med priser. I två av fallen talar vi om internationella priser, och det faktum att svenskar har belönats är anmärkningsvärt och förtjänar uppmärksamhet. I det tredje fallet rör det sig om Samfundets eget Wallenbergpris och det faktum att en ung svensk matematiker belönats är av uppenbara skäl något mindre oväntat. Pristagarna presenteras som vanligt. Abelpriset uppmärksammas alltid i Utskicket, liksom Wallenbergspriset, detta är tradition.

Förra numret hade ett tema - Afrika. Detta nummer har inget tema, även om jag ursprungligen lekte med att göra geometri till ett sådant. Läsaren finner dock två artiklar, varav en längre, på temat geometrin i skolan. Vidare annonserar Mikael Möller och Arne Söderqvist ett nytryck av Tord Ganelius gamla bok Introduktion till Matematiken från 1966, en bok som för övrigt recenserades av Söderqvist i ett tidigare nummer. Utdrag från boken kommer att publiceras senare. När det gäller recensioner har Jaak Peetre inkommit med en lång anmälan av Laurent Schwartz memoarer. Av utrymmesskäl så delar jag denna på två. Vidare har samma författare spårat upp den mystiske 'Folke' han efterlyste i förra numret. Alla är nu nöjda.

Opinionsinlagor är alltid välkomna och denna gång bidrager Peter Hackman och Arne Söderqvist, och slutligen innehåller Utskicket 'pliktmaterial' som annonsering av årsmötet, verksamhetsberättelse, balansräkningar samt rapportering om Matematiktävlingen.

Ulf Persson (redaktör) Göteborg den 15 maj, 2006

Halvtid

- *Olle Häggström* -

Många angelägna frågor om forskning och utbildning på olika nivåer har på senare år diskuterats och debatterats i samfundet, inte minst i Medlemsutskicket. En fråga som dock (en smula oförtjänt, tycker jag) kommit något i skymundan är den om forskarutbildningen i matematik: hur den bör se ut, och i vilken riktning den eventuellt bör utvecklas i framtiden. Låt mig, i hopp om att få igång en diskussion, nedteckna några korta tankar om saken.

I vintras deltog jag i ett möte en bit ovanför institutionsnivån i universitetsorganisationen, rörande forskarutbildning. Diskussionen uppehöll sig en längre stund kring en rad olika ämnen – ekonomi, projektledning, juridik, och det ena med det tredje – som jämte själva forskarutbildningsämnet kunde behövas i utbildningen. Entusiasmen kring dessa "extraämnen" var stor, och uppslutningen kring idén att de behöver ges ökat utrymme kändes i det närmaste total. Med tanke på att en så stor del av de färdiga doktorerna går ut i näringslivet, så är det inte rimligt att doktoranden lägger nästan all sin kraft på något så snävt och onyttigt som själva forskarutbildningsämnet och forskningsuppgiften. Så gick resonemanget.

Till slut tog jag till orda, och framhöll avvikande uppfattning. Forskarutbildningen är flaggskeppet i det svenska utbildningssystemet, och den del där studenterna bäst får tillfälle till fördjupning. Fördjupning förutsätter specialisering, vilken i sin tur står i motsats till den gymnasifiering som mötet tycktes vara inne på. Därtill kan man fråga sig om det verkligen bör vara forskarutbildningens uppgift att förbereda för alla upptänkliga behov doktoranden kan tänkas stöta på i sitt framtida arbetsliv: en doktorand är ju en vuxen människa, som borde klara av att i viss mån ta ansvar för sitt liv och sin yrkessmässiga framtid utan att detta nödvändigtvis helt och hållet sker inom ramen för forskarutbildningen.

I ett försök att söka gemensam ståndpunkt föreslog en av mötesdeltagarna att man skulle kunna hantera balansgången olika för olika individer, på så vis att man tidigt i forskarutbildningen skiljer på å ena sidan de doktorander som är inriktade på forskning, och å andra sidan de som inte är det. Jag frågade då om jag hade förstått hennes förslag rätt, och i så fall vad personer som inte är inriktade på forskning överhuvudtaget har på en forskarutbildning att göra. På den första delfrågan blev svaret jakande, medan jag dessvärre inte blev klok på vad jag egentligen fick för svar på den andra.

Tilläggas kan att jag tycker mig ha uppfattat att det gymnasifieringsvurm som dominerade mötet är ganska utbrett i universitetssverige. Liknande tankegångar kom också till uttryck i den rapport med den grandiost klingande rubriken *En ny doktorsutbildning - kraftsamling för excellens och tillväxt*[1] som Utbildningsdeparte-

[1] SOU 2004:27, `http://www.regeringen.se/content/1/c6/01/21/85/04f5ca58.pdf` För övrigt verkar det som om tanken med att byta namn från forskarutbildning till doktorsutbildning är just antecipering av min invändning i förra stycket.

mentet härom året presenterade. Dessa tendenser, menar jag, riskerar (om de inte stävjas) att bidra till en mycket olycklig tendens i det svenska utbildningssystemet: att volymen ökas på kvalitetens bekostnad.

♢ ♠ ♢

Det är snart dags för det årsmöte i Stockholm, med rubriken *Matematik på gott och ont*, som annonseras på annat håll i detta nummer av Medlemsutskicket, och jag hoppas att det spännande och varierade program som jag tycker att vi har lyckats sätta samman skall locka många medlemmar att delta. Om valberedning och mötesförsamling väljer att följa inarbetade rutiner, så innebär mötet också att den sittande styrelsen nått "halvtid". Det gångna verksamhetsåret har i jämförelse med de senaste åren – i hög grad präglade av 4ECM och Matematikdelegationen – förflutit relativt lugnt. Ändå visade sig året till slut bli ett mycket speciellt sådant för svensk matematiks vidkommande, i och med den glädjande nyheten att Lennart Carleson, som ett erkännande av hans "dyptgående og nyskapende bidrag til harmonisk analyse og teorien om kontinuerlige dynamiske systemer",[2] tilldelats årets Abelpris.

- ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ -

[2] Citat av Abelkommitténs ordförande Erling Størmer; se `http://www.abelprisen.no/no/`

Lennart Carleson Årets Abelpristagare

Årets Abelpris har tilldelats Lennart Carleson för hans **ingående och betydelsefulla bidrag till harmonisk analys och teorin kring kontinuerliga dynamiska system**. Abelkommittén noterar att

Carlesons arbeten har för alltid förändrat vår syn på analysen. Han har bara inte visat extremt komplicerade teorem - de metoder han introducerat har visat sig vara minst lika viktiga som teoremen själva. Hans unika stil karaktäriseras av geometrisk insikt kombinerad med en fantastisk kontroll över bevisens komplexa förgreningar

och avslutar med fanfaren

Carleson befinner sig alltid långt före den breda massan. Han inriktar sig bara på de svåraste och mest djuplodande problemen. När väl dessa är lösta låter han andra invadera de kungadömen han upptäckt och går sedan vidare till ännu vildare och mera avlägsna territorier inom vetenskapen.

Lennart Carleson f 18/3. 1928, fil.kand 1947 och fil.dr i Uppsala 1950. Professor vid Uppsala 1954. C. är intimt förknippad med Mittag-Leffler institutet vilket han väckte ur dess törnrosasömn 1968. Han var sedan dess föreståndare fram till 1984. C. var ordförande i samfundet 1963-65, och president för IMU 1978-1982.

Hörmander får Steelepriset

Lars Hörmander, professor emeritus vid Lund, har belönats med Leroy P Steele priset för 'mathematical exposition'. Priset delas som bekant ut av the American Mathematical Society, och motiveras huvudsakligen av hans monumentala översikt över linjära partiella differentialoperatorer i fyra volymer färdigställd 1985. Men även hans Complex Analysis in Several Variables från 1966 uppmärksammas i motiveringen. Om det första verket noteras det att det är svårt att finna något annat översiktsverk i den matematiska litteraturen med jämförbar bredd och djup och skriven med sådan insikt. Om det andra påpekas det att även fyrtio år efter sin tillkomst utgör det ett standardverk inom sitt område.

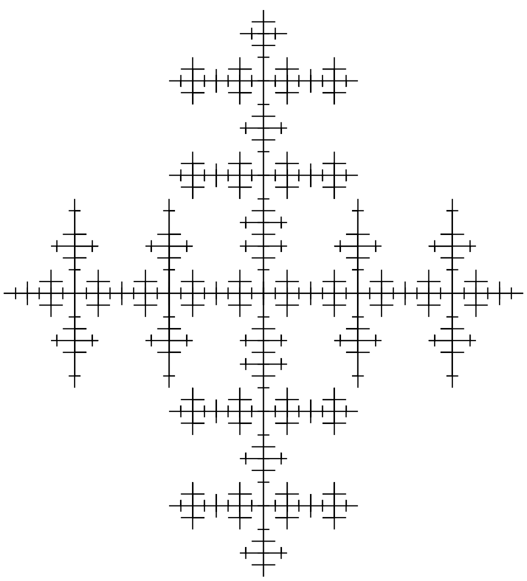
Hörmanders böcker illustrerar på ett slående sätt att inom matematiken föråldras resultaten långsamt. Inom de flesta naturvetenskapliga områden är ytterst få referenser mer än fem år gamla att jämföras med omkring 80% av alla referenser inom matematiken

Lars Hörmander f. 24/1 1931, studier vid Lund sedan 1948, fil.kand 1949, fil.lic 1951, fil.dr 1956. Professor vid Stockholm 1957-64, professor vid Stanford 63-64 sedan professor (permanent member) vid IAS Princeton fram till 1968, därefter professor vid Lund. Fieldsmedaljör i Stockholm 1962, Wolfpristagare 1988. H. var samfundets ordförande 1978-80, samt föreståndare för Mittag-Leffler institutet 1984-1986

Mattias Jonsson Wallenbergspristagare

Mattias Jonsson KTH är odelad mottagare av årets Wallenbergspris. Jonsson föddes 1972 och vann Samfundets (och SvD's) matematiktävling hösten 1988 och fick en bronsmedalj i matematikolympiaden följande sommar. Han avlade sin akademiska grundexamen i Göteborg 1990. Han flyttade därefter till KTH där han disputerade 1997 under ledning av Michael Benedicks på ämnet dynamiska system i flera komplexa variabler. Därefter var han post-doc under ett par månader vid Paris-Sud, och mellan åren 1998 och 2004 knuten till University of Michigan at Ann Arbor. Han är sedan 2004 lektor och docent vid KTH.

Titelsidan



Omslagsbilden visar ett valuativt träd som utgör temat för boken 'The Valuative Tree' som har utkommit som ett Springer Lecture Notes in Mathematic 1853, författat av Charles Favre och Mattias Jonsson.

Ett valuativt träd är ett sätt att kombinatoriskt beskriva plana kurvsingulariteter. Klassiska metoder inom algebraisk geometri är via sekvenser av uppblåsningar eller via Puisseux utvecklingar till vilka det valuativa trädet är intimt förknippat. Författarnas ambition är att gå utöver de klassiska tillämpningarna och framför allt studera plurisubharmoniska funktioner i två variabler.

Intervju med Lennart Carleson

- *Ulf Persson* -

Ulf Persson *Du disputerade 1950 vid 22 års ålder, därav drar jag slutsatsen att du knappast kan ha tagit studenten vid normala 19 års ålder utan långt tidigare. Var du ett skolljus med A i alla ämnen? Och var du redan inställd som gymnasist på att bli matematiker?*

Lennart Carleson Jag tog studenten vid 17. Jag hade börjat skolan vid 6 och hoppat över första ring, och var sedan inackorderad i Karlstad under min gymnasietid efter att jag då hade tenterat i alla ämnen. Jag är fortfarande lite stolt över detta även om mina betyg var sisådär. Visst hade jag mest A på matematikskrivningarna men jag var faktiskt mer intresserad av litteratur (och flickor) än av matematik. Nu efteråt är jag förvånad hur mycket skönlitteratur jag hann läsa under dessa få år. Det fanns emellertid ingen akademisk tradition i min familj så därmed hade jag ingen som kunde tipsa mig om matematik. Intedestomindre fick jag i alla fall tag i en del matematisk litteratur ty min syster hade en 'boyfriend' som hade studerat matematik men med tiden tröttnat och lämnat över till mig sina matematikböcker, vilka jag läste för nöjes skull under de de två gymnasieåren. Min introduktion till analysen råkade faktiskt vare ett kompendium skrivet av Harald Bergström. Lyckligtsvis hittade jag bland hans böcker även en 'Calculus-bok' av Ernst Lindelöf. Det var en verkligt fin bok.

UP *Det är ofta frestande att tala om den gamla skolan i ett förklarat ljus, själv tenderar jag ofta att falla för detta, men man kan vara kritisk också. Vad tyckte du om det gamla real-gymnasiets matematiska pensum med dess tonvikt på analytisk geometri? Visserligen ingick problemlösning på ett helt annat sätt än i den moderna skolan.*

LC Visst var matematikkursen absurd men jag tror inte det har någon egentlig betydelse vad man innehållsmässigt läser; det viktiga är att det är en utmaning och att man klarar av det. Härvidlag var betoningen på problemlösning positiv som du påpekar.

UP *Var du inställd på att läsa matematik när du kom till Uppsala strax efter krigsslutet 1945? Hur var de första studieåren vid Uppsala och hur kom du i kontakt med Beurling?*

LC Jag var inte inställd på att bli matematiker när jag kom till Uppsala. Det tog mest kraft att leva under de första åren i Uppsala; matematiken var inte huvudsaken även när jag blev inställd på den. Jag tog min fil.kand i januari 1947 efter tre terminers studier, men jag kommer inte riktigt ihåg vad jag gjorde. Jag jag gick på Kjellbergs kurs för ett möjligen två betyg. Min examen bestod i alla fall av tre betyg i matematik, två i mekanik och ett i statistik, men jag behärskade kurserna ganska dåligt, vilket i efterhand får anses vara ganska naturligt. Vi läste de La Vallée Poussin, och även hans integrationsteori för tre betyg. Det är en bok som imponerade på mig, även dess andra del. Som bredvidläsning utnyttjade jag

Goursats 'Cours d'Analyse. Däremot kan jag inte minnas någon bok om analytiska funktioner. Det var faktiskt i samband med dessa som jag först träffade Beurling ty han höll en kurs om analytiska funktioner som jag tyckte var svår och konstig. Sedan fick jag ett erbjudande om en 3:e amanuenstjänst (180 kr/mån) och därefter blev jag fast.

UP *Svår och konstig?*

LC Åtminstone obegriplig för mig. I själva verket tycker jag fortfarande att komplex analys är oerhört märkvärdigt så jag skäms inte alls. Vem kan förstå hur denna underbara soppa av analys, geometri och algebra egentligen hänger ihop. Och som dessutom till råga på allt beskriver den obegripliga kvantmekaniken?

UP *Du brukar alltid framhålla Beurlings inflytande på dig. Men var det några andra klassiska svenska matematiker som du inspirerades personligen av? Jag tänker närmast på din föregångare Carleman på Mittag-Leffler institutet, men han lär ha dött redan 1948, så det är osannolikt att du hann träffa honom.*

LC Det stämmer, Carleman har jag aldrig träffat. Jag skulle vilja beskriva Beurling som ett geni, av en helt annan klass än jag själv. Jag har stora svårigheter att försöka finna hans motsvarighet. Grothendieck känner jag inte alls. Kanske Kolmogorov skulle ha utgjort en jämlike. Det är inte i första hand djupet av resultaten eller betydelsen av matematiken utan attityden till själva ämnet jag har i åtanke. För Beurling var matematiken en del av hans personlighet ingående i en närmast mystisk (i religiös mening) symbios med denna. Han var känslomässigt oerhört engagerad.

UP *Låt oss åtminstone för tillfället lämna det personliga och tala om mer allmängiltiga företeelser. Ren och tillämpad matematik ställs ofta emot varandra, och numera föreligger det en stark press att endast den senare kan rättfärdiga matematisk aktivitet överhuvudtaget. Dock många menar att själva distinktionen är konstlad, för Euler och Gauss förelåg det ingen skillnad.* Everything food for thought. *Även om du själv drar dina lansar för tillämpad matematik så må man väl anse att din egen forskning har varit högst esoterisk med få om några handfasta praktiska konsekvenser.*

LC Jag tycker debatten kring ren och tillämpad matematik är förvirrad. Matematiken har tre roller.

Den i särklass viktigaste rollen för samhället rör vardagsmatematik och undervisning därom. Matematiken i egenskap av den kvantfierande vetenskapens språk utgör den andra rollen. Jag talar om naturvetenskap och teknik i första hand men numera också biologi, samhällsvetenskap och datalogi. En grundläggande del av detta har givit upphov till matematiken som en egen vetenskap, d.v.s. dess tredje roll. Denna rena matematik fanns redan hos de gamla grekerna, men glömdes sedan bort under årtusenden och återuppstod egentligen först med Abel, Dirichlet, Galois och Jacobi i början av 1800-talet. Målsättningen för ren matematik är bevis och svårfångade inre samband, medan tillämpad matematik vill ha resultat. Empirisk kunskap är därvid viktigare än inre logik och förståelse. Den största delen av tillämpad matematik är i sig inte särskilt intressant, åtminstone inte som matematik, och den skall egentligen värderas relativt de resultat som förklaras i den aktuella vetenskapen. Den grundläggande svårigheten i relationen matematik/tillämpad matematik är att övertyga andra discipliner att rena matematiker har något att bidra med och att övertyga matematiker att det finns något intressant (icke-matematiskt) att finna utanför elfenbenstornet. Jag tror att detta framför allt är en organisatorisk fråga av stor betydelse där tiden tyvärr håller på att rinna ut.

UP *Du talar om tillämpningar inom inte bara fysik och kemi, utan även biologi och samhällsvetenskap, och därvid tänker man väl främst på ekonomi. Men när det gäller fysik tycks tillämpningarna gå i bägge riktningarna. En god fysikalisk intuition ger rent matematiska insikter. Men det är svårare att tänka sig att biologisk och ekonomisk intuition skall ha motsvarande effekter.*

LC Det finns en liten del av ”tillämpade” frågor av fysikaliskt ursprung där de ursprungliga sambanden i båda riktningarna fungerar, t.ex. statistisk mekanik, strängteori, där matematiken och fysiken ingår i en symbios. Datalogi däremot är ett område, där vi inte lyckats skapa relevant matematik. Det är faktiskt inte kombinatorik, som ju kommit att dominera i försöken, som utgör det rätta svaret. Jag tror emellertid mycket på datalogin som framtidsämne för matematiken.

Uppföljningen av dubbelspiralen är ett annat...

UP *.. av vad jag förstår så ställdes Watson och Crick inför ett rent matematiskt problem när det gällde att återskapa den 3-dimensionella strukturen hos DNA utgående från röntgendiffraktioner. Crick hade ett förflutet inom fysiken visserligen som misslyckad forskarstuderande men man antar att han besatt en viss matematisk bildning. Jag misstänker dock att det sätt de angrep problemet på inte skulle ha tjusat en matematiker. Mycket knåpande och knepande, 'trial and error' och antaganden. Kort sagt ett mycket pragmatiskt angreppsätt...*

LC .... Ja man skulle önska att många fler matematiker vore engagerade i tillämpade projekt. Det borde ingå som ett krav i tjänsten att ha regelbunden kontakt med något av de ämnen jag nämnde (jag förutsätter då att det finns intresse även på den andra sidan) och att det skulle vara en definitiv merit vid tillsättningar. Den nuvarande metoden att särskilja matematiktjänsterna i rena och tillämpade tycker jag är förödande och att erfarenheterna klart bevisar detta. Det är samma typ av fel som man gör när man påstår sig kunna skapa forskare och specialister i vanlig matematikundervisning!

Men för att återgå till din sista fråga. Det är klart att den matematiska forskning jag gjort faller inom den rena matematiken och utan påtagliga praktiska tillämpningar.

UP *För att tala om dina arbeten. Det är framför allt två arbeten som en utomstående förknippar ditt namn med. L^2 satsen, d.v.s. punktvis konvergens (n.ö.) av fourierserier för L^2 funktioner, samt Korona satsen som behandlar strukturen av maximal-ideal för ringen av holomorfa funktioner på enhetsdisken. Varför är den första satsen intressant? Man kan ju återskapa en funktion betydligt effektivare från dess fourierkoefficienter än att helt enkelt summera serien rakt av. Kan det vara metoderna som du utvecklade som trots allt är intressantare än själva resultatet? Och Korona satsen vad egentligen intresserar dig? Det kan knappast vara ringstrukturen som sådan, du är ju inte algebraiker.*

LC Först och främst nu när mina arbeten är på tapeten förstår jag inte varför Henonarbetena med Michael Benedicks så sällan nämns. Det tog oss nog 10 år att få ordning på kombinatoriken. Jag upplevde detta som klart svårare än L^2-beviset. Frågan om L^2 har jag varit medveten om sedan jag under studentåren läste Zygmunds bok. Zygmund var så övertygad om att man skulle kunna konstruera ett motexempel, att han vägrade att läsa mitt bevis när det presenterades. Dessförinnan hade jag under 15 år av och till försökt att konstruera ett motexempel och till slut kom jag på det rätta sättet. Men när jag kunde visa att detta sätt inte kunde fungera beslöt jag mig istället att göra ett positivt bevis. Det tog ungefär 2 år. Det är klart att detta är en fråga i ren matematik utan större konsekvenser men den rör i alla fall en nästan 200 år gammal öppen fråga och resultatet är ganska slående skulle jag vilja påstå. Och som du gissar, metoderna tror jag kommer att visa sig viktiga.

Beträffande koronan hörde jag talas om den från Beurling ca 1950. Han i sin tur hade nog hört om den från någon annan, möjligen Kakutani Jag började så småningom intressera mig för interpolation och insåg efter flera år att Koronafrågan var ett interpolationsproblem. Om detta sammanträffande utgjorde en ren tillfällighet eller om Guds finger var med i spelet låter jag vara osagt.

UP *L^2-satsen och Koronasatsen tillhör din relativa ungdom, medan Henonarbetet utfördes i relativt mogen ålder när många matematiker har lagt av med seriös matematik, eller åtminstone avhåller sig från nya erövringar. Kan åldern ha spelat sin roll i och med att du upplevde Henonproblemet som svårare?*

LC Jag var förstås gammal då och det spelar otvivelaktligen en roll som du antyder. Men absolut inte så att man blir dummare med åren, menar jag, utan man har svårare att hålla många fakta i snabbminnet samtidigt. Undrar om det har med blodomloppet att göra och att förklaringen till varför de flesta framstående matematiker är män är precis samma förklaring som i idrott, nämligen att kvinnor har ett (fysiskt) mindre hjärta.

UP *Hur ser du på dig själv som matematiker? Först och främst varför blev det analys? Var det på grund av den svenska traditionen?*

LC Jag kan inte föreställa mig mig själv som algebraiker oberoende av tradition. Det är väl rätt klart att det är kombinatoriska frågeställningar som passar mitt matematiska kynne. Jag ser med beundran på matematiker som Beurling vilka ser på matematiken som på ett konstverk, men jag har tyvärr nog ingen riktig begåvning för det.

UP *Om du skulle starta ett nytt matematiskt projekt, gärna av tillämpad karaktär, vad skulle du då vilja göra?*

LC Jag skulle vilja bygga upp någon mer analytisk datalogi där det finns rum för t.ex. harmonisk analys (t.ex. multiplikation av tal är ungefär detsamma som en faltning). Tycker det är lite fånigt att diskutera huruvida $P = NP$? när man inte ens vet om det svårare att multiplicera tal än att addera dem! Med detta menar jag att additionsalgoritmen är tidslinjär med avseende på antalet siffror, medan man inte vet om det finns någon linjär multiplikationsalgoritm.

UP *Matematiken upplevs av utomstående, och jag tänker här närmast på filosofer, som en rent deduktiv vetenskap. Men jag skulle vilja påstå att övertygelse inom matematiken bygger inte bara på långa deduktiva kedjor utan snarare på att olika resultat harmoniserar med varandra. Man kan t.ex. ge ett enkelt logiskt bevis för något inom talteori, men detta hindrar inte att det finns rum för att numerisk bekräftelse får tillfälle att fördjupa övertygelsen. Jag skulle som illustration nämna en anekdot från min egen doktorandtid vid Harvard.*

Jag minns våren 1972 när den matematiska institutionen fortfarande var inrymd på Divinity Avenue. Tate kom in till 'Commonroom' och skrev upp på tavlan två orelaterade integraler inom talteori och deras numeriska approximationer till ett för den tiden stort antal signifikanta siffror. Han frågade retoriskt om denna överenstämmelse betydde att de två integralerna var lika. Gleason kommenterade att en numerisk simulering säkert vore betydligt mera övertygande än ett långt och krångligt bevis, medan Mackey var smått upprörd av denna raljanta attityd. Det var det deduktiva beviset som gällde och ingenting annat.

Skulle du vid detta tillfälle (eller senare) ha ställt dig på Gleasons sida eller föredragit att understödja Mackey?

LC Jag har definitivt sympati för Gleason's attityd till bevis. Det finns numera så många "bevis" som är höljda i dunkel att det faktiskt skapar problem att veta vad som gäller på riktigt. Det är givetsvis ingens fel; mycket i modern matematik är oundvikligen väldigt komplicerat och jag har inget bra recept mot detta. Vi måste kanske försöka bryta upp bevisen i moduler. Detta låter inte så inspirerande, men förhoppningsvis kommer då och då sannolikt något intressant att träda fram ur dimmorna.

UP *Inom de flesta naturvetenskaper förekommer lagarbeten, vilket gör att det föreligger en stor press på matematiker att inkomma med stora ansökningar involverande många personer. Hur ser du på denna industrialisering av matematiken? Jag minns att en licentiat-kandidat till dig hade en gång för närmare trettio år sedan föreslagit samarbete med en annan matematiker för sin uppsats och du hade svarat att i matematiken gäller sup-norm inte integralnorm? Har du ändrat uppfattning?*

LC Det finns grovt talat två olika sorters matematiker: problemlösare och teoribyggare. Inom problemsektorn finns inte mycken plats för samarbete, så min gamla uppfattning håller jag fast vid. Känner du till något exempel på ett svårt problem som lösts av fler än två personer? Riktiga problem genererar intressanta metoder och nya teorier och breddar därmed för ett brett samarbete. Att välja sådana fruktbara problem är matematikens kärnfråga och härvidlag finns tillfälle att åberopa alla fina ord såsom intuition, skönhet, djup.

UP *Detta minner mig om en annan anekdot som rör din gamle vän Jürgen Moser. Det hela ägde rum vid en kollokviemiddag vid Columbia University oktober 1978. Chern hade hållit en föreläsning om Bäcklundtransformationer och Sine-Gordon ekvationen, och på den tiden var även Korteweg-de Vries ekvationen mycket på tapeten. Moser talade då i hänförda ordalag om detta djupa mysterium och påpekade att en generell teori för det hela skulle missa hela poängen. De verkligen djupa mysterierna kan inte förklaras, såsom livet, kärleken och vissa icke-linjära* *vågekvationer. Vi står böjda inför det ofattbara. Skulle du vilja kommentera Mosers attityd?*

LC Jag sympatiserar givetvis med Jürgen. Han var vanligtvis en mycket jordnära person, men din historia visar att även han närde en uppskattning av samt även en längtan till mystiken.

UP *Under denna intervju har du hänvisat till mystik, religion, konst, och jag kan därmed vederbörligen uppmuntrad inte avhålla mig från att ställa en avslutande filosofisk fråga, som dock gör de flesta matematiker smått förlägna. Är du Platoniker? Med detta menar jag uppfattningen att matematik är något som existerar utanför människan och som följdaktligen upptäcks och inte bara uppfinnes. Annorlunda uttryckt reduceras matematiken, åtminstone den rena, till en meningslös formell lek med symboler, om man inte är platoniker? Och kan matematikens 'unreasonable effectiveness' enligt Wigner förklaras i platonska termer?*

LC Detta är för svårt för mig att svara på.

UP *Har du möjligtsvis några avslutande råd att ge en ung människa som överväger en matematisk karriär?*

LC Jag skulle vilja rekommendera boken 'One hundred reasons to be a scientist' som utgavs förra året av Salam-institutet. I denna bok lämnar hundra matematiker och fysiker korta kommentarer, bland dessa även jag. Jag tror att många blivande studenter skulle ha glädje av att läsa den. Den finns numera även tillgänglig på kinesiska för dem som till äventyrs föredrar detta språk.

En liten historisk förklaring:

För unga människor, d.v.s. de som är födda på andra halvan av 1900-talet, d.v.s. efter den 1 januari 1951 [sic], kan möjligen begrepp som A-student och fil.kand vara något obekanta. De kan då tarva en kort förklaring. Den betygskala som de flesta av oss gamla är bekanta med sedan barnsben är den som var given av **C,Bc,B,Ba,AB,a,A** utsmyckat med dekorationer via +,- och ?. (Dock **A+** och **C-** existerade inte, och **C+,A?** ansågs väl något orginella, medan **B?** (med tvekan godkänt) var en uppskattad räddningsplanka för såväl lärare som elever.). På grund av en lång tradition sedan 1800-talet var de olika bokstavsbetygen utrustade med rika associationer och en oskiljaktig del av skolklimatet. **Ba** och **AB** gavs till de goda 'medelmåttorna', medan **a** och **A** tillhörde 'skolljusen'. Att märka var att **A** gavs endast i undantagsfall, kanske i ett givet ämne till 1 procent av eleverna (även om strikt konsekvens och inflation knappast kunde upprätthållas respektive undvikas i det långa loppet). En student med övervägande **A** noterades i lokalpressen och belastades med förväntningar.

Vid universiteten infördes den tre-gradiga betygskalan **B,AB,A** vilka oftast refererades till som ett,två och tre betyg. Dessa var föregångare till 20,40 och 60 poäng som var vanliga under 70-talet och refererade då fortfarande till mer eller mindre exakta kursmoment, innan senare års snuttifiering klippt av kopplingen mellan poängnivå och kurs. Dessa betyg kunde 'spetsas' vid god examination[1], som förr i tiden (d.v.s. fram till början av 60-talet) alltid innefattade muntlig tentamen oftast för professor. Ett betygsteg ansågs normalt kunnas läsas in på en termin (och utgör numera normen). Således förväntades en fil.kand bestående av sex betyg ta tre år. I praktiken tog det många betydligt längre.

UP

[1] en tradition som bekant har återinförts på senare år via distinktionen mellan G och VG

Mattias Jonsson årets Wallenbergspristagare

- *Bo Berndtsson* -

De arbeten som Mattias Jonsson får årets Wallenbergspris för har sitt ursprung i komplex dynamik. I detta sammanhang betyder "komplex dynamik" inte komplicerade eller komplexa förlopp utan studiet av iterationer av avbildningar mellan komplexa mångfalder.

Ett tidigt och mycket inflytelserikt bidrag till den teorin gjordes av Hans Brolin 1965. Utgående från fundamentala arbeten av Fatou och Julia studerade Brolin bland annat polynomiella avbildningar $w = P(z)$ från komplexa planet till sig själv och det asymptotiska uppförandet av deras iterationer

$$P^{(n)} = P \circ P ... \circ P.$$

Associerat till varje polynom får man en uppdelning av planet i (den öppna) Fatoumängden där iterationerna bildar en normal familj, och dess komplement, den kompakta Juliamängden, där iterationerna har ett mer kaotiskt uppträdande. Om exempelvis polynomet är $P(z) = z^2$ så består Juliamängden av enhetscirkeln medan Fatoumängden består av två komponenter där iterationerna attraheras till $w = 0$ respektive $w = \infty$. Brolin konstruerade till varje polynom av grad d ett "invariant " mått μ med stöd på Juliamängden sådant att

$$\int f \circ P d\mu = \int f d\mu$$

för varje kontinuerlig f. I vårt enkla exempel ovan är måttet helt enkelt längdmåttet på cirkeln, och Brolin visade att i allmänhet så är μ det potentialteoretiska jämviktsmåttet för Juliamängden, som alltså visar sig innehålla en hel del dynamisk information. Måttet μ kan fås som et svagt gränsvärde till tillbakadragningarna

$$d^{-n} P^{(n)*}(d\nu),$$

där $d\nu$ är - nästan - vilket sannolikhetsmått som helst. I extremfallet, när $d\nu$ är en punktmassa så visade Brolin att alla punkter duger, med undantag av högst två exceptionella punkter. Tillbakadragningen av en punktmassa är helt enkelt en summa av punktmassor i alla punktens urbilder, och man får en mer konkret bild av hur det invarianta måttet uppkommer.

Brolins arbete bildade utgångspunkt för en stor mängd arbeten om motsvarande frågor i högre dimensioner, där några av pionjärerna var Sibony, Fornaess-Sibony och Bedford- Smillie. Liksom den envariabla teorin använde sig av potentialteori blev teorin i högre dimensioner knuten till pluripotentialteori - teorin för plurisubharmoniska funktioner, dvs funktioner vars restriktioner till varje komplex linje är subharmonisk. Motsvarigheten till Brolins invarianta mått är nu "positiva slutna strömmar" som är invarianta under avbildningen.

En positiv ström är grovt talat en differentialform (i detta fall av grad 2) vars koefficienter inte nödvändigt är glatta funktioner, utan mått. Liksom varje sannolikhetsmått i $\mathbf{C}$ kan skrivas

$$d\nu = i\partial\bar{\partial}u$$

för någon subharmonisk funktion u, så kan en positiv sluten ström skrivas

$$T = i\partial\bar{\partial}u$$

för någon plurisubharmonisk u. Detta är också nyckeln till konstruktionen av invarianta mått och strömmar: starta med någon lämplig (pluri)subharmonisk funktion - som t ex $u = \log(1 + |z|^2)$ - och studera gränsvärden i fD' av följden

$$d^{-n}u \circ P^{(n)}.$$

De första stegen i den flervariabla teorin följer Brolins analys ganska tätt i spåren, men svårigheter infinner sig strax när det gäller att tolka resultaten. Plurisubharmoniska funktioner och positiva slutna strömmar är ganska abstrakta och subtila begrepp, och vad har man egentligen sagt när man visat existensen av en invariant ström?

Några av Mattias första arbeten studerade polynomiella självavbildningar av $\mathbf{C}^2$ av formen

$$(z, w) \to (P(z), Q(z, w)),$$

så kallade skevprodukter. Till en sådan avbildning finns också associerade naturliga envariabla dynamiska objekt - t ex det invarianta måttet till P - och Mattias lyckades analysera den invarianta strömmen och andra flerdimensionella objekt i termer av sina envariabla motsvarigheter. Tillsammans med Bedford studerade han också polynomiella avbildningar av $\mathbf{C}^k$ med den speciella egenskapen att de har en utvidgning till "hyperplanet i oändligheten". Vad detta betyder är att i den naturliga kompaktifieringen av $\mathbf{C}^k$ till k-dimensionella projektiva rummet $\mathbf{P^k}$, så har avbildningen en fortsättning till $\mathbf{P^k} \setminus \mathbf{C^k}$, som är ett nytt projektiv rum av dimension $k - 1$ - hyperplanet i oändligheten. Avbildningen inducerar då en självavbildning av oändlighetsplanet. I det speciella fallet $k = 2$ är detta hyperplan en Riemansfär och man får igen envariabla dynamiska objekt som man kan relatera den flerdimensionella dynamiken till.

I ett betydligt senare arbete, gemensamt med Charles Favre, har Mattias också lyckats generalisera till två variabler en av de mest subtila aspekterna av Brolins arbete: de två exceptionella punkterna. I två variabler startar kontruktionen inte från ett mått utan från en plurisubharmonisk funktion, u, och dess associerade ström $S = i\partial\bar{\partial}u$. Motsvarigheten till en punkt är en komplex kurva och om kurvan ges av en ekvation $R(z, w) = 0$ blir strömmen $S = i\partial\bar{\partial}\log|R|$. Jonsson och Favre lyckades nu ge en exakt beskrivning av vilka kurvor som duger.

Denna uppsats bildar också startskottet för ett vidare samarbete med Favre som har lett fram till närmast spektakulära resultat om den lokala strukturen av plurisubharmoniska funktioner i två variabler. Den centrala delen av detta arbete är deras upptäckt av det "valuativa trädet" (valuative tree).

Det valuativa trädet är en komplicerad graf som är uppbyggd av mängden av valuationer på ringen av formella potenserier i origo av två variabler. En valuation är ett sätt att mäta ordningen av ett nollställe - man kan ju t ex mäta den lägsta ordningen, ordningen i någon riktning, längs en kurva etc. Resultatet av alla valuationer, ν, på en funktion g ger då en ganska komplett bild av strukturen på dess nollställemängd i origo. Omvänt ger en funktion upphov till en ny funktion på det valuativa trädet genom

$$\hat{g}(\nu) = \nu(g).$$

Jonsson och Favre visar nu att även plurisubharmoniska funktioner inducerar funktioner på det valuativa trädet, som i fallet $u = \log|g|$ ger $\hat{g}$. Strukturen hos singulariteten av en plurisubharmonisk funktion i origo kan nu analyseras på trädet.

Den idé har visat sig mycket kraftfull och lett till flera viktiga resultat. Ett exempel är ett bevis för "the openness conjecture " av Demailly och Kollár: Mängden av $t > 0$ sådana att $\exp -tu$ är lokalt integrabel i någon omgivning av origo är öppen. Ett annat resultat är en variant av Noether-Hironakas upplösning av singulariteter för positiva slutna strömmar (fortfarande i två variabler). Ett annat sista exempel rör superattraktiva fixpunkter till polynomiella avbildningar av två variabler:

Låt f vara en polynomiell avbildning av $\mathbf{C}^2$ med $f(0) = 0$. Låt $c(f)$ vara det största talet c så att $|f(c)| \leq C|z|^c$ nära origo; låt $c_n = (c(f^{(n)})^{1/n}$ och låt $c_\infty = \lim c_n$. Då blir c_∞ ett mått på hur snabbt iterationer närmare sig origo. Om exempelvis

$$f(x, y) = (x, xy),$$

kan man verifiera att c_n är Fibonaccitalen, så att $c_\infty = (1 + \sqrt{5})/2$. Sats: c_∞ är alltid ett kvadratiskt heltal!

Frågan om ett bokförlag

- *Mikael Möller, Arne Söderqvist* -

Vi har nu kommit en god bit på väg med utvecklingen av den nya upplagan av Tord Ganelius bok Introduktion till matematiken. Nätupplagan är så gott som färdig. Det som återstår är finjusteringar av typografin och länksystemet. Förhoppningsvis kommer både Matematikersamfundet och Statistikersamfundet att lägga ut boken på sina respektive hemsidor.

Vi föreslår nu följande:

1 Matematikersamfundet upplåter utrymme på sin server under rubriken Nätböcker (eller liknande) och under denna rubrik läggs just nätupplagor av olika böcker.

2 Nätupplagorna ska vara fria för alla att ladda ned och trycka ut för eget bruk (låg upplösning). Det blir rätt så många sidor eftersom en nätbok är anpassad till en bildskärm.

3 Boken ska också gå att få i kompendieform, så att den därmed kan läsas med större överblick och utan att läsaren ska behöva vara bunden till någon dataskärm. Vi tänker oss i det sammanhanget två varianter, nämligen a) låg tryckupplösning (lösenordsskyddad) - kostnad 50 kronor (inkl moms) b) hög tryckupplösning (lösenordsskyddad) - kostnad 100 kronor (inkl moms) Dessa båda möjligheter ger en personlig kopia avsedd endast för eget bruk. Betalning sker i förskott varefter ett personligt pdf-dokument skapas och skickas med e-post. Betalningen skall användas för att täcka den kostnad som föreligger för framställningen av boken; överföring av text och bilder till TeX har inneburit ungefär två månaders heltidsarbete. Vi tänker oss att även andra böcker, såväl nyskriven litteratur som klassiker, ska komma att ges ut på samma sätt som Tords bok. Böckerna skall på sikt även kunna tryckas på sedvanligt sätt, mot beställning. Detta kommer dock antagligen att kräva en beställning om minst 50 exemplar och blir alltså en senare fråga. Målsättningen är att det framöver skall bli frågan om många och bra böcker som även ska kunna användas som kurslitteratur!

4 Läsarna skall ges möjlighet att komma med konstruktiva kommentarer och förslag på förbättringar.

På detta stadium innebär det ingen annan kostnad för Matematikersamfundet än den plats nätboken upptar på servern (Tords bok kommer att hamna på ca 2.5-3 MB). Om man efter en försöksverksamhet beslutar om en permanentning kommer dock vissa investeringar att behövas. På lång sikt kommer investeringarna att återbetalas och verksamheten gå runt och möjligen ge ett visst överskott (vilket naturligtvis beror på både prissättningen och efterfrågan). Hur lång sikt - det beror bla på om det kan finnas bidrag att söka för denna typ av kulturell verksamhet.

Laurent Schwartz memoarer

några personliga reflexioner och associasioner - I

- *Jaak Peetre* -

Laurent Schwartz[1] (1915-2002) var definitivt en av de mest kända matematikerna under andra halvan av 1900-talet, främst bekant för sin upptäckt av distributionerna 1944.

1997 utgav han på franska en självbiografi [**19**], 2001 översatt till engelska året innan författaren dog. Den skrevs sålunda när förf. var 82 år gammal. På ingetdera språket är boktiteln lätt att förstå, det i den engelska versionen förekommande verbet är enligt Webster f.ö. ett urgammalt franskt inlån. På svenska kunde man kanske säga "en matematiker brottas med sitt sekel". Detta syftar på att den inte enbart handlar om matematik – enligt *Reviews* omfattar matematiken bara 15 % – utan behandlar också mångsysslaren Schwartz andra aktiviteter, främst hans politiska engagemang. Medan jag läste boken har min högaktning bara växt för Schwartz stora civila mod och hans engagemang i människorättsfrågor. Varför jag överhuvud började läsa boken, var att jag trodde, att jag skulle kunna finna komplementerande material vid en planerad utvidgning av min egen självbiografi [**15**]. Där berättar jag också om mina tämligen sporadiska kontakter med den store mannen.

Här skall jag bygga enbart på den engelska översättningen, som dock lider av en del brister. Som ett flagrant exempel härpå nämner jag, att på sid.83 talas om "the Swiss mathematician Cramer", uppenbarligen åsyftas här Harald Cramér! Vidare i samma veva om Lévy-Cramers sats.[2] På sid.134 talas om "two notes in the mathematic/al journal *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, presented by Paul Montel". (Rimligen avses "två noter i *Comptes Rendus* presenterade av P.M.") Tyder på att översättaren är inte insatt i franska förhållanden och/eller matematik.

Meningsbyggnaden är ibland skakig. Att man ideligen måste grubbla på vad som är subjekt och predikat och ibland inte kan hitta objektet, är inte bra.

Att en bok på närmare 500 sidor av det här slaget saknar index upplever jag som en brist. Man vill ju inte gärna göra marginalanteckningar i ett ex. lånat från KTH!

---

[1] På ren svenska: Lars Svart!

[2] Paul Lévy, berömd matematiker, Schwartz svärfar, se nedan. Sysslade dock mest med sannolikhetskalkyl, därför i viss mån bojkottad i Frankrike. Han intervenerade då jag en gång höll ett föredrag på Collège de France. Och jag fick växla några ord med den store mannen.

Franska organisationers namngenomgående återgivna som bokstavskombinationer såsom ENS, generiskt XYZ, är inte lätta att hålla reda på utan ett register. Likaså saknas bibliografi.

En bok utan register är som Adam utan Eva! J.P.

En utmärkt recension [**2**] utkom redan strax efter den franska boken utkommit av K. Chandrasekharan, indier, känd talteoretiker, direktör för Tatainstitutet i Bombay, författare till många böcker, då emeritus vid ETH, Zürich. I avsaknad av index har jag således kunnat utnyttja honom som fusklapp!

Boken inleds med en diger inledning **The Garden of Eden**[3]. Den behandlar Schwartz stora naturintresse, omfattande både zoologi och biologi. Han var särskilt känd som en stor fjärilssamlare. Ramen är föräldrarnas stora trädgård i Autouillet utanför Paris, dit dessa flyttade 1926. Samma år drabbades den nu 10-årige Laurent av polio, som dock botades av fadern, en berömd läkare. Sjukdomen satte dock spår på honom livet igenom.

Trots visst eget trädgårdsintresse (mest dock "guilt by association"!) kunde jag inte få upp intresset, så jag lade av halvvägs. En svårighet var, att jag inte kan växtnamnen på engelska. Tänkte sedan bara läsa distributionskapitlet. Men jag läste vidare och blev så småningom mera engagerad, så jag har bestämt mig att söka läsa ut boken, vilket jag också gjorde, med bibliotekarierna ständig på halsen eller åtminstone rädslan för dem.[4]

Den egentliga boken börjar först på sid. 29 med kap.1 **The Relevation of Mathematics**, som behandlar Schwartz tidiga kontakter med vårt ämne i skolan. Det är dock intressant att notera, att han i början var mest intresserad av de klassiska språken latin och grekiska[5], innan vad jag kallar "matematikdj-vulen" tog över. Spec. finns det ett avsnitt **The Seduction of Geometry**. Det handlar uteslutande om "gammaldags" syntetisk geometri. Vem av Er mina Unga Läsare har läst böcker av författare som Hadamard, Guichard eller Duporcq[6] eller tjusats av triangelgeometri och Cevas sats. Jacques Hadamard (1865-1963) var en äldre släkting till Laurent, gift med en syster till hans mormor, mest bekant för sitt bevis av primtalssatsen 1896, simultant bevisat av belgaren De la Valléé Poussin (1866-1962).[7] Mera parentetiskt förekommer här den helgalne matematikern André Bloch (1913-1948), som efter att ha mördat några nära släktingar sattes för resten av sitt

3 Jag anger alla rubriker och andra citat på engelska, så slipper jag omaket att översätta dem, alla mina läsare behärskar ju detta språk.

4 Om det nu är det enda exemplet i Sverige, varför får jag inte läsa den i lugn och ro?

5 Även den store Gauss hade ett sådant intresse och övervägde att bli filolog, det var innan han konstruerade 17-hörningen! Tänk Er Schwartz som filolog – inga distributioner!

6 Eller, för att nämna tvenne svenskar, Hyltén-Cavallius och Sandgren. Anbefalles varmt även denna dag!

7 Länge sades det i matematiska kretsar, att den som bevisar primtalssatsen lever till 100 år. Till sist dök dock tvenne motexempel upp! Om min egen ganska indirekta kontakt med den Hadamard se [**15**]. 1954 då jag började läsa matematik i Lund var De la Valléé Poussins i "Cours d'Analyse Infinitésimale" fortfarande officiellt kursbok [*cf. förra oktobernumret av utskicket* `red.anm.`]. Som jag likaså berättat i [**15**], hette min egen favorit Goursat.

liv på sinnessjukhus.[8] Mer än vanlig matematisk galenskap! I samma kapitel nämns också Schwartz stora kärlek för musik samt hans tidiga kontakter med klassisk analys.

I kapitel 2 **A Student at the cole Normale Supérieure in Love** handlar om förf. tid vid ENS, en av de stora skolorna (les grandes écoles) i Frankrike med anor från revolutionstiden (1794). Ursprungligen avsedd för utbildning av lärare blev den ett forum för förberedelse de av blivande forskare. Schwartz studerade där 1934-1937.

Under ENS-tiden sysslade Schwartz med "finita delar" av divergenta integraler så som $\int_a^b (x-a)^\alpha g(x)dx$, där g är en regulär funktion och $\alpha > -1$. Betrakta integralen från ϵ till 0, där $\epsilon \to 0$. Då har man utveckling som inleds av en term av typ $C(\log)^n$, det är konstanten C är "partie finie", den ändliga delen. Vi kommer att se, att detta i viss mån var upprinnelsen till distributionerna! Glad i hågen visade han sitt resultat för "onkel" Hadamard, men det blev en besvikelse för den unge mannen. Denne hade nämligen själv använt sig av samma sak under sitt studium av Cauchys problem för hyperboliska ekvationer

Det var på ENS, som Laurent träffade också sin blivande hustru Marie-Hélène. dotter till matematikern Paul Lévy. Han hade sett henne innan och blivit betagen av hennes kvinnlighet. Men de dröjde innan det sade "klick" på allvar. Tidens sociala konventioner hindrade de unga att mötas. Marie-Hélène var också elev på skolan och blev likaledes matematiker. Själv har jag träffat henne flyktigt under en av mina besök i Paris, de närmare omständigheterna har jag glömt. Ung som jag var placerade jag henne omedelbart i facket "pratsam tant". Låt mig i detta sammanhang berätta en elakhet knyten till Grothendieck. Den lär vid tillfälle sagt till Schwartz. "Kvinnor kan inte göra matematik. Exempel. Din fru." Måste dock ha sårat Laurent.

Paret hade förlovat sig april 1935 och avsåg att gifta sig i december. Emellertid drabbades Marie-Hélène av TBC . Även Laurent fick av henne en primär infektion, som dock snart gick över. Men Marie-Hélène fick tillbringa de närmaste åren på ett sanatorium i vre Savoyen. På den tiden fanns inget effektivt bot mot sjukdomen. Dessutom förbjöds hon av läkare att skaffa sig barn, ett förbud som hon dock senare bröt mot vid tvenne tillfällen. De fick först sonen Marc André (f. 17/3 1943), verkade som poet och romanförfattare, men som fick ett förtida tragiskt slut. Jag minns, när Lars Gårding någon gång på i början av 1970-talet meddelade att Schwartz skrivit att sonen begått självmord. De närmare omständigheterna har jag tagit del av först nu. Senare föddes dottern Claudine, som blev professor i Grenoble – trol. ej i matematik. Efter att ha gått ut ENS fick Schwartz göra sin värnplikt 1937-1939. Sistnämnda år bröt världskriget ut, så Schwartz fick stanna kvar i rullorna.

Nästa kapitel kap. 3 **Trotskist** ägnar han åt sin politiska utveckling eller närmare sagt omorientering. Han kom från ett högborgerligt hem, nu blev den

[8] Till sin läkare lärt han ha sagt som förklaring. "Det är en fråga om matematisk logik. Det har funnits sinnessjukdom i min familj." Bloch sysslade mest med komplex funktionsteori. Det finns där en *Blochs konstant* och man talar om *Blochrum*.

klassresa långt ut på vänsterkanten. Från början var han dock närmast apolitisk, men han säger, att han alltid känt sig som internationalist och motståndare till kolonialismen. De avgörande impulserna kom från miljön på ENS. I den synnerligen tumultartade atmosfären i 1930-talets Frankrike sökte sig många intellektuella till kommunismen. Men Moskvaprocessen 1936, som han genast genomskådade, gjorde att Schwartz för all tid tog avstånd från denna lära. I stället hamnade i ett trotskistiskt parti, som han dock lämnade efter kriget. Därefter förblev han en politisk vilde – men absolut inte politiskt inaktiv.

Leo Trotsky (1879-1940) var en rysk revolutionär, ursprungligen mensjevik. Under revolutionen kom han nära bolsjevikerna och kom att spela en stor roll under inbördeskriget i det att han organiserade Röda armén. Mot slutet av 1920-talet kom han i konflikt med Stalin och 1929 utvisades ur Sovjetunionen, varpå han gick i landsflykt i Mexiko. Han mördades med en isyxa av en av Stalin utsedd agent. Schwartz framhäver, att Trotsky från början ville bli matematiker, därav dennes logiska inställning till politiken. På sid.117 berättar han även om en ung fransk matematiker Jean Van Heijenoort, elev vid ENS, som följde Trotsky i exilen och blev dennes bodygard och sekreterare. Han skrev sedermera en bok om logikens historia samt fler arbeten om detta ämne. Trotskismen lämnade han 1948. En bok om honom själv har också skrivits [**6**].

Kap. 4 **A Researcher in the War** Kriget gick dåligt för Frankrike och den 22 juni 1940 tvingades man kapitulera till tyskarna i Compiègne-skogen, på samma ort och i samma järnvägsvagn, där tyskarna fått ge sig 1918. Dessa ockuperade större delen av landet. Endast en mindre del fick bli en självständig stat med det lilla Vichy – berömt för sitt vatten – som huvudstad ledd av marskalken Philip Pétain (1856-1951), segare vid Verdun och till sist B samt högermannen Pierre Laval (1883-1945). Vid befrielsen blev bägge ställda inför rätta, Pétain dömdes till livstids fängelse, Laval till döden och avrättades. Det har hävdats, att fler fransmän avrättades för kollaboration med fienden än som föll i strid. Efter de allierades landstigning i Marocko och Algeriet 1942 blev hela Frankrike ockuperat av tyskarna.[9]

Schwartz blev demobiliserad och skyndade till Toulouse, där föräldrarna befann sig och dit Marie-Hélène också lyckades ta sig. Där kom han efter flera års avbräck tillbaka till matematiken. Han läste bl.a. Borels bok om divergenta serier. Visserligen erbjöds han av universitetets rektor att få undervisa, men han beslöt i stället söka ett forskningsstipendium. På så sätt hamnade han vid universitetet i Clermond-Ferrand, dit hela fakulteten i Strassbourg hade tagit tillflykt. Där fanns flera berömda matematiker i första rummet Henri Cartan, men även män som Jean Dieudonné, Charles Ehresman, André Lichnerowicz och Szolem Mandelbrojt.

Schwartz kom nu i kontakt med Bourbaki, av vilken han lärde topologiska vektorum. Dieudonné gav en kurs om dem på universitet. Schwartzs bodde utanför

[9] Kriget gick inte längre bra för Hitler. Stalingrad stod inför dörren och de allierade hotade med invasion även i Europa.

Clermond, men Marie-Hélène åkte dit och berättade allt för sin man vid hemkomsten, så att han också fick lära sig det.

För dem som inte vet det, så var Bourbaki namnet på ett kollektiv av matematiker, som bildades 1935 – samma år som jag föddes! – i Strassbourg av André Weil och Henri Cartan.[10] Den ursprunglig avsikten var didaktisk, att göra matematikundervisningen mera rigorös. Schwartz betecknar föraktfullt böckerna i *Collection Borel* som "romaner". Men snart utmynnade det i ett grandiost projekt att i en serie böcker framställa hela matematiken på en logisk grundval började i bok ett med mängdläran. Speciellt införde Bourbaki begreppet *matematisk struktur*, som Schwartz framhäver som Bourbakis främsta innovation. Schwartz drar också paralleller till Linnés *Systema naturae*. "Bourbaki is the Linnaus of mathematic/s." Om mina egna erfartenheter av Bourbaki se åter [**15**],

Men Schwartz har inte bara enbart rosor åt mäster Bourbaki. Detta står att läsa i ett avsnitt **Errors of Bourbaki**. Detta gäller främst måtteorin. Bourbaki bygger sin måtteori enbart på Radonmått över lokalt kompakta rum och förkastade den "abstrakta" måtteorin. Därmed sågades också sannolikhetskalkylen. Schwartz nämner, att när den kände probabilisten Doob var i Paris och föreläste om Wienermåttet blev han häcklad av medlemmar av Bourbakigruppen, därför att det underliggande rummet inte var lokalt kompakt!

Bourbaki var vidare avogt ställd till den tillämpade matematiken, som inte passade i deras allmänna schema. Schwartzs doktorand Jacques-Louis Lions i Nancy var den, som tog tillbaka den tillämpade matematiken till Frankrike, på Poincarés och Hadamards tid hade den spelat en hedersvärd roll i fransk matematik.[11]

Schwartz hade nu börjat att arbeta på sin doktorsavhandling. Ämnet för densamma var approximation med summor av typ $\sum x^{\lambda_n}$. Man kan se detta som en generalisering av Müntz sats, som i sin tur är en generalisering av Weierstraß approximations sats.[12] Den förra visar, att varje kontinuerlig funktion kan approximeras likformigt på intervallet $(0, 1)$ med summor av nämnda typ om och endast omserien $\sum 1/\lambda_n$ divergerar. (Specialfallet alla $\lambda_n = n$ ger Weierstraß.)

Kap. 5 **The War Against The Jews** Schwartzs var judar från Alsace. Men de var inte praktiserande, liksom föräldrarna betraktade Laurent sig som atteist.

[10] Själva namnet är taget efter en fransk general under Napoleon III, som sökte asyl i Schweiz för att undgå att bli tillfångatagen tillsammans med sina soldater.

[11] Lions har betytt mycket för mig, likaså en annan Schwartz-elev Bernhard Malgrange. Lions fick aldrig bli medlem i Bourbaki, men däremot Malgrange. Men det var Laurent Schwartz, som förmedlade kontakten med dem. "Vad f-n har Du i Paris att göra?", sade han och skickade mig till Strassbourg och Nancy. Det var kanske den största lyckan i mitt matematiska liv. [**15**].

[12] Herman Müntz (1884-1956) var polsk jude, född i den då ryska staden Lodz, nu i Polen. Han levde det omväxlande liv. En tid verkade han i Tyskland, men hade inget fast arbete. En tid försörjde han sig med att skriva referat i *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, en referattidskrift, som gick i graven vid krigsslutet 1945. Han var också medarbetare till Albert Einstein. 1929 fick Müntz dock en professur i Leningrad. 1937 utvisades han utan förvarning från Sovjetunionen. Sin sista tid tillbringade han i Sverige [**13**]. Det är kanske litet lustigt, att i boken kallas han för Charles Müntz, men det kan knappast vara den stackars översättarens påhitt!

Förf. skriver, att de flesta Schwartzs i Frankrike likaledes var judar från Alsace, men en del var protestanter.

Om man läser “Mein Kampf”, vilket jag inte har gjort, lär man få intrycket, att Hitlers politik blott hade två mål, dels att lägga under sig steuropa och dels att utrota judarna. Hade fler läst Hitler skulle kanske ... Då krigslyckan började minska för Tysklands lades de imperialistiska planerna på is, men judeförföljserna hade alltfort hög prioritet. Wehrmacht klagade, att deras trupptransporter kom i andra hand jämfört med tågen från och till koncentrationslägren. I Frankrike fick tyskarna här full uppbackning av Vichy-regimen och deras polis.

Utrotningen av judarna tog fart i och med krigsutbrottet 1939, i mindre skala under och efter Polenfälttåget. Inför angreppet på Sovjet i juni 1941 bildades i SS regi speciella förband direkt underställda Himmler. Det var de beryktade “Einsatzgruppen” (insatsgrupper) och var fyra till antalet betecknade A, B, C, D. Grupp A var inriktad på Baltikum och Leningrad, men till den staden kom tyskarna aldrig.[13]

I och med ockupationen också av den s.k. fria zonen blev läget kritiskt för familjen Schwartz. För att undanröja misstankar utgav de sig vara protestanter. Till slut beslöt de gå under jorden. Laurent Schwartz skaffade sig falska identitetspapper och började kalla sig Laurent-Marie Sélimartin.

Nu kommer vi äntligen till det kapitel som jag och förmodligen alla andra gått och väntat på, nämligen kap. 6 **“The Invention of Distributions”**.

Distributionsteorin är en slags generalisering av den klassiska differentialkalkylen. Densamma är som bekant behäftad med åtskilliga skönhetsfel. I mitten av 1800-talen angavs exempel på kontinuerliga funktioner, som inte var differentierbara i någon punkt (Riemann, Weierstraß). Och även om en funktion är överallt deriverbar behöver dess derivata inte vara det. Senare angavs exempel baserade på sannolikhetskalkyl (Wiener med hjälp av brownsk rörelse).

Betrakta klassen C_0^∞, av Schwartz själv betecknad *fD* (“d” för differentierbar) med kompakt stöd. (För enkelhetens skull betraktar jag här bara funktioner på räta linjen $\mathbf{R}$ (funktioner av en reell variabel. Flervariabelfallet av $\mathbf{R^n}$ behandlas analogt.) Att denna icke var trivial följer av ett exempel angivet av Cauchy (men denne kanske inte förstod innebörden av detsamma). En distribution T kan nu definieras som en lineär funktional på C_0^∞, som är kontinuerlig i viss mening, $T(af+b\psi) = aT(f)+bT(\psi)$ om $f, \psi \in C_0^\infty$, $T(f_n) \to 0$ om f_n är en följd av element av C_0^∞ som alla har stödet i en fix kompakt mängd K och alla följder av derivator $\partial^\alpha f_n$ går likformigt mot noll på K. Till varje lokalt Lebesgue-integrabel funktion f kan man tillordna en distribution T_f enligt receptet $T_f(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x)f(x)dx$. Allmännare kan man till ett radonmått μ tillordna en distribution T_μ, $T_\mu(f) = \int_{\mathbf{R}} f(x)d\mu(x)$. Derivatan T' av en distribution definieras via dualiet, $T'(f) = -\int_{\mathbf{R}} T(f')$.

[13] Någonstans har jag läst om den finske general, som fått till uppgift att skriva marskalk Mannerheims tal vid segerbanketten i Leningrad. Mannerheim själv vägrade att sätta in finska trupper där. Parentetisk vill jag här nämna att staden på finska hette Nevanlinna [*Floden 'Neva', samt 'linna' som i Savonlinna (Nyslott)* `red.anm`] och att matematikern Rolf med detta efternamn (tidigare hette familjen Neovius) var expert för artllleri i den finska armén och fick hedersuppdraget att avlossa det första skottet i fortsättningskriget 1941-1944.

Om distributioner skrev Schwartz två böcker, som utkom 1950 [**17**] och 1951 [**18**]. Jag ägde ägde dessa böcker. Men jag var dum nog att låna ut den åt en amerikansk student. Eller rättare sagt tvingade den på honom. Förmodligen kunde han inte ett ord franska och begrep inte ett smack. Boken fick jag aldrig åter. Samma fälla har jag gått flera gånger i mitt liv. Sensmoral: **Låna aldrig ut en bok, i synnerhet inte till en vän**.

Tidigare hade Schwartz bara skrivit en kort propaganda skrift [**16**]. I [**15**] har jag beskrivit, vilken hänförelse lektyren av denna (på anmodan av Jan-Erik Roos) skapade hos mig. Plötsligt hade alla funktioner blivit obegränsat differentierbara!

Emellertid var Schwartz väg till sin stora upptäckt – som för alla stora upptäckter – lång och krånglig. I boken beskriver han de olika etapperna ganska detaljerat och går också in på den matematiskt-vetenskapliga skaparprocessen överhuvudtaget.

Givetvis, såsom fallet är med alla stora upptäckter (Gutenberg, Columbus[14] osv.), hade Schwartz många föregångare och i [**17**],[**18**] går han noggrant igenom ett antal av dem. I boken lägger han till ytterligare några namn. Det man kanske närmast kommer att tänka på är Heaviside och Dirac, de ene en brittisk ingenjör, den andre brittisk fysiker känd för sin elektronteori.

Heaviside utvecklade en operatorkalkyl till elektrikernas fromma. Han definierade *Heaviside funktionen* Y, som är en funktion på linjen som är 1 för $x > 0$ och -1 för $x < 0$ (och låter det vara osagt, vad som händer i origo). Om man formellt bildar derivatan av Y, erhålles Diracs ännu mera berömda deltafunktion, $Y' = \delta$.

Medan deltafunktionen själv har i fysiken (t.ex. i elektricitetsläran) tolkningen av en enhetspol, betyder derivatan δ' en dubbelpol. På analogt vis kan högre derivator tolkas som multipla poler.

Schwartz räknar upp ytterligare ett stort antal namn:

- Bochner, Carleman, Sobolev, Leray och Wiener.

  Speciellt namnet Bochner är värt att lägga på minnet. Denne hade utvecklat en teori för generaliserade Fouriertransformer och skrev en ganska sur recension in *Bulletin*, som jag läste i min ungdom. Enligt Laurent avger den slutomdömet "not bad"!
- Även lundensaren Marcel Riesz är nämnd för sina studier av Riemann-Liouville integraler. Ryssarna använder inte ordet distribution utan säger "generaliserad funktion". Parentetiskt kan jag påpeka, att I.M. Gel'fand i förordet till sin första bok (med Šilov) i detta ämne bland föregångar nämner Sobolev förstås, men också Marcel. I [**15**] finns en episod återgiven, där jag av den senare får frågan: "Vad är en distribution? Jag har kunnat det, men glömt bort det!" Föregångare!? På den tiden visste jag ingenting som senilitet!

Till det ovan citerade vill jag nu lägga till några egna käpphästar.

[14] Hos den nyligen avlidne estniske författaren Lennart Meri (f. 1929, en tid även Estlands president) har jag läst, att Columbus då han planerade sin resa betjänade sig av arabiska kartor. Tyvärr visste han inte längden på den arabiska milen, det värde han använde var på tok för litet. Enligt sina beräkningar skulle han nå Kina på några veckor. Hade han vetat detta rätta värdet, hade han nog inställt resan! Åt Meri har jag förgäves sökt en förläggare i Sverige.

- Sven Spanne har för mig påpekat, att *Joseph Fourier [**9**] hade deltafunktionen.* För detaljer se [**14**].
- Vidare hade Karl Weierstraß den. Approximationsteoretikerna plägar, att tala om *approximativa enheter.* Låt u vara en funktion på $\mathbf{R}$ uppfyllande lämpliga villkor, främst att den har integralen 1, $\int_{\mathbf{R}} u(x)dx = 1$. De har även funktionen

$$u_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}u(\frac{x}{\epsilon}) \quad (\epsilon > 0)$$

  också samma egenskap. Då gäller, att den i *svag distributionsmening* konvergera mot δ. Det följer, att faltningen $\int_{\mathbf{R}} u_\epsilon(x-y)f(y)dt$ går mot $f(x)$, om f är en kontinuerlig funktion. I Weierstraß fall fås kärnan $u_\epsilon(x-y) = \text{const}\, e^{-|x-y|^2}$ för *Gauss-Weierstraß kärna.*
- Och Richard Courant! I den ursprungliga upplagan av den monumentala och alltjämt med stor behållning läsbara boken [**3**] (från 1924) talar förf. om "Einzelkraft" (ensam kraft), för att använda en mekanisk analogi en kraft som verkar i en enda punkt. I den nya engelska versionen, som kom kring 1960, står Schwartz teori i ett appendix, men han nämner inte distributionerna vid sitt rätta namn utan det talas om *ideala funktioner.*

En intressant historisk framställning av distributions upptäckt är Jesper Lützens bok [**10**].

Med Fouriertransformen hade Schwartz initialt stort besvär tills han inser att man måste ha en helt annan klass av *testfunktioner* än den tidigare klassen $\mathcal{D}$, nämligen klassen $\mathcal{S}$ av släta funktioner, som jämte alla sina derivator är polynomiellt begränsade. Tillhörande klass av lineära funktionaler $\mathcal{S}'$ utgöres av de s.k. *tempererade distributionerna.* I min ungdom påstods det, att bokstaven S här inte står för Schwartz utan för "sfärisk". I alla fall är det sant, att om man med strereografisk projektion avbildar $\mathbf{R}$ (eller allmännare $\mathbf{R}^\mathbf{n}$) så övergår en funktion i $\mathcal{S}$ i en funktion på sfären som jämte alla sina derivator försvinner i en punkt på densamma, nämligen den punkt som svarar mot oändligheten vid den strereografiska projektionen. Härav för övrigt ett nytt bevis för, att $\mathcal{D}$ är icke trivial (Cauchys exempel).

Hösten 1955 (?) höll Lars Hörmander en briljant provföreläsning om Fouriertransformen. Målet var, att bevisa Fouriers integralformel från scratch. Det byggde väsentligen på Schwartz klass $\mathcal{S}$. I slutet nämndes också distributioner, enkannerligen de tempererade. Denna briljanta provföreläsning räckte för mig under många år som inledning till distributionsteorin. Jag sparade länge mina anteckningar därom, men slängde dem sedan, dumt nog.

Schwartz kämpar också med att sätta topologier på alla sina klasser, såväl för rummen av testfunktioner och deras dualrum. I definitionen av distributioner ovan användes ju bara konvergens av följder av testfunktioner i $\mathcal{D}$, ingen topologi. Här har han nytta av sina tidigare förvärvade kunskaper om topologiska vektorrum. I boken framhäves, att det på den tiden var helt nytt i matematiken att definiera nya objekt via dualitet. (Ett tidigt exempel var Weils bok [**20**], där till varje lokalt kompakt grupp ordnas en dual grupp. Viktigaste fall: den diskreta gruppen $\mathbf{Z}$ av hela tal har som duala den “kontinuerliga gruppen $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, en “torus”.) Tillsammans med Dieudonné skrev Schwartz ett stort arbete [**4**].

I början trodde man allmänt, att topologiska vektorrum, enkannerligen de lokalt konvexa dylika, skulle komma att spela en stor roll i distributionsteorin och matematisk analys i allmänhet. Likaså, att Banachrummen skulle förpassas till skräpkammaren. Jag minns också, att jag under min Paristid jämt släpade med mig Grothendiecks doktorsavhandling och läste (eller försökte eller låtsades läsa) i parker och annorstädes. Det var för övrigt Jan Odhnoff, som enträget hade uppmanat mig att studera Grothendieck. Numera är luntan dold på en undangömd plats i bokskåpet.

Dessa förhoppningar visade sig dock vara falska. Idag är den auktoritära texten om distributioner Hörmanders fyrabands verk [**8**]. Då jag bläddrade igenom referenslistan till band I, fann jag blott en referens med anknytning till EVT, nämligen just [**4**].

Banachrummen upplevde ett nytt uppsving kring 1970 och Grothendiecks olikhet och hans konstant gjordes rumsren av Lindenstrauss i Jerusalem och andra. Bourbaki behandlar bara lokalkonvexa rum.

I [**15**] har jag berättat, vilken mental ansträngning det var för mig att komma över denna lokalkonvexa tröskel!

Schwartz kort senare utvecklingar på distributionernas område:

- pseudo-differentialoperatorer – vilka dock går tillbaka på arbeten av A.P. Calderòn och Zygmund;
- Hörmanders Fourierintegraloperatorer;
- dennes begrepp av vågfront – en gigantisk utvidgning av Fourieranalysen, föga anad i början av 1950-talet, som ofta går under namnet *mikrolokal analys*.

Men distributionerna mottogs inte med samma entusiasm av alla. Äldre matematiker (som Bochner, Courant m.fl.) såg inget nytt i det hela och vägrade tvärt att betjäna sig av den nya, tunga formalismen.

Trots att Schwartz i sin bok betecknar Gårding och Hörmander som sina vänner, mötte distributionerna ett stort motstånd i den lilla storstaden. Ej heller visste han något om svenskarna och den svenska avundsjukan. Några exempel har jag nämnt i [**15**]. Det gick knappast ett seminarium utan att seminarieledaren slängde ut en glirning. Schwartzs två böcker refererades som “nya och gamla” testamentet. Studentikost! Med tiden glömdes dock denna motsättning bort och distributionerna och deras upphovsman höjdes till skyarna. Det slutade med att Schwartz blev hedersdoktor i Lund. Allt gammalt groll glömt. Sådan är människan. I den vevan riktade jag Schwartz ett matematisk fråga. Jag var då besatt av tanken, att interpolation egentligen handlade om vektorbuntar över måttrum! Han blev mig svaret skyldig. Själv har jag för längesedan övergivit denna tanke.

En av de områden, där teorin hade mest framgång, var på de partiella differentialekvationernas gebit. Schwartz visade satsen, att varje distributionlösningar till $\Delta u = 0$ eller allmänt en elliptisk ekvation $P(D)u = 0$ var en slät funktion (ett element av $\mathcal{E}$ eller C^∞). En långt gående generalisering av “Weyls lemma”. Det är vad Dieudonné har betecknat som Schwartz stora sats, *le grand théorème de*

Schwartz.

En annan triumf gäller fundamentallösningarar till lineär partiella differentialekvationer. I klassisk analys är en fundamentallösningar en lösningar u till den homogena ekvationen $P(D)u = 0$, som har en singularitet i en punkt x_0 med en singularitet av viss typ. Man säger också, att u har en pol i x_0. Således har Laplace-operator Δ i tre dimensioner fundamentallösningaren $u = \frac{1}{r}$, där r betecknar avståndet till polen. T.ex. är Greens funktion en fundamentallösningar, som också satisfierar lämpliga randvärden. Nackdelen med denna definition är emellertid, att då måste man precisera denna "typ" från fall till fall. I distributionsteorin blir detta ersatt med en enda ekvation $P(D)u = \delta_{x_0}$, där δ_{x_0} betecknar enhetsmassan placerad i polen.

En viss förvirring uppstod här i början. Klassiskt delas differentialekvationer i elliptiska, hyperboliska och paraboliska. T.ex. i två dimensioner så avgörs typen ekvationen $AD_x^2u + BDxD_yu + CD_y^2 = 0$ av uppförandet hos den kvadratiska formen $A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$. Således om denna är positivt definit i alla punkter av det betraktade området har man elliptisk typ osv. Emellertid började man i början av 1950-talet kalla alla operatorer elliptiska, om motsvarigheten till Schwartz sats gällde. Men då blev värmeledningsekvationen $D_t = D_x^2u$, den mest paraboliska av alla, plötsligt elliptisk. För att råda bot på detta missförhållande uppfann Schwartz – eller möjligen maître Bourbaki, eftersom index saknas orkar jag inte leta reda på det aktuella stället i boken – ordet *hypoelliptisk*. Det låter fult, men har accepterats universellt. För en hypoelliptisk operator gäller alltså, att lösningarar till den homogena ekvationen är "släta" (kan deriveras hur många gånger som helst). Hörmander bestämde i sin berömda doktorsavhandling från 1955 alla hypoelliptiska operatorer med konstanta koefficienter. Den seriöse eleven rekommenderas att läsa den ännu idag [**7**].

The most beautiful night of my life Under denna rubrik beskriver förf. själva ögonblicket för den stora upptäckten (nov. 1944). "In my youth, I used to have insomnias lasting several hours, and never took sleeping pills. I remained in my bed, the light off, and without writing anything, I did mathematic/s." Detta finner jag utomordentligt intressant, i [**15**] har jag beskrivit ett liknande tillstånd hos mig själv. Månne är det vanligt för alla matematiker eller åtminstone kreativa människor. *Detta borde kanske undersökas vetenskapligt!* T.ex. upptäckte jag under sådana omständigheter min något misslyckade "abstrakta" beskrivning av lineära differentialoperatorer, min tribut till Bourbaki; jag skäms fortfarande för det, fastän de flesta referenser i litteraturen till mitt namn hänför sig till denna sats. En skillnad är dock, att hos mig har dessa tillstånd fortsatt komma dock möjligen med större intervall. Numera har jag några botemedel mot det. När jag bevisat en mängd satser inklusive Riemanns hypotes, skrivit flera böcker samt ett otal brev, brukar jag gå upp, sätta på datorn och åtminstone skriva färdigt några av breven. Det märkligaste är emellertid, att jag upplevde analoga tillstånd av insomnia redan som barn. Vi brukade då om somrarna bo i historieprofessor Bohlins villa på Nicolovius väg i Lund, medan familjen själv befann sig på sommarnöje, jag tror, på land. Jag minns, hur jag låg vaken i sängen och tittade på fullmånen.

Någon matematik var jag inte i stånd att bedriva då!

Referenser

[**2**] K. Chandrasekharan: recension av [**19**], franska originalet. Notices Amer, Math. Soc. 45 (1998), no. 9, 1141-1147.

[**3**] R. Courant - D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I-II. 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1968.

[**4**] J. Dieudonné - Laurent Schwartz: La dualité dans les espaces ($\mathcal{F}$) et ($\mathcal{LF}$). Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 1 (1949), 61-101.

[**6**] Anita Burdman Feferman: Polytics, logic, and love: the life of Jean Van Heijenoort. Wellesley, Mass., : AK Peters, 1993.

[**9**] J. Fourier,The analytic theory of heat. 1822.Reprint: Dover, New York, 1955.

[**7**] Lars Hörmander: On the general theory of general partial differential operators. Acta Math. 94 (1955)

[**8**] Lars Hörmander: The Analysis of Linear Partial Differential Operators I- IV. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 256, 257, 274, 275. Springer Verlag Berlin - Heidelberg - New York- Tokyo 1983-1985.[15]

[**10**] Jesper Lützen: The prehistory of the theory of distributions. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences 7.) Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[**13**] Eduardo L. Ortiz - Allan Pinkus: Herman Müntz:A Mathematician's Odyssey. Math. Intelligencer 27 (2005), no. 1, 22–31.

[**14**] Jaak Peetre; On Fourier's discovery of Fourier series and Fourier integrals. (Swedish translation by the author: Om Fouriers upptäckt av Fourierserier and Fourierintegraler. Normat.)

[**15**] Jaak Peetre; Early encounters with mathematics,especially with interpolation, mainly 1954-1965. Även kallat "The memoirs of Daddy Mumin" (Muminpappans memoarer)eller (i svaga stunder) as"A life wasted on mathematics". Manuskript, tillgänglig på min nätsida, även i lunchrummet på matematikcentrum Lund, brottstycken publicerade i Utskicket..

[**16**] Laurent Schwartz: Théorie des distributions et transformation de Fourier. Ann. Univ. Grenoble. Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.) 23,(1948). 7–24.

[**17**] Laurent Schwartz: Théorie des distributions, tome 1. Hermann, Paris, 1950.

[**18**] Laurent Schwartz: Théorie des distributions, tome 2. Hermann, Paris, 1951.

[**19**] Laurent Schwartz: Un mathématiciens aux prises avec le sciècle. Editions Odile Jacob, 1997. Engelsk översättning: Leila Scheps: A Mathematician grappling with His Century. Birkhäuser, 2001.

[**20**] André Weil: L'intègration dans les groupes topologiques et ses applications. [This book has been republished by the author at Princeton, N. J., 1941.] Actual. Sci. Ind., no. 869. Hermann et Cie., Paris, 1940.

[15] Enl. förf. en ny upplaga under utgivning.

Euklides i nya kläder - om dynamiska geometriprogram

- *Christer Bergsten* -

Inledning

Den deduktiva presentationen av plangeometrin, med Euklides Elementa som förebild, har dominerat geometriundervisningen under lång tid, inte minst i Sverige inom läroverkstraditionen. Med den nioåriga grundskolans införande, och genom den nya matematikens inflytande på 1960- och 1970-talen, bröts den traditionen för en mer intuitiv och transformativ geometri. 'Euklides' ansågs alltför teoretisk och svårtillgänglig för den moderna skolan (se t.ex. Lindahl, 1987, s. 5). Någon systematisk framställning av geometrin gjordes därför inte längre och kunskaperna i geometri hos svenska skolelever ändrades både till karaktär och i prestation. Vid internationella jämförelser är geometri ett av de områden inom matematiken där svenska elever hamnar lågt[1]. Även vid universiteten har den klassiska geometrin haft och har mycket liten plats i de grundläggande kurserna, där de återfinns huvudsakligen i kurser för lärarutbildningen. I vilken grad denna förändring av geometriutbildningen har påverkat studierna och förståelsen inom andra områden i matematiken kan man bara spekulera om. En följd verkar ha varit att utan det analyserande geometriska resonemanget i fokus blev resultatet en ökad fokusering på mätning och kvantitativ användning av formler för areor och volymer. Så skriver t.ex. Bengt Ulin (1998, s. 7) att "Efter 1950-talet fick geometri en allt mindre roll i svenska skolor. I gymnasieskolan blev den i stort sett reducerad till analytisk geometri, en i och för sig effektiv form av geometri, vars metoder dock är algebraiska. I grundskolan har geometrin starkt begränsats till kvantiteter: beräkning av vinklar, längder, areor och volymer; problem av andra slag har fått ett blygsamt utrymme." Studierna av symmetrier och transformationer tycks ha kommit helt i skymundan, möjligen beroende på oklarheter och/eller okunskap om syfte och sammanhang. Per Häggmark beskrev denna period som "de år då geometri ägnades ett förstrött intresse och av många skolmän betraktades som ett omodernt ämnesområde (Häggmark, 1989, s. 5). Under åren sedan dess har flera röster hörts i samma anda (t.ex. Ulin, 1998; Bergsten, 2006a) men inte förrän i de nya kursplanerna för gymnasiet Gy07 har man kunnat se början till en officiell 'återupprättelse' av geometrins betydelse för en mer generell och integrerad matematisk kompetens. En naturlig fråga är då varför det skulle lyckas bättre nu än för 40 år sedan med en logiskt resonerande och konstruktiv geometri? Det har skett stora förändringar när det gäller synen på matematiken i skolan, på den internationella scenen såväl som på den nationella. Ämnet i skolan har ändrats från en betoning på räkning till matematik, dvs. en styrning från att individuellt träna räkneförmåga till att undersöka, diskutera, resonera och förstå matematiska begrepp, sammanhang och

---

[1] I en sammanfattning av resultaten från TIMSS 2003 kan man läsa: "I algebra och geometri ligger Sverige bland de allra främsta i 20-landsgruppen"
(`http://www.umu.se/edmeas/timss2003/Sammanfattning.html;2006-04-10`)

metoder (Wyndhamn, 1997). För geometrins del utgör de nya tekniska hjälpmedlen en annan faktor som ändrat förutsättningarna. Datorprogram där man kan konstruera och dynamiskt manipulera geometriska figurer direkt på skärmen tillåter en kombination av undersökning, hypotesformulering och prövning, med ett då motiverat behov av att förklara och bevisa sina hypoteser. Figurerna blir dessutom snygga och precisa och kan därmed ge en tydligare återkoppling än handgjorda konstruktioner. Forskning visar dock att dessa datorprogram inte så självklart skapar en direkt koppling mellan tanke och begrepp. Här kommer dynamiska geometriprogram att diskuteras, illustrerat med ett par exempel (för gymnasiet), dels ”vad dom gör”, dels deras användning i skolans geometriundervisning. En kort översikt ges också av didaktisk forskning om geometriskt tänkande och om användning av dynamiska geometriprogram i undervisningen.

Dynamiska geometriprogram

Dynamiska geometriprogram (i fortsättningen förkortat DGS, från engelskans *dynamic geometry software*) kallas de datorprogram som inte bara tillåter konstruktioner av geometriska figurer utan även ger möjlighet att manipulera dom på ett sådant sätt att de egenskaper som byggts in i konstruktionen bibehålls. Har man t.ex. konstruerat en triangel så att den per konstruktion har lika långa sidor kommer den fortfarande att vara liksidig även om man med hjälp av markören flyttar ett av dess hörn så att den kommer i ett annat läge, roteras, eller förminskas/förstoras. Denna funktion att flytta omkring ett objekt på skärmen brukar kallas *drag mode*. Med hjälp av *drag mode* kan man som lärande i matematik bli observant på olika grundläggande invarianser i den klassiska geometrin, som t.ex. att de tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt eller att periferivinklar på samma båge i en cirkel är lika stora. Två andra funktioner som karakteriserar DGS är kommandot locus (som ritar den geometriska orten för en vald punkt konstruerad utifrån en rörlig punkt) samt möjligheten att skapa macron (se t.ex. Strässer, 2004). Det finns idag ett 70-tal olika DGS tillgängliga, sedan de började utvecklas på 1980-talet, de flesta dock baserade på ca 10 grundkoncept (Laborde et al., 2006). De mest kända är Cabri-Géomtre (Laborde et al. 1988), Geometer's Sketchpad (Jackiw, 1991), Geometric Supposer (Schwartz et al., 1985) och Thales (Kadunz & Kautschitsch, 1993). Ett Java-baserad välkänt program är Cinderella[2]. De flesta program finns för utprovning som fria demo-versioner på respektive hemsidor. Det finns idag även gratisprogram som t.ex. GEONExT[3]. De flesta av dessa program är utvecklade för användning i undervisningssammanhang men många används även inom matematisk forskning. För att belysa hur ett DGS fungerar ger jag här ett exempel på arbete med parabeln. Det program jag använt är Cabri-Géomtre II+ (kallat bara Cabri i fortsättningen) men motsvarande konstruktioner kan genomföras i de flesta DGS.[4] Detta och fler konstruktionsexempel genomförda med Cabri finns att ladda

[2] Se webbsida på `http://cinderella.de/tiki-index.php`

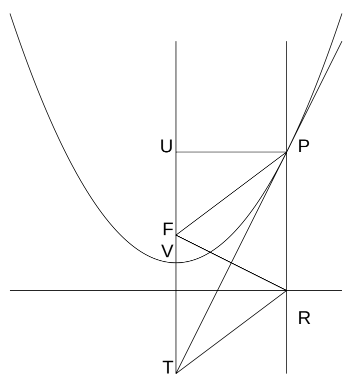
[3] Se webbsida på `http://geonext.uni-bayreuth.de/`

[4] För information om Cabri och dess historia se `http://www-cabri.imag.fr/cabri2/historique-e.php` Publikationer om Cabri i undervisningen finns lis-

ner från webbsidan `www.mai.liu.se/ chber/Geometri` .

Exempel 1 - Parabeln

Med den grundläggande geometriska kägelsnittsdefinitionen av en parabel följer den välkända avståndsegenskapen[5] som på gymnasienivå ofta använts som definierande egenskap. Med den som grund och kommandot Conic kan man i Cabri skapa en parabel att undersöka och arbeta med.[6] Lägg in en styrlinje L och en punkt F (fokus), godtyckligt valda (se figur 1). Välj sedan en punkt R på L och dra med kommandot *Perpendicular Line* normalen N till L genom R. Mittpunktsnormalen (*Perpendicular Bisector*) till sträckan FR skär N i P. Då har P samma avstånd till F som till R och ligger alltså på parabeln med styrlinjen L och brännpunkten (fokus) F. Flyttar man nu R längs L med *drag mode* kan man se hur P rör sig längs en kurva som kan synliggöras som ett spår med kommandot *Trace On*: Parabeln växer fram som ett resultat av den geometriska konstruktion man just genomfört. Vill man kan arbeta vidare med parabeln är det dock bättre att på samma sätt som P konstruera ytterligare fyra punkter på parabeln och sedan med kommandot *Conic* skapa parabeln genom dessa fem punkter. Genom att flytta F med *drag mode* ser man då hur parabeln blir 'brantare' då F avlägsnas från L och 'flackare' då den närmas. Den så kallade parabelromben PFTR kan lätt konstrueras och undersökas dynamiskt och brännpunktsegenskapen för axelparallella strålar undersökas (med *drag mode*) och förklaras. Att avståndet från parabelns vertex V till tangentens skärningspunkt T med axeln är samma som till tangeringspunkten P:s fotpunkt U på axeln kan undersökas till exempel genom att med kommandot *Distance* markera längden av respektive sträcka, eller dra en cirkel med medelpunkt i V och radie VU, och flytta på R (så att P flyttas) med *drag mode*.



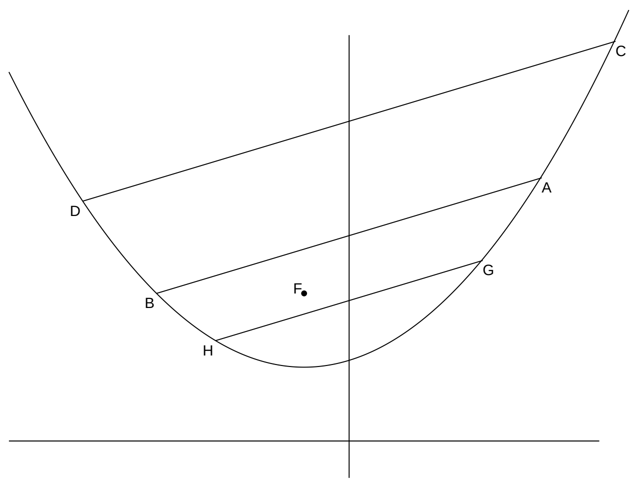
Figur 1. Parabel med brännpunkt, styrlinje och en parabelromb.

tade på **`http://www-cabri.imag.fr/cabri2/publications/`**

5 Förvånande nog återfinnes inte denna hos Apollonius själv, utan bara motsvarande egenskaper för ellipsen och hyperbeln (se Apollonius, 1952).

6 Se även Bergsten (2006b) för en histrisk-didaktisk diskussion av parabeln, där även andra definitioner tas upp.

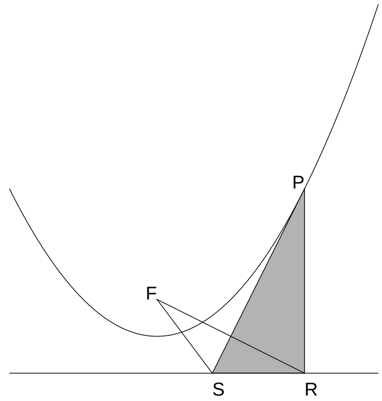
Mindre allmänt känt är kanske begreppet diameter i detta sammanhang (se t.ex. Archimedes, 1952, eller Apollonius, 1952). För att undersöka detta med Cabri väljs två punkter fritt på parabeln (A och B i figur 2). Välj sedan C fritt på parabeln och konstruera medkommandot *Parallel lines* en linje parallell med kordan AB och som förutom i C skär parabeln i D[7]. Genom att flytta A, B eller C med *drag mode* ser man hur CD förblir parallell med AB. Konstruera gärna ytterligare en korda GH parallell med AB. Marker nu med kommandot *Midpoint* mittpunkterna på AB och CD och dra linjen genom dessa. Man kan då observera att denna linje är parallell med parabelns huvudaxel och att den skär även GH i dess mittpunkt. Apollonius kallar en sådan linje genom mittpunkterna på parallella kordor till en parabel en diameter och definierar parabelns axel som den diameter som är vinkelrät mot de parallella kordorna (Apollonius, 1952).



Figur 2. Parabel med parallella kordor och tillhörande diameter.

Följande exempel handlar om problemlösning med en parabel konstruerad i Cabri. Med beteckningar som i konstruktionen i figur 3 söks den minsta triangel RPS, där S är skärningspunkten mellan styrlinjen L och mittpunktsnormalen M till F och R, då R är en punkt på L. Triangeln RPS kan lämpligen kallas ”subtriangeln” till parabeln för punkten P, då M är tangent till parabeln i P.

[7] Dra sträcken (*Segment*) CD och göm (*Hide*) sedan den konstruerade linjen genom C.



Figur 3. Parabel med 'subtriangel' PSR till P.

Med Cabri kan situationen undersökas till exempel genom att med kommandot *Triangle* rita triangeln genom att markera punkterna R, P och S, fylla triangeln med en färg så att den lyser fram samt skriva ut mätetalet för dess area med kommandot Area. Även måttet för skärningsvinkeln PSR mellan tangenten och L kan markeras. Genom att med *drag mode* flytta punkten P längs parabeln ser man hur triangelns form och area ändras samt vinkeln PSR. Minsta area verkar finnas då vinkeln PSR är 30?, oberoende av avståndet mellan F och L. Att man på detta sätt 'upplevt' situationen och hur det ser ut kan göra att man får större motivation att söka en förklaring till och/eller en validering av det observerade resultatet. Eftersom det handlar om optimering ligger det nära till hands att algebraisera problemet via ett lämpligt koordinatsystem. Med avståndet d från F till styrlinjen L ger en enkel kalkyl med hjälp av derivata, med Cartesiska koordinater definierade genom att L är linjen $y = -d/2$ med F i $(0, d/2)$, att sökt R har koordinaterna $(d/\sqrt{3}, 0)$ och att triangelns minsta area är $\frac{2\sqrt{3}}{9}d$. M skär då L i vinkeln 30?, oberoende av d och triangeln FSR är liksidig. Triangeln FSR är dock minst då vinkeln FSR är rät; då är trianglarna FSR och PSR kongruenta. Man kan också observera, genom att använda kommandot Locus på skärningspunkten mellan FR och PS (beroende punkt) relativt P (oberoende), att denna skärningspunkt ligger på en rät linje (identisk med x-axeln i det koordinatsystem som definierats ovan; enkelt att algebraiskt verifiera).[8]

Geometri och forskning om geometriskt tänkande

Inom den antika grekiska matematiken garanterades existensen av ett geometriskt objekt om det kunde konstrueras med passare och ograderad linjal, med en kompletterande validering av konstruktionens giltighet genom logisk argumentation[9]. Den deduktiva geometrin i antikens Grekland drevs till en alltmer avancerad

[8] Läsaren uppmanas att genomföra ett geometrskt (Euklidiskt) bevis för dess resultat.

[9] Långt senare (1797) visade Mascheroni att alla konstruktioner som kan genomföras med passalre och linjal också kan genomföras med enbart passare, medan Steiners resultat från 1833 visar att en konstruktion som kan genomföras med passare och linjal också kan genomfras med enbart linjal om man dessutom har

nivå efter Euklides, inte minst genom Arkimedes och Apollonius, senare även genom Pappus. Den metod för geometrisk konstruktion (även användbar mer generellt för problemlösning) som kallades 'analys och syntes' beskrevs under senare delen av antiken av Pappus i *Synagoge*:

> .. in analysis we assume that which is sought as if it were already done (xx), and we inquire what it is from which this results, and again what is the antecedent cause of the latter, and so on, until by so retracing our steps we come upon something already known or belonging to the class of first principles, and such a method we call analysis as being solution backwards (xx). But in *synthesis*, reversing the process, we take as already done that which we last arrived at in the analysis and, by arranging in their natural order as consequencies what before were antecedents, and successively connecting them one with another, we arrive finally at the construction of what was sought; and this we call synthesis. (citerat i Heath, 1981, s. 400)

Detta illustrerar en viktig aspekt av geometriskt tänkande, som skolan till stor del tagit bort ur sitt program och som enligt många bör få en renässans (t.ex. Ulin, 1998). Det bör då ske utifrån kunskap om hur geometriskt tänkande utvecklas och en tydligt uttalad bild av målen med skolans matematikverksamhet. Den mest inflytelserika teorin specifikt för det geometriska tänkandets utveckling utarbetades av Dina och Pierre Van Hiele under 1950-talet, baserad på Piagets utvecklingspsykologi. Teorin urskiljer fem hierarkiska nivåer: igenkänning - analys - logisk ordning - deduktion - stringens. På den första nivån kan barnet känna igen och namnge vanliga figurer (cirkel, rektangel, osv.), vilket utgör en grund för att på den andra nivån analysera egenskaper hos dessa figurer genom att räkna antal hörn, mäta längder och vinklar, osv. Med dessa erfarenheter som bas har man möjlighet att klassificera de geometriska objekten relativt varandra (en rektangel är en parallellogram som är en fyrhörning, osv.). Först på nästa nivå kan man förstå och genomföra en logiskt-deduktiv bevisföring (som att härleda bisektrissatsen genom att se på lämpliga likformiga trianglar). Den femte nivån, som innebär förmåga att förstå innebörden i vad ett axiomatiskt system är och att inse att andra val av axiom (än dom traditionella) kan leda till andra geometriska system. Forskning har visat på en stabilitet för dom grundläggande nivåerna men på problem att identifiera och mäta skillnader mellan de högre nivåerna, vilket lett en reviderad modell med bara tre nivåer - igenkänning, analys och deduktion (se t.ex. Owens & Oughtred, 2006). Teorin kopplades av Van Hiele själva till en undervisningsmodell för hur övergången mellan de olika nivåerna kan underlättas, och senare till en mer generell teori för utveckling av matematiskt tänkande (Van Hiele, 1986). Det "svåra" steget gäller övergången från nivå två till nivå tre. Forskning har även visat att formella definitioner bara kan förstås på nivå tre (de Villiers, 1998). Nivåerna är inte knutna till specifika åldrar och samma elev kan inom olika begreppsområden befinna sig på olika nivåer. En grundläggande komplexitet för geometriska objekt är samspelet mellan figur och idé/begrepp, något som inte är intuitivt uppenbart (Fishbein, 1993). Förståelse kan enligt Duval (1998) nås genom samverkan mellan tre olika kognitiva funktioner, visualisering, konstruktioner med hjälp av verktyg (som t.ex. passare och linjal eller datorverktyg), och resonemang. I detta sammanhang skiljer Duval mellan tre olika sätt att betrakta en geometrisk figur,

en fix cirkel given (se t.ex. Dörrie, 1965. s 160-170).

> An immediate perceptual approach that may be an obstacle for the geometric representation of the diagram, an operative approach that is used for identifying sub-configurations useful for solving the problem and a discursive approach that is related to the statement describing the givens of the problem. (Laborde et al., 2006, p. 276-277)

Följande citat sammanfattar mycket av forskningen om lärande och undervisning i geometri:

> Problem solving was shown to be a key in students attending to key features in shapes and working towards understanding the relationship between shapes. This development was frequently described in terms of Van Hiele levels. These levels were shown to be continuous rather than discrete and studies showed a range of issues in assessing students in accordance with this theory. Nevertheless, experiences that influence preliminary intuitive approaches and more complex visual imagery are important in students' geometry education. (Owens & Oughtred, 2006, p. 105)

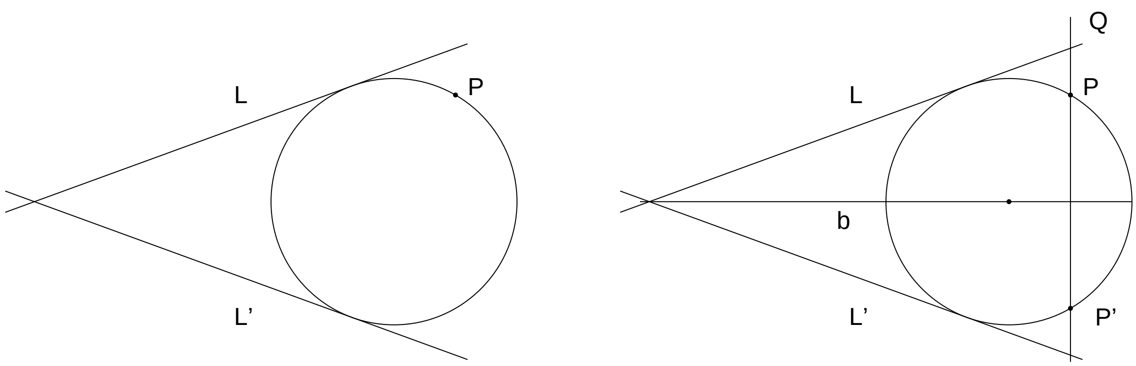
En rimlig didaktisk implikation av detta är att elever/studenter bör erbjudas undervisningssituationer i geometri med problemlösning där såväl ett intuitivt som ett mer komplext bildseende kommer i spel. Samtidigt krävs en medvetenhet om inom vilka Van Hiele-nivåer geometriska resonemang kan ske, samt om vilka olika typer av kognitiva funktioner som aktualiseras och integreras i samband med arbete med geometriska figurer - perceptuella, operativa och diskursiva.

Didaktisk forskning om dynamiska geometriprogram

En nyskriven översikt om forskning kring DGS i matematikundervisningen ges i Laborde et al. (2006). Ett fruktbart teoretiskt begrepp som används är *utilisation scheme* ('användarschema'; Rabardel, 2002), som står för hur en individ utnyttjar en artefakt (som t.ex. ett verktyg, konkret material eller ett datorprogram) för att klara av en uppgift man avsiktligt försöker lösa. Den process som leder till utvecklingen av ett användarschema kallas *instrumentering*, dvs. *artefakten*, objektet, förvandlas till ett *instrument* (se t.ex. Strässer, 2004). Ett exempel på användarschema när det gäller DGS är hur *drag mode* hanteras. Man har funnit att elever inte naturligt utnyttjar programmets möjligheter att skapa stabila konstruktioner och studera invarianser med hjälp av *drag mode*, utan gärna gör mer direkt visuella konstruktioner med anpassningar (t.ex. med mätetal för sträckor och vinklar för att få dem lika). För detta fenomen har termerna *robusta* respektive *mjuka* konstruktioner använts (Healy, 2000). Även olika 'typer' av *drag mode* har identifierats, inte alla förutsedda av programkonstruktörerna (ibid.). Vid geometriska konstruktioner blir elevers försök ofta inte robusta under *drag mode*, vilket understryker den separation i elevens tanke mellan den visuella och den teoretiskt-geometriska världen som nämndes ovan (Noss et al., 1994). Hur ett steg i en konstruktion är beroende av tidigare steg inses inte heller alltid av elever som arbetar med DGS, vilket märks förutom vid *drag mode* även när delete används, då ibland oväntade delar av en figur försvinner. Detta ger stöd för att använda DGS i geometriundervisningen då dessa 'misstag' uppmärksammar och medvetandegör sådant beroende. Att arbete med DGS stöder behovet av och förståelsen för bevis inom geometrin framgår också av den forskning som gjorts, bland annat hur beviset fyller en funktion både som validering för individen av en konstruktion och som stöd för att övertyga en kamrat om att konstruktionen verkligen fungerar (se Laborde et al., 2006). Forskningen kring DGS (och andra datorprogram inom matematikundervisningen) har inte bara visat på hur begreppsutvecklingen kan påverkas via tekniken utan även gett fördjupad insikt i elevers matematiska begreppsuppfattningar. Lärare är i detta sammanhang nyckelpersoner och man har visat hur lärares användning av DGS reflekteras i valet av olika typer av uppgifter, där tillgången till DGS fyller olika funktioner (Laborde, 2001). Bara vissa av dessa ger stöd för lärande medan andra är mer lämpade för forskning kring begreppsförståelse (Laborde et al., 2006). I Sverige har denna typ av programvara hittills levt en ganska undanskymd roll, i skola såväl som i didaktisk forskning. En del studier har gjorts i Göteborg (se t.ex. Holmquist & Lingefjärd, 1999; Lingefjärd & Holmquist, 2003; Lingefjärd & Norman, 2006) och nyligen presenterades den första svenska doktorsavhandlingen med DGS i fokus (Engström, 2006).

Exempel 2 - Apollonius problem

En enkel situation för det s.k. Apollonius problem ska diskuteras här, dvs. att konstruera en 'cirkel' som tangerar tre givna 'cirklar', där 'cirkel' är en punkt, en rät linje eller en cirkel (se t.ex. Dörrie, s. 154-160): *Konstruera en cirkel som tangerar en punkt och två räta linjer.*



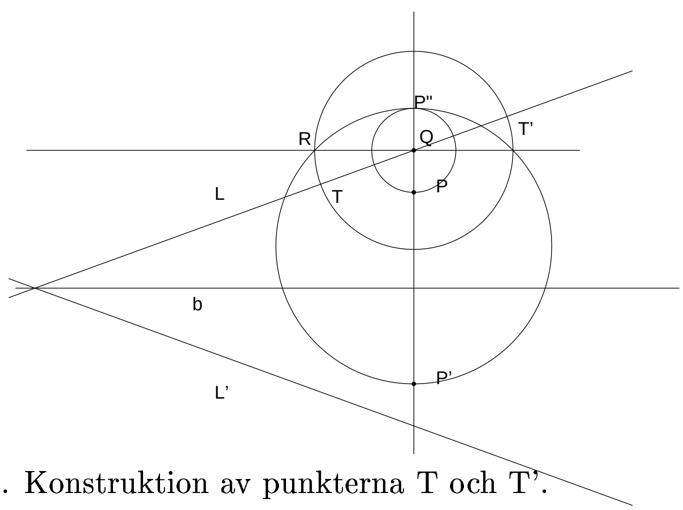
Figur 4a. Givna objekt och sökt cirkel. Figur 4b. Konstruktion av b, P' och Q.

Jag ser här på den konfiguration där punkten ligger utanför två icke-parallella linjer, som i figur 4a. Detta är min *rekonstruktion* av hur Pappus (eller Apollonius) kan ha gjort med tanke på de metoder han brukade använda. Att som lärare i matematik ibland själv genomföra sådana rekonstruktioner ger en stabil utgångspunkt för att i undervisningen kunna behandla den klassiska geometrin med en erfarenhetsgrund och respekt (och kanske fascination) som eleverna kommer att märka och ta till sig. Sådana rekonstruktioner är också vad matematikhistoriker ibland måste göra då originaldokument saknas. En lärares arbete med sitt ämne måste inte bara vara att undervisa *i* och *om* det, utan även att själv arbeta *med* det.

Analys: Om en cirkel tangerar de givna linjerna L och L' och går genom den givna punkten P (se figur 4a), så måste cirkelns medelpunkt ligga på bisektrisen (b) till L och L' och även gå genom spegelpunkten P' till P i b (se figur 4b). Om T är tangeringspunkten mellan L och cirkeln och Q är skärningspunkten mellan L och linjen genom P och P', så följer av kordasatsen att $QT^2 = QP \times QP'$.

Syntes: Konstruera bisektrisen b till L och L' och spegelpunkten P' till P i b (klassiska konstruktioner). Konstruera Q som skärningen mellan sträckan PP':s förlängning[10] och L. Bestäm sedan T på L så att $QT^2 = QP \times QP'$. Där normalen till L skär b finns den sökta cirkelns medelpunkt.

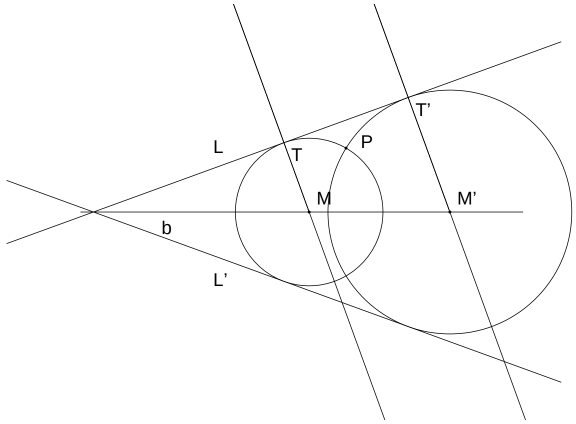
Då P, P' och Q på en linje är givna kan T då bestämmas via en klassisk konstruktion på följande sätt (se figur 5). Cirkeln med Q som medelpunkt och QP som radie skär linjen genom P och P' i P". Slå en cirkel med P'P" som diameter. Normalen genom Q till denna diameter skär denna cirkel i R. Cirkeln med Q som medelpunkt och QR som radie skär då L i T respektive T' (problemet har alltså två lösningar).



Figur 5. Konstruktion av punkterna T och T'.

Den sökta cirkelns medelpunkt fås nu direkt som skärningspunkten M (respektive M') mellan normalen till L genom T (respektive T') och bisektrisen b (se figur 6).

[10] Om P ligger på b dras normalen till b genom P



Figur 6. Konstruktion av punkterna M, M'och de tangerande cirklarna.

Konstruktionens robusthet kan nu kontrolleras genom att flytta punkten P med *drag mode*, liksom linjerna L och L'. Man ser då hur cirklarna tangerar varandra då P är på b och hur den 'yttre' cirkeln blir mer och mer lik en linje då vinkeln mellan L och L' närmar sig 180?.

Euklides i nya kläder

De exempel som tagits upp här kräver naturligtvis att man redan har en vana att hantera Cabri, vilket man dock lär sig ganska snabbt. Detta kan med fördel göras i samband med enkla övningar direkt inriktade på att belysa grundläggande begrepp och relationer, med fokus på invarianser under *drag mode*. Några av de mest grundläggande klassiska konstruktionerna (som att bestämma mittpunkten på och normalen till en given sträcka, dra en bisektris till en given vinkel, eller en linje genom en given punkt parallell med en given linje) känns nödvändiga att inledningsvis ha genomfört på papper med passare och linjal. Utan att ha upplevt och förstått vad som ligger bakom de snabbkommandon som finns i menyn på Cabri blir det omöjligt att känna att man har kontroll över vad som händer när man gör konstruktionerna på datorskärmen. Kanske kan dynamiska geometriprogram ge Euklides den mer moderna klädedräkt som kan förmå fånga ett intresse för geometri hos dagens skolelever, då programmens användning bygger på sådana naturliga mänskliga aktiviteter som att undersöka, upptäcka och söka efter en förklaring. Då krävs dock att programmet av eleven kan hanteras som ett verktyg för att med dess bilder bygga en bro mellan tanken och objektet (här geometriska begrepp och relationer), vilket hos läraren kräver, utifrån föreliggande text, en reflekterad didaktik som bygger bland annat på kunskap om och samspelet mellan de fyra 'noderna' geometrin - programmet - instrumentaliseringsprocessen - geometritänkandet.

Referenser

Apollonius of Perga (/1952). Conics. In Great books of the western world, Vol. 11. Chicago.

Archimedes (/1952). The book of lemmas. In Great books of the western world, Vol. 11. Chicago.

Bergsten, C. (2004). Beyond the representation given: the parabola and historical metamorphoses of meanings. SMDF Medlemsblad, Nr 10, 37-49.

Bergsten, C. (2006a). Att konstruera sitt geometriska tänkande. I Dokumentation från 14:e Matematikbiennalen, Malmö 26-27 januari 2006 (CD-rom).

Bergsten, C. (2006b). Vad är en parabel? Nämnaren, 33 (1), 45-48.

Dörrie, H. (1965). 100 great problems of elementary mathematics. Their history and solution. New York: Dover Publications, Inc.

Engström, L. (2006). Möjligheter till lärande i matematik. Lärares problemformuleringar och dynamisk programvara. [Teaching Mathematics Posing Problems Using Dynamic Geometry Software]. `http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:su:diva-943` (2006-04-09)

Gutiérrez, A. & Boero, P. (Eds.) (2006). Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future. Rotterdam: Sense Publishers.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), Proceedings of the 24th PME International Conference, I, 103-117.

Heath, T. (1981/1921). A history of Greek mathematics, Volume II. New York: Dover.

Holmquist, M. & Lingefjärd. T. (1999). Datorstöd i blivande lärares matematiklärares utbildning. I C. Bergsten (Red.), Datorstödd eller datorstörd matematikundervisning? Högskoleverkets Skriftserie 1999:4 S.

Häggmark, P. (1989). Laborativ geometri. Lund: Studentlitteratur.

Kadunz, G. & Kautschitsch, H. (1993). THALES - Software zur experimentellen Geometrie (Computer program). Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6, 283-317.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. In A. Gutiérrez & P. Boero, (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future (pp. 275-304). Rotterdam: Sense Publishers.

Laborde, J-M., Baulac, Y., & Bellemain, F. (1988). Cabri-Géomtre I (Computer program) Grenoble: Université Joseph Fourier.

Lindahl, G. (1987). Euklides geometri. Stockholm: Natur och Kultur.

Lingefjärd. T. & Holmquist, M. (2003). Learning mathematics using dynamic geometry tools. In S.J. Lamon et al. (Eds.), Mathematical modeling: A way of life, ICTMA 11 (pp. 1119-126).Chichester: Horwood.

Lingefjärd, T. & Norman, V. (2006). Ett undersökande arbetssätt i geometri. Nämnaren, 33 (1), 42-44.

Noss, R., Hoyles, C., Healy, L., & Hoelzl, R. (1994). Constructing meanings for constructing: An explorative study with Cabri-geometry. In J.D. Ponte & J.P. Matos (Eds.), Proceedings of the 18th PME International Conference, 3, 360-367.

Owens, K. & Oughtred, L. (2006). The complexity of learning geometry and measurement. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future (pp. 83-115). Rotterdam: Sense Publishers.

Rabardel, P. (2002). People and technology: a cognitive approach to contemporary instruments. [Available 2006-04-20 at `http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr`]

Schwartz, J. & Yerushalmy, M., & Shternberg, B. (1985). The Geometric Supposer (Computer program). Pleasantville, NY: Sunburst Communication.

Strässer, R. (2004). Artefacts - nstruments - computers. In C. Bergsten & B. Grevholm (Eds.), Mathematics and language. Proceedings of Madif4 (pp. 212-218 Linköping: SMDF.

Ulin, B. (1998). Klassisk geometri - motiv och mening. Solna: Ekelunds Förlag AB.

Van Hiele, P. (1986). Structure and insight: A theory of mathematics education. New York: Academic Press.

Wyndhamn, J. (1997). Från räkning till matematik. Om matematik och matematikämnet i de senaste läroplanerna. Institutionen för tillämpad lärarkunskap, Linköpings universitet.

Bygg upp en kreativ skolgeometri!

- Bengt Ulin -

Hur kommer det sig att svensk skolgeometri sedan länge är eftersatt och hur kan den bli ett fält som utvecklar elever till kreativitet? Låt oss börja med den första frågan för att få vidgade perspektiv på den andra. I tredje delen av boken ”Didaktisk ämnesteori i matematik” [5] skrev Wiggo Kilborn att man i samband med 1969 års läroplan gjorde allvarliga försök att lansera en bättre modell än den som skolan sedan länge haft med Euklides som förebild. Ett av motiven var att låta avbildningsgeometri bana väg för en mer praktiskt inriktad undervisning. I den tidigare realskolan förekom en hel del praktiska geometriexempel som gjorde matematiken intressant: där fanns tegeltak, skjutbanor, blecklådor, trädgårdsland, bojar osv. I samband med ”den nya matematiken” skulle rörelser och avbildningar som translation, vridning och spegling bilda en mer stimulerande grundval att bygga på. ”Med avbildningsgeometrin gick det tyvärr som med så mycket annat. - - - Resultatet blev att avbildningsgeometrin insomnade i stillhet och fortfarande sover en djup törnrosasömn” - så skrev Kilborn 1992. Efter ”the new math”, ett experiment som med sin abstraktion och häpnadsväckande brist på inlevelse i hur barn tänker och känner var dömt att misslyckas, kom i mitten på 70-talet mottot ”back to basics”. Geometrin fick en kraftig slagsida mot räkneuppgifter, främst beräkning av längder, areor och volymer. I Danmark har geometrin av tradition haft en högre status än i Sverige. Man har där bättre tagit vara på det faktum att åskådning spelar en viktig roll i geometri och att skolgeometrin således bör ge stort utrymme åt studiet av figurer. Under den långa tid som undervisningen hade sina rötter i Euklides Elementa beaktade läroplanerna alldeles för litet betydelsen av en problemorienterad undervisning. Detta samlingsverk skrevs för matematiker och var inte avsett som ett läromedel för skolan. Trots detta är många moment i Elementa av stor betydelse för skolan, om de utnyttjas i form av syntetisk geometri. Något steg i denna riktning togs dock inte; på gymnasiet lades tyngdpunkten på analytisk geometri. Att med algebrans hjälp lösa geometriproblem är förvisso i regel en säker metod, den enda som Descartes själv fann tillförlitlig. Koordinatsystemet ger inte sällan eleganta lösningar, men eftersom dessa genomförs med algebra är geometriutbytet mellan frågeställning och resultat ringa. Till skillnad från kretsen kring Bourbaki, som nedlåtande betraktade geometri som ett trivialt specialfall av linjär algebra, ville L Carnot och med honom en grupp franska matematiker vid tiden för franska revolutionen ”befria geometrin från analysens hieroglyfer”. Skulle man kunna återinföra avbildningsgeometrin i skolan och ge eleverna en vitalare undervisning genom att ta fasta på Carnots paroll?

Vi är därmed inne på den andra av de två inledande frågorna. Det behövs någon form av revolution även i skolgeometrin, men man får inte gå till överdrift med Carnots paroll. En hel del avbildningsgeometri skulle kunna göras fruktbar redan i grundskolans högstadium och på gymnasiet borde geometrin utvidgas till att omfatta även projektiv och icke-euklidisk geometri, t ex sfärisk geometri. De olika formerna av geometri har ju åtminstone från 1800-talet spelat en viktig roll i skilda vetenskaper och de belyser varandra på ett sätt som kan göras spännande i skolan. Att geometriundervisningen ska ges ett brett spektrum visas på ett stimulerande sätt av **John Stillwell** i en nyutkommen bok **"The Four Pillars of Geometry"** [6]. Den är avsedd för akademiska studier på lägre nivå och bör vara en utmärkt litteratur vid utbildning och fortbildning av lärare på gymnasiet och grundskolans högstadium. Bokens fyra pelare är euklidisk geometri, linjär algebra, projektiv geometri samt transformationer (inklusive icke-euklidisk geometri). Av matematikens grenar borde geometrin betraktas ur olika synvinklar, skriver Stillwell i sitt förord; geometri är ett unikt område i att behandla teman ur skilda aspekter. Boken bygger på föreläsningar som författaren hållit vid University of San Francisco våren 2004. Texten på drygt 200 sidor och ett stort antal figurer samverkar till en pedagogiskt upplagd, lättläst framställning. Varje "pelare" innehåller två avdelningar, den första inledande och konkret, den andra mer abstrakt. Varje avdelning inleds med en utblick, avslutas med en diskussion och innehåller ett antal övningsexempel, totalt över 200 uppgifter som på ett instruktivt sätt anknyter till kunskapsinnehållet. Avsnitt 1 visar vilken fundamental roll som räta vinklar och parallella linjer spelar i Euklides geometri. Det är med stor tillfredsställelse som jag ser att författaren ägnar åtskilligt utrymme åt lösning av konstruktionsuppgifter med passare och linjal. Som gymnasieelev för 60 år sedan köpte jag ett litet häfte "Geometriska konstruktionsuppgifter" (för 90 öre!) av C. E. Sjöstedt. Där fanns ett stort antal problem och av några mönsterlösningar kunde man lära sig utnyttja vridning, spegling och translation. Stillwell behandlar de grundläggande satserna och konstruktionerna och diskuterar axiomatiken, främst parallellaxiomet, i avsnitt 2. Avsnitten 3 och 4 tar upp användning av rätvinkliga koordinatsystem och vektorer. Därvid bevisas satsen att varje isometri i planet kan erhållas som en kombination av högst tre speglingar. Efter en historisk upptakt om perspektivet behandlar Stillwell i avsnitt 5 den projektiva linjen, projektioner och axiomatik med tyngdpunkt på avbildningsfunktionen (ax+b)/(cx+d), dubbelförhållandet och dess invarians vid projektiv avbildning. Utöver Pappus och Desargues satser påvisas sambanden mellan geometri och aritmetiska axiom i avsnitt 6. I de avslutande två kapitlen 7 och 8 behandlas bl a gruppen av isometrier och rotationer i planet resp på sfären, transformationer av den projektiva linjen samt icke-euklidiska modeller. Författarens intention och det begränsade utrymmet har inte tillåtit en utförligare framställning inom bokens fyra områden än introduktioner. Men dessa är välskrivna och visar ett brett spektrum från elementär konkret geometri till abstrakta rum. Framför allt har författaren påvisat viktiga samband mellan de fyra områdena. Ju mer bokens läsare studerar speciallitteratur, desto värdefullare kommer den att bli vid ett förnyat studium.

Som avslutning vill jag ur mångårig erfarenhet av undervisning skriva ner några reflektioner och önskningar i hopp om en förnyelse av skolgeometrin.

1.

Ta in konstruktioner med passare och linjal, lämpligen från skolår 6. Som lärare vid såväl Kristofferskolan som vid Lärarhögskolan i Stockholm kunde jag uppleva hur fruktbart detta kärnkapitel i klassisk geometri är när det gäller att i en och samma uppgift stimulera både fantasi och logiskt tänkande. Det vore också värt att ta efter waldorfskolans formteckning, en stegvis stegrad pregeometri, i vilken eleverna genom frihandsteckning under skolår 1-5 samlar fruktbara erfarenheter för den geometri som väntar i skolår 6.

2.

Låt eleverna genom mer laborativ aktivitet utforska och upptäcka sammanhang som småningom leder fram till Pythagoras sats och andra grundläggande satser.

3.

Utöka andelen icke-numeriska geometriska problem; många sådana ger eleverna stort utrymme för att komma på fruktbara uppslag i problemlösningen.

4.

Ta in en kurs i projektiv geometri på gymnasiet - för alla elever. Av de åtskilliga olikartade kurser som jag undervisade eleverna i under skolår 9-12 uppskattade eleverna projektiv geometri mest (skolår 11-12). "And how can one avoid projective geometri?" frågar sig Stillwell i sitt förord. "It not only explains why objekts look the way they do, it also explains why geometry is entangled with algebra." Visst är det så, men för egen del ser jag två andra verkningar som de viktigaste: övningen att växa in i nya begrepp (de oändligt-avlägsna elementen) och övningen i att dualisera, att se saker och ting från motsatta håll. (Tyvärr tar Stillwell inte upp de för projektiv geometri så viktiga dualiteterna.) Naturligtvis kan det inte bli tal om skolundervisning i projektiv geometri om inte detta ämne får ett rejält utrymme i lärarutbildningen. En fördel med detta vore dessutom att studenterna får dels en flexibel övning i problemlösning, dels perspektiv på övriga former av geometri. De ansvariga för matematikutbildningen borde ta till sig Morris Klines bedömning att "ingen del av matematiken kan tävla med den projektiva geometrin ifråga om originalitet i idéer, samordning av intuition vid upptäckterna med stränghet i bevis, renhet i tanke, logisk fulländning, elegans i bevis och begreppens omfångsrikedom". Kan det finnas starkare argument?

Givetvis beror en lyckad undervisning starkt av att läraren sörjer för sin egen övning i problemlösning, en övning som inte får upphöra. Många av de totalt 226 övningsuppgifterna i Stillwells bok kan därvid utnyttjas med gott resultat. Det gäller också att bedriva ett kontinuerligt studium av böcker och tidskriftsartiklar. Den korta litteraturlistan nedan tar upp några verk som jag lärt mig mycket av. Dessutom tar jag oblygt nog upp ett par böcker av min egen penna.

Tips för studium

[1] H.S.M. Coxeter, Introduction to Geometry, 2nd ed., Wiley &Sons 1980
[2] ————, Projective Geometry , 2nd ed., Springer 1994
[3] D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, Teubner 1968
[4] P. Häggmark, Laborativ geometri, Studentlitteratur 1989
[5] W. Kilborn, Didaktisk ämnesteori i matematik, Almqvist & Wiksell 1992
[6] J. Stillwell, The Four Pillars of Geometry, Springer 2005
[7] B. Ulin, Klassisk geometri - motiv och mening, Ekelunds 1998
[8] ——, Projektiv geometri, en åskådlig introduktion, Ekelunds 2000

- ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ ♢ -

Var med och bygg upp Kollegieblocket.se !

En inspirationsplats för lärare i matematik från förskola till högskola:

Nationellt Centrum för Matematikutbildning, NCM, startar nu Kollegieblocket.se, en webbsida för utvecklingsarbete som pågår runt om i Sverige, från förskola till högskola och universitet. Här kan ni låta er stimuleras av andra lärare i matematik. Korta beskrivningar samt kontaktuppgifter ges av olika typer av utvecklingsarbete. Idéerna kan handla om allt från konkreta förslag till aktiviteter för studenter till utvecklingsarbete på kommunal nivå.
På Kollegieblocket går det bra att själva anmäla utvecklingsarbete och idéer som ni gärna vill sprida information om under länken ”Anmäl utvecklingsarbete”.
Det material som samlades in under Matematikdelegationens arbete 2003-2004 utgör grunden för innehållet på webbsidan som på uppdrag av Myndigheten för Skolutveckling skall spridas. Därför finner ni en beskrivning av delegationen och dess förslag med exempel på konkretiseringar för att utveckla svensk matematikutbildning. Ni hittar också bland annat delegationens betänkande och arbetsgruppernas rapporter. Dessutom finns tänkvärda texter av bland annat Maria Borelius, Hans Wallin och Sverker Sörlin som tagits fram under delegationens arbete.

Åter igen, varmt välkomna att anmäla utvecklingsarbete!

Hör gärna av er med idéer kring Kollegieblockets innehåll, uppbyggnad och utveckling till Kollegieblocket@ncm.gu.se

I ”Snabbval - klicka” hittar du utvecklingsarbeten kategoriserade efter till exempel utbildningsnivå, aktivitet, matematikinnehåll och bedömning. Ge oss gärna förslag till nya kategorier.

Under ”Anmäl utvecklingsarbete” finns ett formulär där man enkelt fyller i uppgifter för att få med sitt bidrag på Kollegieblocket.

Under ”Inspiration från Matematikdelegationen” finner man bland annat delegationens förslag i en version där man enkelt kan klicka sig mellan huvudförslag, delförslag och konkretiseringar.

Stringens och moral.

- Peter Hackman -

Rigor is to the mathematician what morality is to man. André Weil skrev så för c:a 50 år sen och det är tydligt att han talar om en analogi, om vad som håller samman och ger riktning, enhet, stadga och mening.

Under min snart avslutade karriär har jag ofta kommit att uppfatta mer än en analogi. Hur matematiken presenteras är i högsta grad en etisk fråga. Vill vi låta studenterna ana både djupet och enkelheten under den ibland lite avskräckande begreppsapparaten? Eller vill vi förvandla dem till sifferfurirer för vilka matematiken är en bijektion mellan uppgiftslydelser och armrörelser?

Läroböcker idag har ofta mycket vacklande ambitioner. I ena riktningen sopas härledningar fullkomligt godtyckligt under mattan, kanske för att författaren inte orkat tänka ut de mest direkta vägarna till resultaten.

I den motsatta riktningen finns tendensen att freda det onda samvetet genom att inbädda de mer triviala resultaten i en pompös begreppsapparat, när två, tre välvalda exempel eller specialfall hade avslöjat de teoretiska mekanismerna.

Typexempel på denna obalans är de läroböcker i lineär algebra som visar determinantens linearitetsegenskaper med induktionsbevis över två sidor, medan antisymmetriegenskaperna förblir "beyond the scope of our presentation". De senare blir nämligen alldeles för rörigt att utreda på grund av en "underlättande" induktiv definition!

Ingen författare (utom min kollega U Janfalk) tycks känna till att G Shilov för över 40 år sedan anvisade en didaktiskt överlägsen presentation av permutationer och deras tecken med hjälp av "lutningar", en ansats som förenklar determinanteorin i *alla* dess delar.

Stringens är inget absolut, inte ens på definitionsstadiet. Weil påpekar också att det inte handlar om att bevisa allting. Men jag har i decennier predikat att teorierna även för nybörjare måste föras på ett sådant sätt att luckorna är synliga och väl avgränsade, så de kan täppas i efterhand. Man kanske inte direkt ska införa reella tal som ekvivalensklasser av Cauchy-sviter; men man borde åtminstone diskutera betydelsen och behovet av ett kontinuitetsaxiom.

En diskussion kunde utgå från den vanliga föreställningen om reella tal som oändliga decimalbråk. En anmälare av Body and Soul- trilogin påpekade nyligen hur Johnsonligan misslyckats med att redogöra för *räkningen* med slika storheter.

Svårigheten är instruktiv. Varje försök att få rätsida på detta leder nämligen nästan ofelbart till Cauchysviter eller något liknande. Plötsligt förstår en och annan att en höjning av abstraktionsnivån kan vara motiverad och underlättande!

Sådana diskussioner väntar jag mig av textböcker. Annars är vi ju inte i närheten av en *definition* av de reella talen, och det är ju där stringensen börjar.

Vi förfasar oss gärna över att studenter ser definitioner som överkurs. När mina studenter ska lösa differentialsystem medels egenvektorer och egenvärden klagar de ofta att de inte vet vad de gör. Det är verkligen sant - när jag anvisar kontroller som borde förklara detta förstår de inte. De har inte gjort klart för sig vad en egenvektor är för något. De har härmat förfaranden.

Samtidigt kan man undra om de ges chansen. Hur ofta är presentationen, läroboksexemplen och övandet verkligen anlagda på begreppsförståelse?

Det svåraste problemet - det är verkligen är svårt - är gränsvärdesdefinitionen med den logiskt och språkligt knöliga epsilon-delta-formalismen. Vi smickrar oss gärna med att vi lyckas förmedla en "intuition" istället. Sanningen är dock att de vanliga substituten med "godtyckligt" och "tillräckligt" nära inte är ett dugg mer intuitiva och lättfattliga, bara mindre precisa.

Hur ska vi annars förklara att så många studenter, kanske flertalet, räknar ut att

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \to 1 \text{ då } x \to -\infty$$

utan att reagera? Ingen intuition i världen kan säga att en negativ funktion kommer "godtyckligt nära ett" för tillräckligt stora negativa x.

Vad ska jag föreslå, som föreläst ett otaliga kurser, men aldrig envariabelanalys? Mitt svar, som på de flesta didaktiska frågor, är "försök något annat". Eller, åtminstone, "försök!", ty väl ofta är det mest det som fattas.

För förståelsen skulle det kanske vara rimligare att öva mer på att bestämma deltan och omegan till givna epsilon än att räkna ut mer eller mindre konstlade gränsvärden av typen 0/0. På rak arm vet jag dock ingen bok som t ex förklarar varför delta ofta väljs i två steg -det första för att begränsa en faktor, nästa för att strypa en annan - trots att idén med "begränsad gånger nollgående" annars ges en framträdande plats i resonemangen. Här försummas ett tillfälle att dra ihop helheten.

Nyligen gav Studentlitteratur ut en lärobok som påstods täcka all den envariabelanalys och lineära algebra man kunde tänkas behöva, fast målgruppen aldrig preciserades. På baksidan till detta tidstypiska alster uttrycks författarens "övertygelse" att matematiska begrepp och fenomen kan göras fullt begripliga utan långa och tekniska bevis.

Jag kan inte låta bli att kasta mig över en sådan bok för att utröna hur många korta och otekniska bevis som offras under den förevändningen, eller var författaren första gången bryter mot Weils bud att aldrig förutsätta mer än nödvändigt.

Typexempel på det första är att de trigonometriska räknelagarna förutsätts utan härledning - *ingen* kan tro att detta utreds tillfredsställande i gymnasiekurserna. Det naturliga i en bok som försöker "integrera" analys och lineär algebra är att dela upp en enhetsvektor i ortogonala komposanter och vrida båda lika mycket, en påminnelse om det allra mest grundläggande, vad komposanter, sinus och cosinus är.

Linearitet (i detta fall lineariteten av en vridning) borde rimligen betraktas som en sammanhållande princip med icke-triviala konsekvenser - cosinusteoremet och Pythagoras' sats är ett annat exempel (projektionens linearitet).

Det leder naturligtvis till en del besvärande och lärorika stringensfrågor - till sist är det inte så självklart vad en vinkel är för något. Men att inte ens antyda möjligheten av ett åskådligt och naturligt bevis, och därtill hörande problem, finner jag omoraliskt.

Det andra är, som ofta annars, härledningen av de trigonometriska derivatorna, speciellt då derivatan av sinus i noll,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Det kritiska är olikheten $x < \tan x$ för $0 < x < \pi/2$ som förklaras på de märkligaste sätt i litteraturen. Jag har tidigare ("Tillbaka till sandlådan!", Utskicket eller min hemsida) anvisat en enkel lösning på det didaktiska problemet - dra tangenten i rätt punkt och jämför brant (tangent)- brantare (båge) - brantast (halv korda).

Här väljer nu författaren att jämföra areor iställetför båglängder. Men cirkelsektorns area är då inte "bågen gånger radien genom 2", vilket vore en suggestiv analogi med triangelns area - och möjlig att skärpa, med viss möda.

Den är istället en viss andel av cirkelns area, *som alltså förutsätts.* Om cirkelns area inte är ett specialfall av sektorns area, vad är den då? En integral av ett rotuttryck, föreslog en kollega. Visst, om den nu ginge att räkna ut utan att man förutsätter derivatan av sinus eller dess invers -men hur nära problemet är vi då? Vad belyser beviset?

Tillsist handlar den grundläggande etiska frågan om detta. Att framställa sakens rätta natur, vad som är antagande, påstående, slutsats, vad som är observationer, elementära konsekvenser eller djupgående samband, var teorin tangerar intuitionen och var, helst också varför, den tvingas dra kaniner ur hattar.

Att inte ens försöka något av detta är utslag av den populism som jag - med mycket varierande framgång - ägnat min nu avslutade karriär åt att bekämpa.

Den svenska modellen

- *Arne Söderqvist* -

Oroande statistik visar att inte alla skolelever tycks klara grundskolan. Trots detta har alla numera möjlighet att komma in på någon form av gymnasieutbildning. Ännu en reform kanske planeras, som går ut på att alla också ska kunna påbörja akademiska studier oavsett hur de lyckats med gymnasiestudierna. Sedan är ju steget inte långt till att införa betinget att alla studenter ska klara sin examen. På papperet har Sverige därmed med råge uppnått målet att bli en kunskapsnation.

I debatten framförs ofta att skolan blivit för teoretisk. För vilka skolan blivit för teoretisk preciseras aldrig, men naturligtvis avser man de elever som av olika skäl inte blir godkända. I jämlikhetens namn ska därmed läroplanerna ändras för alla. Detta har vi varit med om förr, då alla gymnasister plötsligt skulle tvingas läsa bla. Matematik A. När detta inte slagit väl ut, ska nu kursinnehållet minskas. Vad som sticker i ögonen på de styrande är förmodligen den officiella hemligheten att ansvarsfulla lärare, som velat ge sina elever meningsfull undervisning, har anpassat kursinnehållet till rådande förkunskaper. Den nivåskillnad som de facto därmed funnits elevgrupper emellan ska nu uppenbarligen utplånas till varje pris och metoden är som vanligt att undvika att stimulera de studiemotiverade. De duktiga klarar sig alltid brukar det hävdas. Vilka fakta styrker ett sådant påstående? Antagligen har många elever tappat gnistan just därför att deras gryende intresse aldrig stimulerats. Elever på alla gymnasieprogram ska också få två veckors praktik per år, vilket innebär att läsåret i realiteten avkortas med motsvarande tid.

Verkligheten låter sig emellertid inte luras av skenlösningar. Ett av skolans verkliga problem är att kunskaperna även hos de duktigaste eleverna sjunker. Detta framgår bla. av den rapport som KTH-lektorerna Lars Filipsson och Hans Thunberg presenterade våren 2005. Att detta konstaterande inte bara gäller matematik framgår av en artikel på DN-debatt 11 november 2005, skriven av litteraturprofessorn vid Södertörns högskola, Ebba Witt-Brattström.

Den dyrbaraste tiden i livet är barn och ungdomstiden, alltså den tid då intresseinriktningen danas och man formas till vuxen människa. Endast undantagsvis förmår man bli intresserad av något man tidigare knappast hört talas om, när man passerat tonåren och skulle så till äventyrs ske, så har man mycket att ta igen, inte minst om det skulle gälla matematik. Det är frustrerande att åse hur okunniga styrande tar sig tolkningsföreträde och genomför reformer som faktiskt innebär att skolan omvandlas till lekstuga. Media får därmed aldrig någon rejäl motvikt till sina lättillgängliga budskap. Både skolan och högskolan har istället hakat på trenden och ställt in sig som vindflöjlar; alla kommuner har nu gymnasieprogram med just medieinriktning och även på många högskolor kan man få en akademisk examen i media.

Sverige är världens mest amerikaniserade land; USA kommer möjligen på andra plats. Vad som är mode i USA blir genast en trend också i Sverige, men oftast utan någon åtföljande kritisk eftertanke. En nation med 250 miljoner invånare kan kosta på sig att framställa naturvetare och tekniker som bisarra fackidioter i sina media, men om en liten nation som Sverige ska kunna konkurrera som kunskapsnation måste alla tänkbara möjligheter värnas och alla goda förebilder framhävas. Matematiker kanske kan sägas ha undsluppit förhånande medial framställning, men matematiker uppmärksammas förvisso inte i media i något sammanhang alls. Statsmakterna vägrar samtidigt att ge erforderliga anslag till Telemuseum i Stockholm, alltså ett museum som under åren uppmuntrat många ungas teknikintresse och som också visar en av de hörnstenar på vilken det svenska välfärdssamhället i hög grad byggts! Åtgärden är dessutom totalt irreversibel, i och med att man inte ens ger anslag till lagring av samlingarna, som därmed måste avyttras eller skrotas. Det är hög tid att de styrande lär sig att tänka!

Skolan har inte bara blivit en lekstuga för eleverna; där tillåts även didaktikerna pröva allehanda och till intet förpliktigande hugskott. Privata företag tjänar stora pengar på att sända ut utvecklingskonsulter mm., alltså personer som givit sig själva intetsägande titlar och som arrangerar studiedagar för lärarna där man redogör för den senaste didaktiska läran. Skolornas rektorer och studierektorer drar en lättnadens suck, då dessa konsulter alltid har ett så allmänt program att alla lärarkategorier kan beordras deltaga. De som egentligen har fortbildningsansvaret för lärarkollegiet slipper därmed engagera sig och eftersom en enda föreläsare riktar sig till hela kollegiet räcker fortbildningsanlaget gott och väl, även om konsulten skulle salta notan rejält.

Arbetslösheten är något som debatteras intensivt, speciellt under valår. För att hyfsa statistiken tycks politiker benägna att vilja hejda den unga generationens inträde på arbetsmarknaden. Ett sätt är att förlänga de akademiska utbildningarna; tex. ska ju civilingenjörsutbildningen bli femårig. I det fallet är det väl delvis fråga om att upprätthålla kvalitetskraven, men man kunde ju reflektera över varför vi hamnat i denna situation. Det är ju inte på slutet av utbildningen man bygger på med nya kurser utan i dess början, där man måste reparera brister i förkunskaperna.

I själva verket genererar de som har en anställning arbetstillfällen även åt andra. Vissa yrkesgrupper gör det i högre grad än andra. En kreativ civilingenjör kan tex. vara med om att skapa förutsättningar för andra anställda inom produktionen hos den egna arbetsgivaren och hos underleverantörer. En anställd butikskassör ökar förvisso underlaget för andra serviceanställda på orten, men civilingenjören skapar möjliga arbeten på fler nivåer. Förutsättningen är dock att civilingenjören har en gedigen utbildning och inte bara ett formellt examensbevis. Därtill krävs naturligtvis en anställningsperiod på många år innan den examinerade kan anförtros riktigt ansvarsfulla arbetsuppgifter. Just nu har 60-talisterna börjat nå dithän. Vad 70- och 80-talisterna går för kommer att visa sig under de närmaste årtiondena.

En farlig trend i samhället, som dessvärre accelererar, är trenden att bortse från värdet av formella meriter. Beträffande privat sektor kunde man möjligen beklaga förhållandet, men beträffande privata företag finns inga lagar att åberopa. Emellertid är privat verksamhet under ständig omprövning, i alla fall om den är konkurrensutsatt. För offentlig verksamhet är det helt annorlunda; verksamheten kan fortgå tills det är helt uppenbart att man är på fel spår och då kanske det är för sent att korrigera. Under resans gång kanske man märker att effektiviteten avtar och en vanlig slutsats blir då att man har för liten personal. Så rekryterar man på samma regelvidriga sätt igen, alltså inom chefernas sociala nätverk, och utan att verksamheten tillförs nya friska idgivare. Ett slående exempel är Skolöverstyrelsen, som helt enkelt avvecklades varvid Skolverket bildades och alla tjänstemän fick söka sina gamla tjänster igen, i konkurrens med andra. Dessvärre har det nog blivit dags att göra om manövern igen.

Exempel på ofantlig byråkrati, dåligt fungerande industri och låg levnadsstandard såg man tidigare i Östeuropa. Där betydde gedigen utbildning mindre än politisk korrekthet. I Sverige är vi till och med i färd med att avskaffa alla vägar till gedigna utbildningar samtidigt som vi anammat den politiska korrektheten vid tjänstetillsättningar. Facit finns alltså, men ingen tycks vilja se svaret!

Folke Uppdaterad

- *Jaak Peetre* -

I förra numret av Utskicket (januari 2006) skrev jag om ett brev av den 16 dec. 1925 från en för mig då okänd person med förnamnet Folke i Cambridge, Massachusetts till en viss “broder” Håkan. På detta fick jag ett mail av Anders Martin-Löf på Stockholms universitet, som menade att det kunde röra sig om Folke Odqvist[1]. För detta skall jag vara honom evigt tacksam. Jag letade upp artikeln om Odqvist i Svenskt biografiskt lexikon [2], som jag har på min eMAC. Där finns följande passus:

> *En studieresa till USA som Svenska Amerika stiftelsens stipendiat 1925-1926 ägnades bla. åt experimentella strömstudier vid MIT i Cambridge.*

[1] Odqvist, Folke, 1899-1984, hållfasthetsteoretiker, professor vid Tekniska högskolan i Stockholm 1936-66, prorektor 1943-66. Med en bakgrund som tekniker och hydrodynamiker utvecklade O. teorier för metallers plastiska deformation, krypdeformation och krypbrott, som gav internationellt erkännande. Hans lärobok ”Hållfasthetslära” (1948, 3 upplagor) fick stor betydelse även som handbok. O., som var president i International Union of Theoretical and Applied Mechanics 195660, var en portalgestalt inom hållfasthetsläran. [1].

BINGO! Det måste vara Odqvist! Det är föga sannolikhet, att det kan ha funnits simultant på MIT två svenskar, som ägnade sig åt samma problem och bägge hette Folke. Därmed vore mitt problem löst.

Vidare är det troligt att adressaten Håkan är hans köttslige bror, inte en andlig sådan som jag först lutade åt. (På den tiden tilltalade alla akademiker varandra som "broder".) En hypotes, som jag dock ej har undersökt. Man ser nu även, att brevskrivaren tecknat sig som Folke O., inte Folke L. (L för Lannér) som jag hade börjat tro.

Se här nyttan av att läsa Utskicket!

P.S. I tillägg till Anders Martin-Löf har jag blivit kontaktad av andra flitiga Utskicksläsare, Gert Almqvist, Bengt von Bahr och Lars Hörmander som alla kommit med värdefulla förslag eller upplysningar. Till dem alla är jag likaledes skyldig ett stort tack. Samtidigt måste jag nu skämmas för att jag överhuvudtaget framkasted namnet Linnér. Denne var född 1913 och såldes 12 år vid den aktuella tidpunkten. Men allt detta understryker ytterligare nyttan av att läsa Utskicket. Ds.

Referenser

[1] Nationalencyklopedin och Språkdata. Nätversion.
[2] Svenskt biografiskt lexikon. Dataversion.

Hr redaktör!

Utber mig plats för följande i nästa medlemsutskick:

Det är inte allom förunnat att få sin felräkningar så hårdlanserade som jag i förra medlemsutskicket. Ulf litade förstås på min kalkyl, men det borde han inte ha gjort denna gång.
Dock åtar jag mig att när som helst och för vem som helst förklara formeln för det antal områden som cirkelskivan maximalt delas i av alla kordor mellan n punkter på periferin.

Thomas Weibull, Göteborg den 13/3 2006

Redaktören kommenterar
$\binom{30}{4} + \binom{30}{2} + \binom{30}{0} = 27841$ som Gowers mycket riktigt skriver. Således är jag givetvis inte bara skyldig Thomas Weibull en ursäkt utan även Timothy Gowers. Det är ett journalistiskt krav att kontrollera sina källor (i detta fall en enkel uträkning) innan man publicerar en 'story'. Jag vidkänner utan omsvep mitt misstag och framför allt min försummelse att inte ha konsulterat Thomas i förväg.

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING

Detta år deltog 122 skolor och sammanlagt 822 deltagare varav 122 flickor.

Kvalificeringstävling den 4 oktober 2005

1 En rörledning skall dras från A till B, en sträcka på 2005 m, genom att man sätter samman rör av längderna 13 och 17 m. Det är bara möjligt att koppla ihop rör av olika längd, dvs i en rörledning måste vartannat rör ha längden 13 m, vartannat längden 17 m. Varje skarv är 1 m lång, dvs vid övergången från ett rör till ett annat har vi en överlappning om 1 m. Är det möjligt att dra ledningen utan att behöva kapa något rör?

2 Bestäm alla reella tal a sådana att ekvationen

$$x^2 + 2x + 10 - 12a + 4a^2 = 0$$

har minst en reell lösning.

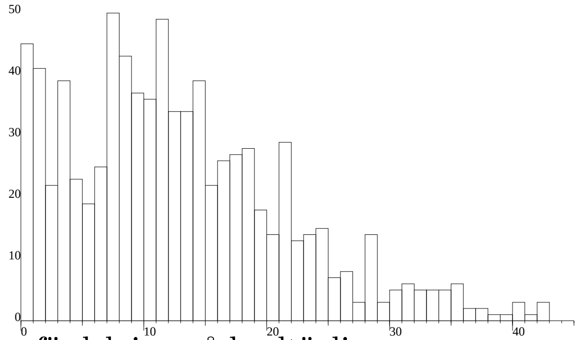
3 Amanda och Botvid är medlemmar i Gullholmens Matematikförening och skall arrangera en arbetsmiddag för sig själva och ytterligare 5 medlemmar: Camilla, Daniela, Efraim, Folke och Göran. De sju personerna skall placeras kring ett runt bord. Eftersom Efraim, Folke och Göran är osams, gäller att ingenstans får två av dessa tre sitta bredvid varandra. I övrigt finns inga restriktioner beträffande bordsplaceringen. På hur många sätt kan denna göras? Placeringar som skiljer sig endast genom en rotation kring bordet betraktas som samma.

4 Bestäm alla reella lösningar till ekvationen $f(f(x)) = x$, där $f(x)$ är polynomet $x^2 - 2x + 2$.

5 Låt $a_1, a_2, ..., a_n$ vara heltal med summan 1. Kan polynomet $f(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ uppfylla att $f(3) = 2005$?

6 Låt M vara mittpunkten på sidan BC av parallellogrammen ABCD. Låt E vara den punkt på sträckan AM för vilken vinkeln DEM är rät. Visa att triangeln DEC är likbent.

Skrivtid: 5 timmar Miniräknare är inte tillåtna!



Poängfördelning på kvaltävlingen

upp-gift / poäng	1	2	3	4	5	6
	8	100	72	175	366	263
0	136	215	219	298	376	478
1	78	38	45	132	11	17
2	62	42	62	49	10	13
3	152	103	32	13	2	5
4	7	80	37	57	5	4
5	10	30	72	23	1	2
6	37	27	35	15	7	8
7	332	187	248	60	44	32

Poängfördelning per uppgift

Resultat från Finalen

1. Peng	Gunnar	Katedralskolan	Linköping
2. Liu	Zihan Hans	Viktor Rydbergs gymnasium	Stockholm
3. Xing	Chen	Östra gymnasieskolan	Umeå

övriga finalister i bokstavsordning

Eriksson	Daniel	Älvstrandsgymnasiet	Hagfors
Evertsson	Björn	Lindeskolan	Lindesberg
Freij	Harald	Gymnasieskolan Spyken	Lund
Frisk-Kockum	Anton	Uddevalla gymnasieskola	Uddevalla
Harmenberg	Karl	Östra Reals gymnasium	Stockholm
Hellström	Matti	Haraldsbogymnasiet	Falun
Holmgren	Niklas	Katedralskolan	Uppsala
Karlsson	Joel	Uddevalla gymnasieskola	Uddevalla
Larsson	Joel	Per Brahegymnasiet	Jönköping
Lindgren	Oskar	Hvitfeldtska gymnasiet	Göteborg
Meuller	Simon	Danderyds gymnasium	Danderyd
Mollén	Christopher	Ebersteinska gymnasiet	Norrköping
Novikov	Vassilli	Växjö Katedralskola	Växjö
Persson	Mats	Fredrika Bremergymnasiet Heurika	Haninge
Ryberg	Emil	Hvitfeldtska gymnasiet	Göteborg
Sun	Lei	Berzeliusskolan	Linköping
Sundman Norberg	Johan	Danderyds gymnasium	Danderyd
Wadenbäck	Mårten	Polhemskolan	Lund
Zenlander	Robin	Rudbeckianska gymnasiet	Västerås

1 Bestäm alla heltalslösningar x och y till ekvationen $(x + y^2)(x^2 + y) = (x + y)^3$.

2 Vid en kassa står 12 personer i kö. Pga ett tekniskt fel måste kassan stängas och de köande flyttar över till en nyöppnad kassa. På hur många olika sätt kan dessa 12 personer bilda en ny kö på ett sådant sätt att varje person har samma position eller har tagit ett steg fram eller ett steg tillbaka jämfört med ursprungskön?

3 I triangeln ABC dras bisektriserna från hörnen A och C. Bisektrisen från A skär sidan BC i punkten D, medan bisektrisen från C skär sidan AB i punkten E. Man vet att vinkeln vid B är större än $60°$. Visa att $AE + CD < AC$.

4 Nollställena till fjärdegradspolynomet $f(x)$ är reella och bildar en aritmetisk följd. (De kan alltså skrivas $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ för något a, något d.) Visa att de tre nollställena till polynomet $f'(x)$ också bildar en aritmetisk följd.

5 Varje ruta i ett rutnät med 2005x2005 rutor målas antingen vit eller svart. Detta görs så att varje delkvadrat med 2x2 rutor innehåller ett udda antal svarta rutor. Visa att av de 4 hörnrutorna är ett jämnt antal svarta. Hur många möjligheter finns det att måla rutnätet på detta sätt?

6 En tetraeder vars kanter alla har längden 1 projiceras vinkelrätt mot ett plan. Bestäm den största respektive minsta möjliga arean av bilden.

Skrivtid: 5 timmar Miniräknare är inte tillåtna!

Matematik på gott och ont

Svenska matematikersamfundets årsmöte, 9-10 juni 2006 i sal 14, hus 5, Kräftriket, Stockholms universitet

Fredag 9 juni

13.25-13.30 Välkomsthälsning

13.30-14.15 **Johan Lönnroth**, Handelshögskolan vid Göteborgs universitet, *Kritik av den matematiska utopin*

14.30-15.15 **Jean Bricmont**, Université catholique de Louvain, *On the misuses and uses of mathematics*

15.15-15.45 Kaffe och kaka

15.45-16.30 **Haynes Miller**, Massachusetts Institute of Technology, *Vignettes from contemporary homotopy theory*

16.45-17.15 **Mikael Passare**, Stockholms universitet, *Presentation av 2006 års Wallenbergpristagare Mattias Jonssons arbete*

17.15-17.30 Utdelning av Wallenbergpris

18.30-... Middag på Värdshuset Kräftan (Missa inte det finstilta: den som önskar delta i middagen på fredagen bör anmäla detta – med angivande av eventuella dietrestriktioner – till Julius Borcea[1] senast torsdagen den 1 juni.)

Lördag 10 juni

9.00-9.45 **Michael Benedicks**, KTH, *Om Abelpristagaren Lennart Carleson*

9.45-10.15 Kaffe och fralla

10.15-11.15 Årsmötesförhandlingar

11.30-12.15 **Pär Kurlberg**, KTH, *Polynom som slumpmässiga avbildningar*

För ytterligare information, se `http://www.math.chalmers.se/~olleh/SMS_Stockholm.html`, eller
kontakta Julius Borcea eller Olle Häggström[2].

[1] `http://www.math.su.se/~julius/`

[2] `http://www.math.chalmers.se/~olleh/`

Svenska matematikersamfundets styrelseberättelse, verksamhetsåret 05/06

Samfundet har 467 medlemmar, varav 318 är ständiga medlemmar. Därtill är 20 institutioner medlemmar. Styrelsen har under året haft följande sammansättning:

Olle Häggström, ordförande
Nils Dencker, vice ordförande
Johan Jonasson, sekreterare
Milagros Barrios Izquierdo, skattmästare
Anette Jahnke, femte ledamot

Denna styrelseberättelse avser verksamhetsperioden juni 2005 – maj 2006. Vårt styrelsearbete har under året företrädesvis bedrivits medelst (periodvis gansk intensiv) epostutväxling, snarare än genom att samlas till styrelsemöten.

Verksamhetsperioden inleddes med att den nya styrelsen valdes och formerades vid årsmötet i Göteborg den 4 juni 2005 – som för övrigt bjöd på ett varierat program under huvudrubriken *Matematikutbildning*. Sedan den föregående styrelsen haft sällsynt bråda dagar genom flera extraordinära händelser – t.ex. var 2004 året såväl för regeringens *Matematikdelegations* slutrapport som för arrangerandet i Stockholm den Fjärde Europeiska Matematikkongressen – kunde vi se fram emot ett år lite mer ”normalt” år.

Det har hört till traditionen att samfundet utöver årsmötet varje år arrangerar ytterligare två möten: dels ett ordinarie höst- eller vintermöte, och dels de så kallade utbildningsdagarna.

Vad gäller det förstnämnda anordnade vi i Karlstad den 25-26 november ett höstmöte med rubriken *Juniora matematiker*, där doktorander och nydisputerade från hela landet fick chansen att presentera sina forskningsarbeten och bekanta sig med varandra, alltså i stort sett samma koncept som föregående styrelse införde vid ett höstmöte två år tidigare. Intresset var stort, arrangemanget gav mersmak, och vi räknar med att återkomma med liknande möten i framtiden.

Däremot, vad gäller utbildningsdagarna, som ju brukar anordnas i början av kalenderåret, så stod det redan 2004 klart att dessa inte klarar konkurrensen jämna årtal med den betydligt resursstarkare *Matematikbiennalen*. Vi avstod därför i år från försök till sådant arrangemang, och har siktet inställt på att fortsättningsvis vartannatårslägga utbildningsdagarna (tidigt udda kalenderår). Istället höll vi en förhållandevis hög profil på *Matematikbiennalen* den 26-27 januari, med närvaro bl.a. av samtliga styrelseledamöter, och bidrag i form av en s.k. idéutställning och föredrag såväl av tre av styrelseledamöterna som av en lång rad andra medlemmar.

I höstas löste vi det långvariga bekymret med ett otympligt medlemsregister genom att föra över det till det jämfört med tidgare system långt mer ändamålsenliga Excel-formatet.

Samfundet har en angelägen roll att spela i offentlig diskussion kring framförallt matematikutbildningsfrågor. Vad gäller vår aktivitet på detta område kan nämnas en artikel i *Ny Teknik* som ordföranden för samfundets räkning författade[1] som kommentar till Högskoleverkets rapport *Nybörjarstudenter och matematik*[2]. Ett måhända och om möjligt än viktigare ämne som var aktuellt under hösten var de nya läroplaner för gymnasieskolan som Skolverket arbetat med under ganska öppna former, och vi tog chansen att komma med synpunkter både i dagspress[3] och senare i en direkt skrivelse till Skolverket, något som vi inbillar oss bidrog till att planerna för matematikämnet nu ser betydligt bättre ut än i somras. Därtill kan nämnas att vi utsett Hans Thunberg till samfundets representant i en arbetsgrupp som, är det tänkt, skall arbeta kontinuerligt med kursplanefrågor för gymnasiematematiken.

En stöttepelare i samfundets verksamhet är Medlemsutskicket, förtjänstfullt redigerat av Ulf Persson, som under verksamhetsåret utkommit med tre nummer: i oktober, januari och maj. Parallellt med detta är naturligtvis också vår webbplats[4] en viktig informationskanal.

Ett annat regelbundet inslag i samfundets verksamhet är *Skolornas matematiktävling*, där talangfulla gymnasister får chansen att testa sina förmågor. Årets slutomgång, som gick av stapeln i Lund den 19 november, samlade 22 finalister och vanns av Gunnar Peng från Katedralskolan i Linköping. I vanlig ordning gjorde vår tävlingskommitté med ordförande Dag Jonsson i spetsen ett storartat arbete med arrangemangen.

Två evenemang under verksamhetsåret till vilka samfundet bidragit ekonomiskt är *Kvinnor och matematik 6* i Umeå, 13-15 juni, och *Sonja Kovalevsky-dagarna* i Linköping, 11-12 november.

Mycket av vår verksamhet kretsar, som framgått ovan, kring den för samfundet och för vårt ämne livsviktiga uppgiften att stimulera och bereda väg för yngre förmågor. Utöver ovan nämnda aktiviter kan nämnas våra resestipendier till doktorander; i år har vi medverkat till beviljandet av 15 Wallenbergstipendier och ett Esséenstipendium.

Den 20 april beslöt vi, på förslag av den Wallenbergpriskommitté som i år bestått av Anders Martin-Löf, Lars-Erik Persson och Oleg Viro, att utse Mattias Jonsson, KTH, till emottagare årets Wallenbergpris om 300 000 kr. Beslutet följdes, glädjande nog och tack vare att TT nappade på nyheten, av publicitet i icke oäven omfattning: notiser i minst ett 40-tal dagstidningar inklusive de tre stora (DN, SvD och GP). Priset kommer att utdelas vid årsmötet den 9-10 juni, till vilket vi

[1] Häggström, O., Matematikens problem är verkliga, *Ny Teknik*, 14 sep 2005,
`http://www.math.chalmers.se/~olleh/skolans_sak/Ny_Teknik_Sudoku.html`

[2] Helenius, O. och Tengstrand, A., Nybörjarstudenter och matematik – matematikundervisningen under första året på naturvetenskapliga och tekniska utbildningar, *Högskoleverkets rapportserie 2005:36 R*,
`http://web2.hsv.se/publikationer/rapporter/regeringsuppdrag/2005/0536R.pdf`

[3] Flodström, A., Häggström, O. och Sundgren, J.-E., Skolverket nonchalerar matematiken, *Svenska Dagbladet*, 15 juni 2005,
`http://www.math.chalmers.se/~olleh/skolans_sak/Skolverket.html`

[4] `http://www.matematikersamfundet.org.se/`

för övrigt tycker oss ha lyckata åstadkomma ett spännande program under samlingsrubriken *Matematik på gott och ont.*

Till sist kan vi inte låta bli att nämna den stora händelsen att vår hedersmedlem Lennart Carleson tilldelats årets Abelpris; prisutdelningen kommer att äga rum i Oslo den 23 maj. Detta är i första hand en strålande framgång för Lennart själv, vilket dock inte hindrar att det också är något alla vi som sysslar med matematik i Sverige kan känna glädje och stolthet över. Och vår förutsägelse om ett ”normalt” år kom alltså på skam...

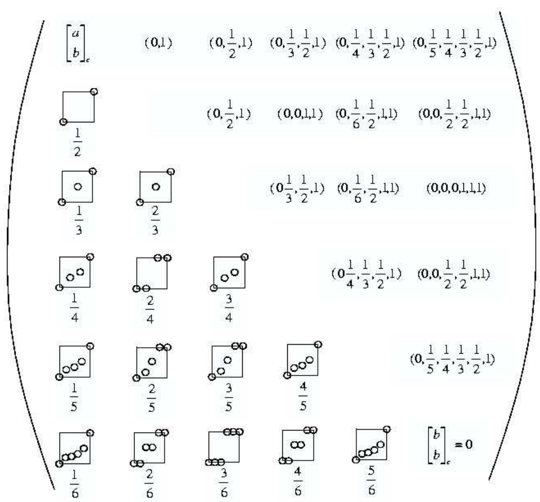
Göteborg den 15 maj 2006, på styrelsens vägnar,

Olle Häggström, ordförande

- ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ ◊ -

En gåta av Håkan Lennerstad

En talteoretisk gåta



Ovanstående matris är symmetrisk – det som står på plats (i,j) är samma som på plats (j,i) – beskrivet på olika sätt: numeriskt och grafiskt. Matrisen beskriver kvantiteten $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_c$ för några värden på a och b. Den är definierad för alla heltal a, b och c där $1 \le c \le b$, och är starkt relaterad till kvoten $\frac{a}{b}$. Gåtan är: Vad är $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_c$?

(Ledning: matrisen behöver inte diagonaliseras.)

Svar, frågor och kommentarer är välkomna till hakan.lennerstad@bth.se. Förklaring kommer i nästa medlemsblad.

Håkan Lennerstad, docent i tillämpad matematik
Lars Lundberg, professor i datorteknik
Blekinge Tekniska Högskola

Svenska matematikersamfundets årsmöte, lördagen den 10 juni kl 10.15 i sal 14, hus 5, Kräftriket, Stockholms universitet

Dagordning

1. Mötets öppnande.
2. Val av mötesordförande och mötessekreterare.
3. Val av två justeringspersoner.
4. Fastställande av dagordning.
5. Framläggande av styrelseberättelse, balansräkning och revisionsberättelse.
6. Frågan om beviljande av styrelsens ansvarsfrihet.
7. Val av styrelse för verksamhetsåret 06/07.
8. Val av lokalombud för verksamhetsåret 06/07.
9. Val av två revisorer och två revisorssuppleanter för verksamhetsåret 06/07.
10. Val av tävlingskommitté för verksamhetsåret 06/07.
11. Val av valberedning för verksamhetsåret 06/07.
12. Fastställande av medlemsavgifter.
13. Övriga frågor.
14. Mötets avslutande.

Svenska matematikersamfundet
Resultaträkning
för året 1 maj 2005 till 30 april 2006

Intäkter	
Medlemsavgifter, individuella årsbetalande	9 500 kr
Medlemsavgifter, institutioner årsbetalande	75 000 kr
Medlemsavgifter, ständiga medlemskap	16 500 kr
Medlemsavgifter, EMS	1 300 kr
Räntor och utdelningar	12 364 kr
Diverse	1 213 kr
Summa	**115 877 kr**

Kostnader	
Möteskostnader	40 806 kr
Resestipendier och bidrag	47 000 kr
EMS-avgifter	11 916 kr
Förvaltningskostnader	2 398 kr
Diverse (ink. porto)	4 069 kr
Överskott i verksamheten (fonderas)	9 688 kr
Summa	**115 877 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2006-04-30**	**2005-04-30**
Postgiro	47 632 kr	20 716 kr
SEB checkkonto	91 429 kr	108 414 kr
SEB checkkonto (Essenskonto)	0 kr	0 kr
SEB företagskonto	487 kr	730 kr
SEB fondkonto	867 101 kr	738 730 kr
Summa	**1 006 649 kr**	**868 590 kr**
Skulder		
Mats Essens minnesfond på SEB konto[1]	0 kr	0 kr
Summa	**0 kr**	**0 kr**
Tillgångar − skulder	**1 006 649 kr**	**868 590 kr**

Linköping 2 maj 2006

Milagros Izquierdo, skattmästare

[1] Se Mats Essens minnesfond års redovisning

Svenska matematikersamfundet
Resultaträkning
för Mats Essens minnesfond för året 1 maj 2005 till 30 april 2006

Intäkter	
Bidrag	8150 kr
Ränta	7 kr
Summa	**8 157 kr**
Kostnader	
Stipendium	6 000 kr
Förvaltningskostnader	0 kr
Summa	**6 000 kr**
Överskott i verksamheten (fonderas)	**2 157 kr**

Balansräkning

Tillgångar	**2006-04-30**	**2005-04-30**
SEB checkkonto[1]	16 947 kr	14 790 kr
SEB fondkonto	100 952 kr	87 278 kr
Summa	**117 899 kr**	**102 068 kr**

Linköping 2 maj 2006

Milagros Izquierdo, skattmästare av Svenska matematikersamfundet

[1] SEB konto 5405 1001237

KALENDARIUM

(Till denna sida uppmanas alla, speciellt lokalombuden, att inlämna information)

SMS Årsmöte

Stockholm, 9-10 juni

Författare i detta nummer

Christer Bergsten Universitetslektor i matematik med didaktisk inrikting verksam i Linköping. Vice ordförande i Svensk förening för MatematikDidaktisk forskning.

Bo Berndtsson Professor vid Chalmers. Med specialitet flera komplexa variabler.

Peter Hackman Snart pensionerad lektor vid Linköpings universitet.

Mikael Möller Redaktör för Qvartilen - Statistikerförbundets organ.

Jaak Peetre Flitig medarbetare i utskicket. Est med många olika matematiska intressen.

Arne Söderqvist Verksam vid KTH-Syd. Flitig debattör inte bara i Utskicket.

Bengt Ulin F.d. lektor vid högskolan för lärarutbildningi Stockholm. Under många år verksam vid Kristofferskolan i Bromma.

Innehållsförteckning

Notiser